Introducción al ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

BARTLE - SHERBERT

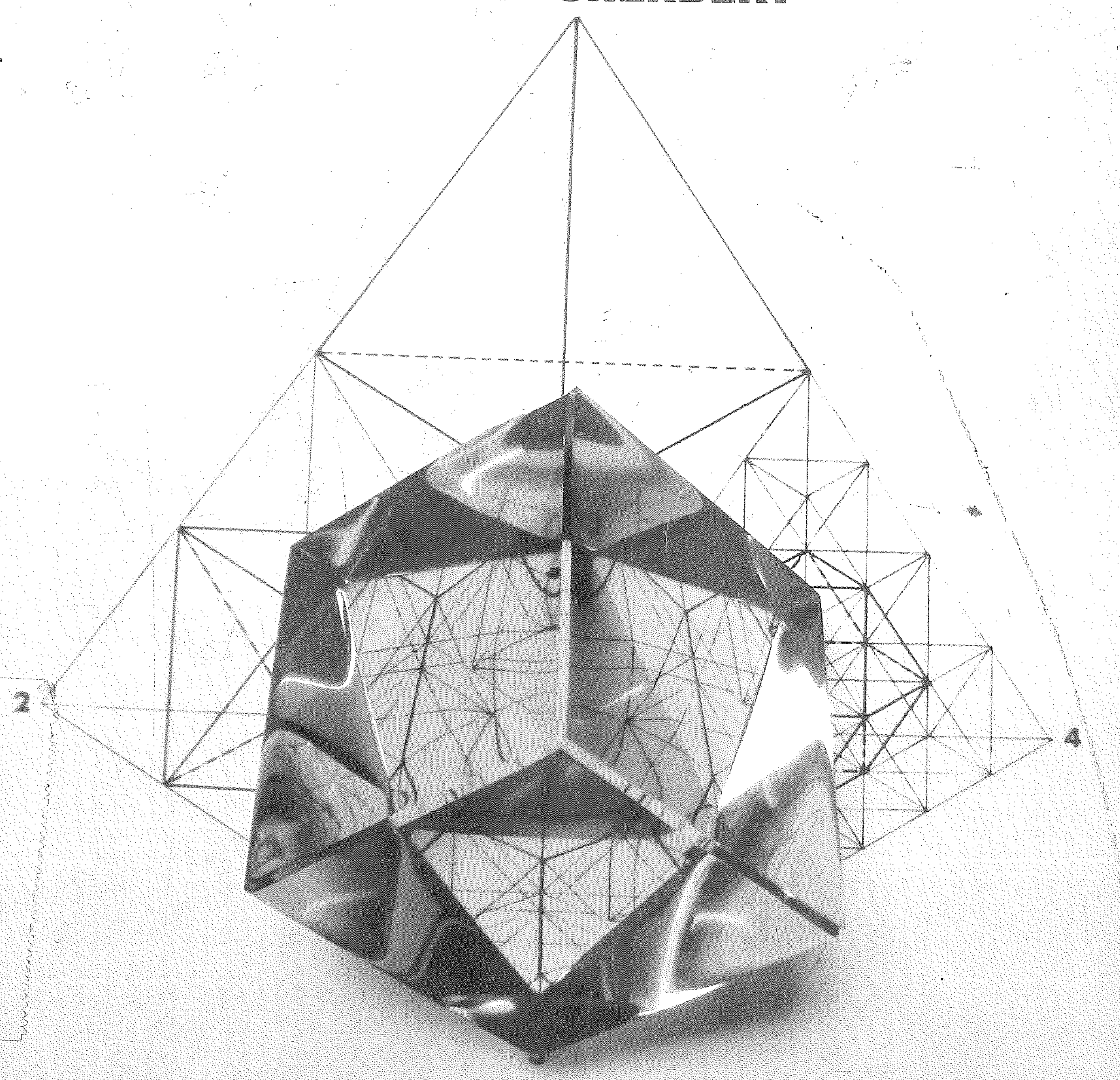


3ª edición

LIMUSA WILEY

Introducción al
ANÁLISIS MATEMÁTICO DE UNA VARIABLE

BARTLE - SHERBERT



3ª edición

LIMUSA WILEY

El análisis real no es un mero ejercicio de pensamiento abstracto, es el camino para trabajar con soltura conceptos que en un principio al estudiante pueden parecerle misteriosos.

El análisis real es una herramienta indispensable para quien pretende cursar estudios avanzados en matemática pura o aplicada. También es de gran valor para el estudiante de licenciatura que desee ir más allá del manejo mecánico de fórmulas para resolver problemas convencionales.

En años recientes las matemáticas han adquirido una nueva dimensión en áreas como economía, ciencias de la administración, ciencias físicas, ingeniería y ciencias de la computación. En este libro se presentan los conceptos y técnicas básicos del análisis real de una variable para los estudiantes en estas áreas. El curso persigue tres objetivos fundamentales: ayudar al estudiante a desarrollar un pensamiento deductivo, enseñarlo a analizar ejemplos complicados y a extrapolar los conceptos a un nuevo contexto.

Al igual que en las ediciones anteriores, en esta edición, corregida y aumentada, se ha procurado mantener un enfoque accesible para el lector. En esta nueva edición se han simplificado algunos argumentos, se reestructuraron algunos temas y se agregó un capítulo completamente nuevo sobre la integral de Riemann generalizada. Asimismo, en todo el libro se emplea ahora la notación convencional de los números reales.



GRUPO
NORIEGA EDITORES

limusa@noriegaeditores.com
www.noriega.com.mx

Introducción al análisis matemático de una variable

Tercera edición

Robert G. Bartle

Donald R. Sherbert

Eastern Michigan University, Ypsilanti

University of Illinois, Urbana-Champaign

LIMUSA WILEY

Bartle, Robert G.
Introducción al análisis matemático de una variable = Introduction to real analysis / Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert. -- 3a. Ed. -- México : Limusa Wiley, 2010
xiv; 486 p.: il., fot.; 24 x 19 cm.
ISBN: 978-607-05-0216-3
Incuye bibliografía
Rústica

1. Análisis matemático 2. Funciones de variable real
I. Sherbert, Donald R., coaut. II. Piña García, Rodolfo, tr.

Dewey: 515 | 22 / B2891i LC: QA300

COLABORADOR EN LA TRADUCCIÓN

RODOLFO PIÑA GARCÍA

GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
51 30 0700
55 12 2903
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM NÚM. 121

TERCERA EDICIÓN
HECHO EN MÉXICO
ISBN: 978-607-05-0216-3



A nuestras esposas, Carolyn y Janice,
con nuestro aprecio por su
paciencia, apoyo y amor.

PREFACIO

El estudio del análisis real es indispensable para quien pretende cursar estudios avanzados en matemática pura o aplicada. También es de gran valor para el estudiante de licenciatura que desee ir más allá del manejo mecánico de fórmulas para resolver problemas convencionales, pues le ayuda a desarrollar la capacidad para pensar deductivamente, analizar situaciones matemáticas y extrapolar las ideas a nuevos contextos. En años recientes, la matemática se ha convertido en un elemento de valor en áreas como economía y ciencia de la administración, ciencias físicas, ingeniería y ciencias de la computación. Nuestro objetivo es ofrecer un libro de texto accesible que poco a poco aumenta el grado de complejidad en el tratamiento de los conceptos y técnicas fundamentales del análisis real para los estudiantes de estas áreas. El libro está diseñado para estudiantes que hayan cursado cálculo en la forma convencional en que acostumbra impartirse esta materia. Aun cuando hay quienes encuentran desafiante su contenido, nuestra experiencia es que los estudiantes serios en este nivel son absolutamente capaces de dominar el material aquí presentado.

Las dos ediciones anteriores de este libro tuvieron una excelente acogida y nos hemos esmerado para mantener el mismo espíritu y el mismo acercamiento accesible para el lector. Al preparar esta edición, hemos examinado cada sección y grupo de ejercicios, agilizado los razonamientos, agregado algunos ejemplos nuevos, cambiado algunos temas de posición y hecho exhaustivas revisiones. Excepto por el nuevo capítulo 10, que trata la integral de Riemann generalizada, no se ha agregado mucho material nuevo. Aun cuando se incluye más material del que puede estudiarse en un semestre, quizá el maestro quiera usar ciertos temas como proyectos especiales o para créditos extras.

Es deseable que el estudiante haya tenido cierto contacto con demostraciones, pero no damos por hecho que éste sea el caso. A fin de apoyar al estudiante para analizar las demostraciones de teoremas, se incluye un apéndice sobre "Lógica y demostraciones" que examina temas como implicaciones, cuantificadores, negaciones, el contrapositivo y diferentes tipos de demostraciones. La exposición se ha mantenido en un nivel informal a fin de evitar quedar entrampados en los detalles técnicos de la lógica formal. En nuestra opinión, es una experiencia más provechosa aprender cómo construir demostraciones observando primero y haciendo después que leyendo acerca de las técnicas de demostración.

Hemos adoptado un nivel medio de generalidad de manera consistente a lo largo del libro: se presentan resultados que son lo suficientemente generales para cubrir los casos que surgen en la práctica, pero no nos afanamos para conseguir la máxima generalidad. En principio, procedemos de lo particular a lo general. Así, consideramos las funciones continuas en intervalos abiertos y cerrados en detalle, pero tenemos cuidado de presentar demostraciones que pueden adaptarse con facilidad para situaciones más generales. (En el capítulo 11 se obtiene un particular provecho de este enfoque.) Pensamos que es importante proporcionarle al estudiante muchos ejemplos que le ayuden en su aprendizaje; asimismo, compilamos unas listas bastante extensas de ejercicios que le plantearán retos. Aun cuando dejamos demostraciones rutinarias como ejercicios, no intentamos abreviar la exposición relegando a los ejercicios las demostraciones difíciles. Sin embargo, en algunas de las secciones al final del libro descomponemos un ejercicio moderadamente difícil en una sucesión de pasos.

En el capítulo 1 se presenta un breve resumen de las nociones y notaciones para conjuntos y funciones que usamos aquí. Asimismo, se incluye una discusión de la inducción matemática, ya que son frecuentes las demostraciones inductivas. Se incluye también una breve sección sobre conjuntos finitos, contables e infinitos. Se recomienda que este capítulo se estudie con rapidez o que se use como material de respaldo, para volver a él según sea necesario.

El capítulo 2 presenta las propiedades del sistema de los números reales $\mathbb{R}$. Las dos primeras secciones abordan las propiedades algebraicas y de orden, y ofrecen cierta práctica en la elaboración de demostraciones de resultados elementales. La propiedad crucial de completez se introduce en la sección 2.3 como la propiedad del supremo, y en el resto de este capítulo se discuten sus ramificaciones.

En el capítulo 3 se presenta un tratamiento completo de las sucesiones en $\mathbb{R}$ y de los conceptos asociados de límites. Este material es de la mayor importancia; por fortuna, los estudiantes lo encuentran bastante natural, aun cuando les toma algo de tiempo acostumbrarse cabalmente al uso de . En la nueva sección 3.7 se presenta una breve introducción a las series infinitas, por lo que este importante tema no debe omitirse por problemas de tiempo.

El capítulo 4, sobre límites de funciones, y el capítulo 5, sobre funciones continuas, constituyen la columna vertebral de este libro. La discusión de límites y continuidad se apoya en gran medida en el uso de sucesiones, y el enfoque estrechamente paralelo de estos capítulos refuerza la comprensión de estos temas esenciales. Las propiedades fundamentales de las funciones continuas (en intervalos) se tratan en las secciones 5.3 y 5.4. La noción de "medida" se introduce en la sección 5.5 y se usa para ofrecer demostraciones alternativas de estas propiedades. Las funciones monótonas se tratan en la sección 5.6.

La teoría básica de la derivada se presenta en la primera parte del capítulo 6. Este importante material es convencional, excepto porque se ha empleado un resultado de Carathéodory a fin de ofrecer demostraciones más simples de la regla de la cadena y del teorema de inversión. El resto de este capítulo consta de aplicaciones del teorema del valor medio y puede explorarse si el tiempo lo permite.

El capítulo 7, que trata la integral de Riemann, ha sido objeto de una revisión completa en esta edición. En vez de introducir integrales superiores e inferiores (como se hizo en las ediciones anteriores), aquí se define la integral como un lí-

mite de sumas de Riemann. Esto tiene la ventaja de que es consecuente con la exposición inicial de los estudiantes a la integral en cálculo y en las aplicaciones; puesto que no depende de las propiedades de orden, permite la generalización inmediata a funciones complejas y vectoriales que los estudiantes pueden encontrar en cursos posteriores. Contrario a la opinión popular, este enfoque de límites no es más difícil que el enfoque de orden. También es consecuente con la integral de Riemann generalizada, la cual se examina en detalle en el capítulo 10. La sección 7.4 presenta una breve discusión de los métodos numéricos comunes para calcular la integral de funciones continuas.

Las sucesiones de funciones y la convergencia uniforme se abordan en las dos primeras secciones del capítulo 8, y las funciones trascendentes básicas se colocan sobre una base firme en las secciones 8.3 y 8.4 mediante el uso de la convergencia uniforme. El capítulo 9 completa la discusión de las series infinitas. Los capítulos 8 y 9 son de suyo importantes, a la vez que muestran cómo puede aplicarse el material de los capítulos anteriores.

El capítulo 10 es completamente nuevo, presenta la integral de Riemann generalizada (también llamada integral de Henstock-Kurzweil). Para muchos estudiantes éste es un tema nuevo y creemos que les sorprenderá descubrir que una modificación en apariencia insignificante de la definición de la integral de Riemann puede llevarnos a una integral aún más general que la integral de Lebesgue. Creemos que este enfoque relativamente nuevo a la teoría de integración es accesible y al mismo tiempo interesante para quien ya conoce la integral de Riemann básica.

El capítulo 11 final trata conceptos topológicos. Las demostraciones dadas anteriormente para intervalos se amplían a un contexto más abstracto. Por ejemplo, se hace el énfasis apropiado en el concepto de compacidad y se introducen los espacios métricos. Este capítulo será de gran utilidad para los estudiantes que continúen estudios de posgrado en matemática.

A lo largo de este libro se ha prestado más atención de la usual a los temas de análisis numérico y teoría de aproximaciones. Se ha procedido así debido a la importancia de estas áreas y para mostrar que el análisis real no es un mero ejercicio de pensamiento abstracto.

Se han incluido prolijas listas de ejercicios, algunos sencillos y otros desafiantes. En muchos de estos ejercicios se proporcionan "sugerencias" a fin de encaminar al estudiante hacia la solución o verificación de su "respuesta".

Es muy satisfactorio ver cómo aumenta la madurez matemática de los estudiantes y cómo gradualmente aprenden a trabajar con soltura conceptos que en un principio parecían misteriosos. Pero es indudable que se requiere mucho trabajo arduo para ello por parte tanto de estudiantes como de maestros.

A fin de enriquecer la perspectiva histórica del libro, se incluyen breves semblanzas biográficas de algunos matemáticos famosos que hicieron sus aportaciones en esta área. Tenemos una deuda particular con el doctor Patrick Muldowney por facilitarnos la fotografía de los profesores Henstock y Kurzweil. Agradecemos asimismo a Wiley por conseguir las fotografías del resto de los matemáticos.

Hemos recibido muchos comentarios valiosos de colegas de una amplia variedad de instituciones, quienes han impartido el curso utilizando las ediciones anteriores y a quienes les agradó el libro lo suficiente para expresar sus opiniones acerca de cómo mejorarlo. Apreciamos sus observaciones y sugerencias, aun

cuando no siempre seguimos sus consejos. Les agradecemos por comunicarse con nosotros y les deseamos lo mejor en su empeño por impartir el reto y la emoción de aprender análisis real y matemática "real". Esperamos que encuentren esta nueva edición aún más provechosa que las anteriores.

Ypsilanti y Urbana

Robert G. Bartle
Donald R. Sherbert

EL ALFABETO GRIEGO					
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicrón
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Épsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ípsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Ji
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

CONTENIDO

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo inicial se presentan los conocimientos previos necesarios para el estudio del análisis real. La sección 1.1 consiste en un breve repaso de las operaciones con conjuntos y de funciones, dos herramientas vitales para las matemáticas en general. En ella se establece la notación y se enuncian las definiciones y las propiedades básicas que se usarán a lo largo del libro. El término "conjunto" se considera sinónimo de "clase", "colección" y "familia", pero estos términos no se definen ni se presenta una lista de axiomas para la teoría de conjuntos. Este enfoque pragmático, al que suele hacerse referencia como teoría básica de conjuntos, resulta bastante adecuado para trabajar con conjuntos en el contexto del análisis real.

La sección 1.2 se ocupa de un método especial de demostración llamado inducción matemática. Se relaciona con las propiedades básicas del sistema de los números naturales y, aunque se encuentra restringido a la demostración de proposiciones de tipos particulares, es importante y su aplicación es frecuente. En el apéndice A se incluye una discusión informal de los diferentes tipos de demostraciones que se usan en matemáticas, como el contrapositivo y las demostraciones por reducción al absurdo.

En la sección 1.3 se aplican algunas de las herramientas presentadas en las dos primeras secciones de este capítulo a fin de analizar lo que significa que un conjunto sea finito o infinito. Se presentan definiciones precisas y se deducen algunas consecuencias básicas de estas definiciones. Se establece asimismo el importante resultado de que el conjunto de los números racionales es contablemente infinito.

Además de introducir los conceptos básicos y de establecer la notación y la terminología, este capítulo también proporciona al lector cierta experiencia inicial para trabajar con definiciones precisas y hacer demostraciones. El estudio atento del análisis real implica de manera inevitable la lectura y construcción de demostraciones, habilidades que, como cualquier otra, es necesario practicar. El presente capítulo es un punto de partida.

SECCIÓN 1.1 Conjuntos y funciones

Para el lector: En esta sección se presenta un breve repaso de la terminología y la notación que se usará en el libro. Se sugiere una lectura rápida y volver a ella más tarde cuando necesite recordar el significado de un término o símbolo.

Si un elemento x está en un conjunto A, se escribe

$$x \in A$$

y se dice que x es **miembro** de A, o que x **pertenece** a A. Si x *no* está en A, se escribe

$$x \notin A.$$

Si todos los elementos del conjunto A pertenecen también al conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** de B y se escribe

$$A \subseteq B \qquad \text{o} \qquad B \supseteq A.$$

Se dice que un conjunto A es un **subconjunto propio** de un conjunto B si $A \subseteq B$, pero hay al menos un elemento de B que no está en A. En este caso, en ocasiones se escribe

$$A \subset B.$$

1.1.1 Definición Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, si contienen los mismos elementos.

Así, para demostrar que los conjuntos A y B son iguales, debe probarse que

$$A \subseteq B \qquad \text{y} \qquad B \subseteq A.$$

Por lo general, un conjunto puede definirse ya sea enlistando sus elementos explícitamente o especificando una propiedad que determine los elementos del conjunto. Si P denota una propiedad que tenga sentido y no sea ambigua para los elementos de un conjunto S, entonces se escribe

$$\{x \in S : P(x)\}$$

para el conjunto de todos los elementos x en S para los cuales se cumple la propiedad P. Si el conjunto S se sobreentiende por el contexto, entonces con frecuencia se omite esta notación.

A lo largo de este libro se usan varios conjuntos particulares que se denotan por símbolos convencionales, como se indica a continuación. (Se usará el símbolo $:=$ para significar que el símbolo de la izquierda *se define* por el símbolo de la derecha.)

- El conjunto de los **números naturales** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$,
- El conjunto de los **enteros** $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$,
- El conjunto de los **números racionales** $\mathbb{Q} := \{m/n : m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$,
- El conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es de importancia fundamental aquí y se examina en detalle en el capítulo 2.

1.1.2 Ejemplos **a)** El conjunto

$$\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

consiste en los números naturales que satisfacen la ecuación enunciada. Puesto que las únicas soluciones de esta ecuación cuadrática son $x = 1$ y $x = 2$, este conjunto puede denotarse de manera más simple por $\{1, 2\}$.

b) Un número natural n es **par** si tiene la forma $n = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. El conjunto de los números naturales pares puede escribirse

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\},$$

que es una expresión menos engorrosa que $\{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Del mismo modo, el conjunto de los números naturales **impares** puede escribirse

$$\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}. \qquad \square$$

Operaciones con conjuntos

Se definen ahora los métodos para obtener conjuntos nuevos a partir de conjuntos dados. Adviértase que estas operaciones con conjuntos se basan en el significado de las palabras "o", "y" y "no". Para la unión, es importante tener presente el hecho de que la palabra "o" se usa en el *sentido inclusivo*, lo cual deja abierta la posibilidad de que x pertenezca a ambos conjuntos. En la terminología jurídica, este sentido inclusivo se indica en ocasiones por "y/o".

1.1.3 Definición **a)** La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

b) La **intersección** de los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

c) El **complemento de** B **con respecto a** A es el conjunto

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

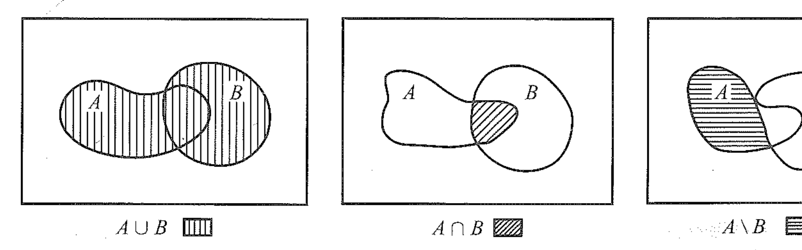


Figura 1.1.1 a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$

El conjunto que no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota por el símbolo $\emptyset$. Se dice que dos conjuntos A y B son **disjuntos** si no tienen elementos en común, lo cual puede expresarse escribiendo $A \cap B = \emptyset$.

A fin de ilustrar el método empleado para demostrar igualdades de conjuntos, se establece enseguida una de las *leyes de DeMorgan* para tres conjuntos. La demostración de la otra ley se deja como ejercicio.

1.1.4 Teorema *Si* A, B *y* C *son conjuntos, entonces*

a) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$,
b) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Demostración. Para demostrar el inciso a), se probará que todo elemento de $A \backslash (B \cup C)$ está contenido tanto en $(A \backslash B)$ como en $(A \backslash C)$, y recíprocamente.

Si x está en $A \backslash (B \cup C)$, entonces x está en A pero no está en $B \cup C$. Por tanto, x está en A, pero no está en B ni en C. En consecuencia, x está en A pero no en B, y x está en A pero no en C. Por tanto, $x \in A \backslash B$ y $x \in A \backslash C$, con lo cual se demuestra que $x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Recíprocamente, si $x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$, entonces $x \in (A \backslash B)$ y $x \in (A \backslash C)$. En consecuencia, $x \in A$, y ambos $x \notin B$ y $x \notin C$. Por lo tanto, $x \in A$ y $x \notin (B \cup C)$, de donde $x \in A \backslash (B \cup C)$.

Puesto que los conjuntos $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ y $A \backslash (B \cup C)$ contienen los mismos elementos, son iguales por la definición 1.1.1. Q.E.D.

Hay ocasiones en que es conveniente formar uniones e intersecciones de más de dos conjuntos. Para una colección finita de conjuntos $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, su unión es el conjunto A que consta de todos los elementos que pertenecen a *al menos uno* de los conjuntos A_k, y su intersección consta de todos los elementos que pertenecen a *todos* los conjuntos A_k.

Lo anterior se hace extensivo a una colección infinita de conjuntos $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$ como sigue. Su **unión** es el conjunto de los elementos que pertenecen a *al menos uno* de los conjuntos A_n. En este caso se escribe

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \left\{ x : x \in A_n \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Del mismo modo, su **intersección** es el conjunto de los elementos que pertenecen a *todos* los conjuntos A_n. En este caso se escribe

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \left\{ x : x \in A_n \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Productos cartesianos

A fin de discutir las funciones, se define el producto cartesiano de dos conjuntos.

1.1.5 Definición Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces el **producto cartesiano** $A \times B$ de A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Esto es,

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Por tanto, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 5\}$, entonces $A \times B$ es el conjunto cuyos elementos son los pares ordenados

$$(1, 1), \quad (1, 5), \quad (2, 1), \quad (2, 5), \quad (3, 1), \quad (3, 5).$$

El conjunto $A \times B$ puede representarse como el conjunto de los seis puntos del plano con las coordenadas que acaban de enumerarse.

Es común trazar un diagrama (como el de la figura 1.1.2) para indicar el producto cartesiano de dos conjuntos A y B. Sin embargo, es necesario tener presente que este diagrama puede ser una simplificación. Por ejemplo, si $A := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ y $B := \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1 \text{ o } 2 \leq y \leq 3\}$, entonces, en vez de un rectángulo, se tendría un trazo como el de la figura 1.1.3.

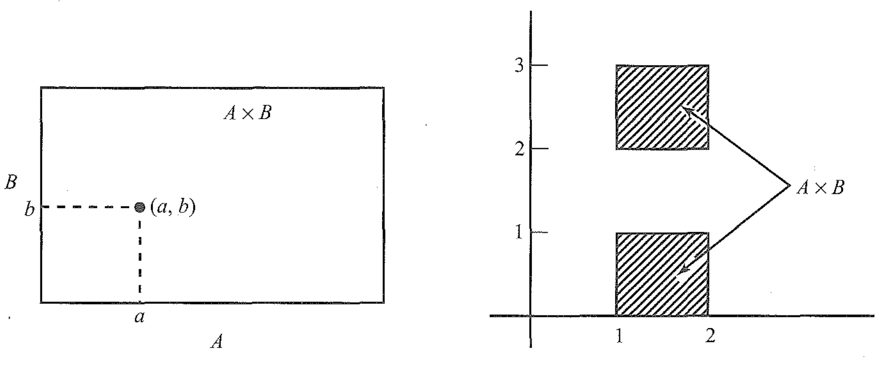


Figura 1.1.2 **Figura 1.1.3**

Se discute ahora la noción fundamental de *función* o *mapeo*.

Para el matemático de principios del siglo XIX, el término "función" significaba una fórmula definida, tal como $f(x) := x^2 + 3x - 5$, que asocia a cada número real x otro número $f(x)$. (Aquí, $f(0) = -5$, $f(1) = -1$, $f(5) = 35$.) Esta forma de entender una función excluía el caso de fórmulas diferentes en intervalos diferentes, por lo que las funciones no podían definirse "por partes".

A medida que se desarrollaron las matemáticas, llegó a ser claro que sería de utilidad una definición más general de "función". También llegó a ser evidente la importancia de hacer una clara distinción entre la función en sí y los valores de la misma. Una definición revisada sería:

> Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que le asigna a cada x de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B.

Pero sin importar lo sugerente que pueda resultar la definición propuesta, presenta la dificultad de interpretar la frase "regla de correspondencia". A fin de clarificarla, la definición se expresa por completo en términos de conjuntos; de hecho, una función se definirá como su **gráfica**. Aun cuando tiene la desventaja de ser un tanto artificial, presenta la ventaja de no ser ambigua y de ser más clara.

1.1.6 Definición Sean A y B conjuntos. Entonces una **función** de A a B es un conjunto f de pares ordenados en $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe una $b \in B$ única con $(a, b) \in f$. (En otras palabras, si $(a, b) \in f$ y $(a, b') \in f$, entonces $b = b'$.)

Al conjunto A de los elementos que pueden figurar como primer componente de una función f se le llama **dominio** de f y suele denotarse como $D(f)$. Al conjunto de todos los elementos de B que pueden figurar como segundo componente de f se le llama el **codominio** de f y suele denotarse por $R(f)$. Obsérvese que, aunque $D(f) = A$, sólo puede tenerse $R(f) \subseteq B$. (Véase la figura 1.1.4.)

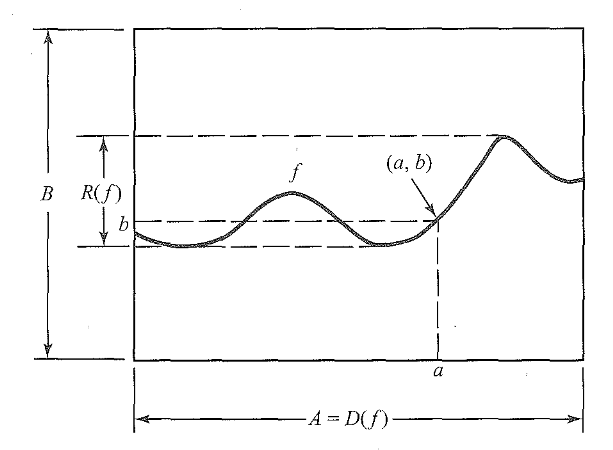


Figura 1.1.4 Una función como una gráfica.

A la condición esencial de que:

$$(a, b) \in f \quad \text{y} \quad (a, b') \in f \quad \text{implica que} \quad b = b'$$

se le llama en ocasiones *criterio de la recta vertical*. En términos geométricos, establece que cualquier recta vertical $x = a$ con $a \in A$ corta la gráfica de f exactamente una vez.

La notación

$$f : A \to B$$

suele usarse para indicar que f es una función de A a B. Se dirá también que f es un **mapeo** de A en B o que f **mapea** A en B. Si (a, b) es un elemento de f, se acostumbra escribir

$$b = f(a) \quad \text{o en ocasiones} \quad a \mapsto b.$$

Si $b = f(a)$, con frecuencia se hace referencia a b como el **valor** de f en a, o como la **imagen** de a bajo f.

Transformaciones y máquinas

Además de usar gráficas, una función puede visualizarse como una *transformación* del conjunto $D(f) = A$ en el conjunto $R(f) \subseteq B$. En esta perspectiva, cuando $(a, b) \in f$, f se concibe como si tomara el elemento a de A y lo "transformara" o "mapeara" en un elemento $b = f(a)$ de $R(f) \subseteq B$. Es común dibujar un diagrama como el de la figura 1.1.5, aun cuando los conjuntos A y B no son subconjuntos del plano.

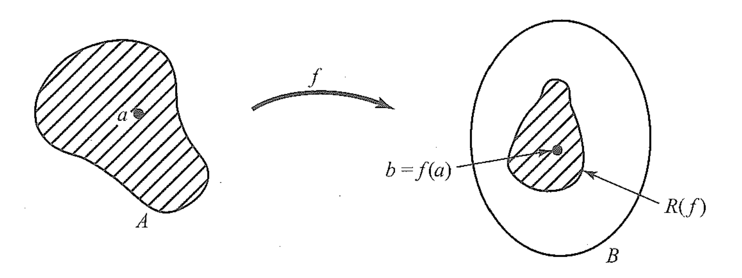


Figura 1.1.5 Una función como una transformación.

Hay otra manera de visualizar una función, a saber, como una *máquina* que acepta elementos de $D(f) = A$ como *entradas* y produce los elementos correspondientes de $R(f) \subseteq B$ como *salidas*. Si se toma un elemento $x \in D(f)$ y se alimenta en f, entonces se obtiene el valor correspondiente $f(x)$. Si se alimenta un elemento diferente $y \in D(f)$ en f, entonces se obtiene $f(y)$, que puede o no ser diferente de $f(x)$. Si se intenta introducir en f algo que no pertenezca a $D(f)$, se encontrará que no es aceptado, ya que f sólo puede operar con elementos que pertenecen a $D(f)$. (Véase la figura 1.1.6.)

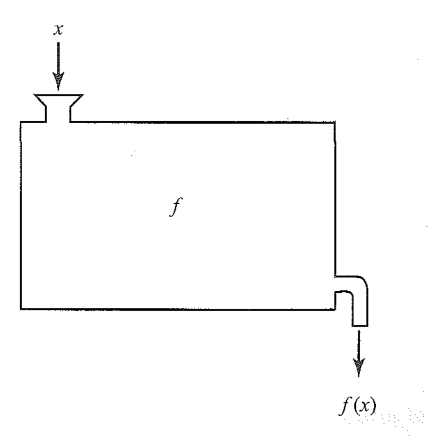


Figura 1.1.6 Una función como una máquina.

Esta última visualización clarifica la diferencia entre f y $f(x)$: la primera es la máquina en sí, la segunda es la salida producida por la máquina f cuando se alimenta con x. Aun cuando seguramente nadie confundiría un molino de carne con la carne molida, tantas personas han confundido las funciones con sus valores que bien vale la pena hacer un modesto esfuerzo para distinguir entre ambos conceptos por su notación.

Imágenes directa e inversa

Sea $f : A \to B$ una función con dominio $D(f) = A$ y codominio $R(f) \subseteq B$.

1.1.7 Definición Si E es un subconjunto de A, entonces la **imagen directa** de E bajo f es el subconjunto $f(E)$ de B dado por

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}.$$

Si H es un subconjunto de B, entonces la **imagen inversa** de H bajo f es el subconjunto $f^{-1}(H)$ de A dado por

$$f^{-1}(H) := \{x \in A : f(x) \in H\}.$$

Observación La notación $f^{-1}(H)$ usada en este contexto tiene sus desventajas. Sin embargo, se usará pues es la notación convencional.

Así, si se tiene un conjunto $E \subseteq A$, entonces un punto $y_1 \in B$ está en la imagen directa $f(E)$ si y sólo si existe al menos un punto $x_1 \in E$ tal que $y_1 = f(x_1)$. Del mismo modo, dado un conjunto $H \subseteq B$, un punto x_2 está en la imagen inversa $f^{-1}(H)$ si y sólo si $y_2 := f(x_2)$ está en H. (Véase la figura 1.1.7.)

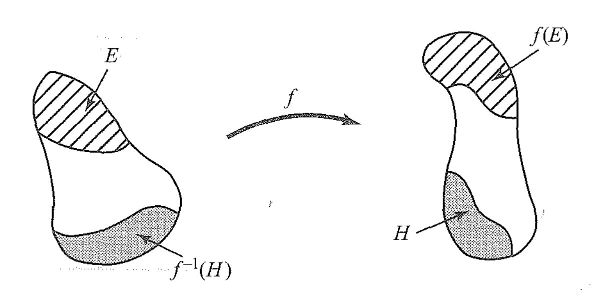


Figura 1.1.7 Imágenes directa e inversa.

1.1.8 Ejemplos **a)** Sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x^2$. Entonces, la imagen directa del conjunto $E := \{x : 0 \le x \le 2\}$ es el conjunto $f(E) = \{y : 0 \le y \le 4\}$.

Si $G := \{y : 0 \le y \le 4\}$, entonces el conjunto $f^{-1}(G) = \{x : -2 \le x \le 2\}$ es la imagen inversa de G. Así, en este caso, se observa que $f^{-1}(f(E)) \ne E$.

Por otra parte, se tiene $f(f^{-1}(G)) = G$. Pero si $H := \{y : -1 \le y \le 1\}$, entonces se obtiene $f(f^{-1}(H)) = \{y : 0 \le y \le 1\} \ne H$.

Un trazo de la gráfica de f puede ayudar a visualizar estos conjuntos.

b) Sea $f: A \to B$ y sean G y H subconjuntos de B. Se demostrará que

$$f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H).$$

En efecto, si $x \in f^{-1}(G \cap H)$, entonces $f(x) \in G \cap H$, de donde $f(x) \in G$ y $f(x) \in H$. Pero esto implica que $x \in f^{-1}(G)$ y que $x \in f^{-1}(H)$, de donde $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$. Por tanto, la implicación enunciada queda demostrada. [También se cumple la inclusión en el otro sentido, por lo que en realidad se ha establecido la igualdad entre ambos conjuntos; véase el ejercicio 13.] □

En los ejercicios se presentan otros hechos acerca de las imágenes directas e inversas.

Tipos especiales de funciones

En las definiciones siguientes se identifican algunos tipos de funciones que son muy importantes.

1.1.9 Definición Sea $f: A \to B$ una función de A a B.

a) Se dice que la función f es **inyectiva** (o **uno a uno**) si siempre que $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si f es una función inyectiva, se dice también que f es una **inyección**.

b) Se dice que la función f es **suprayectiva** (o que mapea A **en** B) si $f(A) = B$; es decir, si el codominio $R(f) = B$. Si f es una función suprayectiva, se dice también que f es una **suprayección**.

c) Si f es tanto inyectiva como suprayectiva, entonces se dice que f es **biyectiva**. Si f es biyectiva, se dice también que f es una **biyección**.

- A fin de demostrar que una función f es inyectiva, debe establecerse que:

  para toda x_1, x_2 en A, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

  Para ello, se supone que $f(x_1) = f(x_2)$ y se demuestra que $x_1 = x_2$.

  [En otras palabras, la gráfica de f satisface el *primer criterio de la recta horizontal:* cualquier recta horizontal $y = b$ con $b \in B$ corta la gráfica de f en *a lo sumo* un punto.]

- Para demostrar que una función f es suprayectiva, debe probarse que para cualquier $b \in B$ existe al menos una $x \in A$ tal que $f(x) = b$.

  [En otras palabras, la gráfica de f satisface el *segundo criterio de la recta horizontal:* cualquier recta horizontal $y = b$ con $b \in B$ corta la gráfica de f en *al menos* un punto.]

1.1.10 Ejemplo Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ y se define $f(x) := 2x/(x-1)$ para toda $x \in A$. Para demostrar que f es inyectiva, se toman x_1 y x_2 en A y se supone que $f(x_1) = f(x_2)$. Se tiene, por tanto,

$$\frac{2x_1}{x_1 - 1} = \frac{2x_2}{x_2 - 1},$$

lo que implica que $x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1)$, de donde $x_1 = x_2$. Por consiguiente, f es inyectiva.

Para determinar el codominio de f, se resuelve la ecuación $y = 2x/(x-1)$ para x en términos de y. Se obtiene $x = y/(y-2)$, que es válida para $y \neq 2$. Así, el codominio de f es el conjunto $B := \{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$. Por tanto, f es una biyección de A sobre B. □

Funciones inversas

Si f es una función de A a B, entonces f es un subconjunto especial de $A \times B$ (a saber, uno que cumple con el *criterio de la recta vertical*). El conjunto de pares ordenados en $B \times A$ que se obtienen al intercambiar los miembros de los pares ordenados en f por lo general no es una función. (Es decir, el conjunto f puede no cumplir con *los dos criterios de la recta horizontal* a la vez.) Sin embargo, si f es una biyección, entonces este intercambio lleva a una función, llamada la "función inversa" de f.

1.1.11 Definición Si $f : A \to B$ es una biyección de A sobre B, entonces

$$g := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

es una función de B en A. A esta función se le llama la **función inversa** de f y se denota por f^{-1}. A la función f^{-1} también se le llama la **inversa** de f.

La relación entre f y su inversa f^{-1} también puede expresarse advirtiendo que $D(f) = R(f^{-1})$ y $R(f) = D(f^{-1})$ y que

$$b = f(a) \quad \text{si y sólo si} \quad a = f^{-1}(b).$$

Por ejemplo, en el ejemplo 1.1.10 se vio que la función

$$f(x) := \frac{2x}{x-1}$$

es una biyección de $A := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ sobre el conjunto $B := \{y \in \mathbb{R} : y \neq 2\}$. La función inversa de f está dada por

$$f^{-1}(y) := \frac{y}{y-2} \quad \text{para} \quad y \in B.$$

Observación En la definición 1.1.7 se introdujo la notación $f^{-1}(H)$. Tiene sentido incluso si f no tiene una función inversa. Sin embargo, si la función inversa f^{-1} existe, entonces $f^{-1}(H)$ es la imagen directa del conjunto $H \subseteq B$ bajo f^{-1}.

Composición de funciones

Es frecuente la necesidad de hacer la "composición" de dos funciones f, g encontrando primero $f(x)$ y aplicando después g para obtener $g(f(x))$; sin embargo, esto sólo es posible cuando $f(x)$ pertenece al dominio de g. A fin de poder hacer esto para *toda* $f(x)$, debe suponerse que el codominio de f está contenido en el dominio de g. (Véase la figura 1.1.8.)

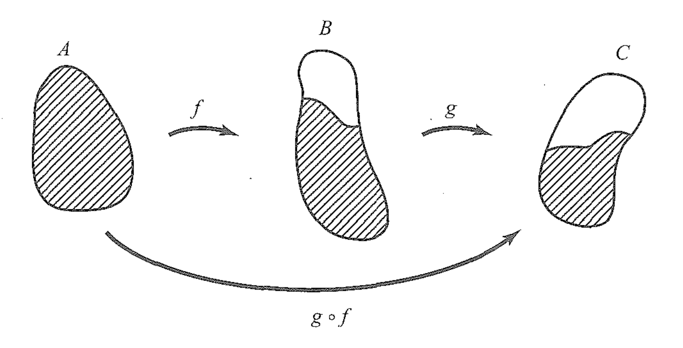


Figura 1.1.8 La composición de f y g.

1.1.12 Definición Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, y si $R(f) \subseteq D(g) = B$, entonces la **función compuesta** $g \circ f$ (¡adviértase el orden!) es la función de A a C definida por

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{para toda} \quad x \in A.$$

1.1.13 Ejemplos **a)** Debe observarse con atención el orden de la composición. En efecto, sean f y g las funciones cuyos valores para $x \in \mathbb{R}$ están dados por

$$f(x) := 2x \qquad \text{y} \qquad g(x) := 3x^2 - 1.$$

Puesto que $D(g) = \mathbb{R}$ y $R(f) \subseteq \mathbb{R} = D(g)$, entonces el dominio $D(g \circ f)$ también es igual a $\mathbb{R}$, y la función compuesta $g \circ f$ está dada por

$$(g \circ f)(x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1.$$

Por otra parte, el dominio de la función compuesta $f \circ g$ también es $\mathbb{R}$, pero

$$(f \circ g)(x) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2.$$

Así, en este caso, se tiene $g \circ f \neq f \circ g$.

b) Al considerar $g \circ f$, debe tenerse cuidado de verificar que el codominio de f esté contenido en el dominio de g. Por ejemplo, si

$$f(x) := 1 - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) := \sqrt{x},$$

entonces, ya que $D(g) = \{x : x \geq 0\}$, la función compuesta $g \circ f$ está dada por la fórmula

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

sólo para las $x \in D(f)$ que satisfacen $f(x) \geq 0$; es decir, para las x que satisfacen $-1 \leq x \leq 1$.

Se observa que si se invierte el orden, entonces la composición $f \circ g$ está dada por la fórmula

$$(f \circ g)(x) = 1 - x,$$

pero sólo para las x que están en el dominio $D(g) = \{x : x \geq 0\}$. □

Se presenta ahora la relación entre las funciones compuestas y las imágenes inversas. La demostración se deja como un ejercicio ilustrativo.

1.1.14 Teorema *Sean* f : A → B *y* g : B → C *funciones, y sea* H *un subconjunto de* C. *Entonces se tiene*

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)).$$

Adviértase la *inversión* en el orden de las funciones.

Restricciones de funciones

Si $f : A \to B$ es una función y si $A_1 \subset A$, puede definirse una función $f_1 : A_1 \to B$ por

$$f_1(x) := f(x) \quad \text{para} \quad x \in A_1.$$

A la función f_1 se le llama la **restricción de f a A_1**. En ocasiones esto se denota por $f_1 = f|A_1$.

Al lector podría parecerle extraño que alguien decidiera descartar una parte de una función, pero hay buenas razones para hacerlo. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la **función cuadrática**:

$$f(x) := x^2 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces f no es inyectiva, por lo que no puede tener una función inversa. Sin embargo, si f se restringe al conjunto $A_1 := \{x : x \geq 0\}$, entonces la restricción $f|A_1$ es una biyección de A_1 sobre A_1. Por lo tanto, esta restricción tiene una función inversa, que es la **función raíz cuadrada positiva**. (Trace una gráfica.)

Del mismo modo, las funciones trigonométricas $S(x) := \text{sen}\, x$ y $C(x) := \cos x$ no son inyectivas en la totalidad de $\mathbb{R}$. Sin embargo, al establecer las restricciones adecuadas de estas funciones pueden obtenerse las funciones **seno inverso** y **coseno inverso** que sin lugar a dudas el lector habrá encontrado ya.

Ejercicios de la sección 1.1

1. Si A y B son conjuntos, demostrar que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

2. Demostrar la segunda ley de De Morgan [teorema 1.1.4b].

3. Demostrar las leyes distributivas:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto D de todos los elementos que pertenecen ya sea a A o a B pero no a ambos. Representar D con un diagrama.

a) Demostrar que $D = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
b) Demostrar que D también está dado por $D = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

5. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$.

a) ¿Cuál es $A_1 \cap A_2$?
b) Determinar los conjuntos $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6. Dibuje los diagramas en el plano del producto cartesiano $A \times B$ para los conjuntos A y B dados.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 2 \text{ o } 3 \le x \le 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 \text{ o } x = 2\}$.
b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 3\}$.

7. Sea $A := B := \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\}$ y considerar el subconjunto $C := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ de $A \times B$. ¿Este conjunto es una función? Explicar la respuesta.

8. Sea $f(x) := 1/x^2$, $x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinar la imagen directa $f(E)$, donde $E := \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 2\}$.
b) Determinar la imagen inversa $f^{-1}(G)$, donde $G := \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 4\}$.

9. Sean $g(x) := x^2$ y $f(x) := x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$, y sea h la función compuesta $h := g \circ f$.

a) Encontrar la imagen directa $h(E)$ de $E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$.
b) Encontrar la imagen inversa $h^{-1}(G)$ de $G := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 4\}$.

10. Sea $f(x) := x^2$ para $x \in \mathbb{R}$ y sean $E := \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 0\}$ y $F := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$. Hay que demostrar que $E \cap F = \{0\}$ y $f(E \cap F) = \{0\}$, al tiempo que $f(E) = f(F) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \le y \le 1\}$. Por consiguiente, $f(E \cap F)$ es un subconjunto propio de $f(E) \cap f(F)$. ¿Qué ocurre si se suprime el 0 de los conjuntos E y F?

11. Sean f y E, F como en el ejercicio 10. Encontrar los conjuntos $E\backslash F$ y $f(E)\backslash f(F)$ y demostrar que *no* es verdadero que $f(E\backslash F) \subseteq f(E)\backslash f(F)$.

12. Demostrar que si $f : A \to B$ y E, F son subconjuntos de A, entonces $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ y $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$.

13. Demostrar que si $f : A \to B$ y G, H son subconjuntos de B, entonces $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

14. Demostrar que la función f definida por $f(x) := x/\sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\{y : -1 < y < 1\}$.

15. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, encontrar una biyección explícita de $A := \{x : a < x < b\}$ sobre $B := \{y : 0 < y < 1\}$.

16. Dar un ejemplo de dos funciones f, g de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f \neq g$, pero tales que $f \circ g = g \circ f$.

17. a) Demostrar que si $f : A \to B$ es inyectiva y $E \subseteq A$, entonces $f^{-1}(f(E)) = E$. Dar un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si f no es inyectiva.

b) Demostrar que si $f : A \to B$ es suprayectiva y $H \subseteq B$, entonces $f(f^{-1}(H)) = H$. Dar un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si f no es suprayectiva.

18. a) Suponer que f es una inyección. Demostrar que $f^{-1} \circ f(x) = x$ para toda $x \in D(f)$ y que $f \circ f^{-1}(y) = y$ para toda $y \in R(f)$.

b) Si f es una biyección de A sobre B, demostrar que f^{-1} es una biyección de B sobre A.

19. Demostrar que si $f : A \to B$ es biyectiva y $g : B \to C$ es biyectiva, entonces $g \circ f$ es un mapeo biyectivo de A sobre C.

20. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

a) Demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

b) Demostrar que si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

21. Demostrar el teorema 1.1.14.

22. Sean f, g funciones tales que $(g \circ f)(x) = x$ para toda $x \in D(f)$ y $(f \circ g)(y) = y$ para toda $y \in D(g)$. Demostrar que $g = f^{-1}$.

SECCIÓN 1.2 Inducción matemática

La inducción matemática es un poderoso método de demostración que se usa con frecuencia para establecer la validez de proposiciones que se expresan en términos de números naturales. Aun cuando su utilidad se encuentra restringida a este contexto bastante especial, la inducción matemática es una herramienta indispen-

sable en todas las ramas de las matemáticas. Puesto que muchas demostraciones por inducción siguen las mismas líneas formales de argumentación, con frecuencia sólo se indicará que un resultado se sigue por inducción matemática, dejando que sea el lector quien aporte los detalles necesarios. En esta sección se enunciará el principio de inducción matemática y se ofrecerán varios ejemplos para ilustrar la manera en que se llevan a cabo las demostraciones por inducción.

Se dará por sentado que el lector se encuentra familiarizado con el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\},$$

con las operaciones aritméticas básicas de adición y multiplicación y el significado de que un número natural sea menor que otro. Se supondrá, asimismo, la siguiente propiedad fundamental de $\mathbb{N}$.

1.2.1 La propiedad del buen orden de $\mathbb{N}$ *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento menor.*

Una enunciación más detallada de esta propiedad es la siguiente: si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y si $S \neq \emptyset$, entonces existe $m \in S$ tal que $m \leq k$ para toda $k \in S$.

Con base en la propiedad del buen orden, se derivará una versión del principio de inducción matemática expresado en términos de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

1.2.2 Principio de inducción matemática *Sea* S *un subconjunto de* $\mathbb{N}$ *que tenga las dos propiedades:*

1) *El número* $1 \in \mathrm{S}$.
2) *Para toda* $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$, *si* $\mathrm{k} \in \mathrm{S}$, *entonces* $\mathrm{k} + 1 \in \mathrm{S}$.

Entonces se tiene $\mathrm{S} = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponer por el contrario que $S \neq \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $\mathbb{N}\backslash S$ es no vacío y en consecuencia, por la propiedad del buen orden, contiene un elemento menor m. Puesto que $1 \in S$ por la hipótesis 1), se sabe que $m > 1$. Pero esto implica que $m - 1$ también es un número natural. Puesto que $m - 1 < m$ y m es el elemento menor en $\mathbb{N}$ tal que $m \notin S$, se concluye que $m - 1 \in S$.

Se aplica ahora la hipótesis 2) al elemento $k := m - 1$ de S, para inferir que $k + 1 = (m - 1) + 1 = m$ pertenece a S. Pero esta afirmación contradice el hecho de que $m \notin S$. Puesto que m se obtuvo a partir del supuesto de que $\mathbb{N}\backslash S$ es no vacío, se ha llegado a una contradicción. Por lo tanto, se ha demostrado que $S = \mathbb{N}$. Q.E.D.

El principio de inducción matemática suele exponerse en el contexto de propiedades o proposiciones relativas a números naturales. Si $P(n)$ es una proposición plausible acerca de $n \in \mathbb{N}$, entonces $P(n)$ puede ser verdadera para algunos valores de n y falsa para otros. Por ejemplo, si $P_1(n)$ es la proposición: "$n^2 = n$", entonces $P_1(1)$ es verdadera, en tanto que $P_1(n)$ es falsa para toda $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $P_2(n)$ es la proposición: "$n^2 > 1$", entonces $P_2(1)$ es falsa, en tanto que $P_2(n)$ es verdadera para toda $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

En este contexto, el principio de inducción matemática puede formularse de la manera siguiente.

Para cada n $\in \mathbb{N}$, *sea* P(n) *una proposición acerca de* n. *Suponer que:*

1′) P(1) *es verdadera.*
2′) *Para cualquier* k $\in \mathbb{N}$, *si* P(k) *es verdadera, entonces* P(k + 1) *es verdadera.*

Entonces P(n) *es verdadera para toda* n $\in \mathbb{N}$.

La vinculación con la versión precedente de la inducción matemática, dada en 1.2.2, se consigue haciendo $S := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadera}\}$. Entonces las condiciones 1) y 2) de 1.2.2 corresponden exactamente con las condiciones 1′) y 2′), respectivamente. La conclusión de que $S = \mathbb{N}$ en 1.2.2 corresponde con la conclusión de que $P(n)$ es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

Al supuesto "si $P(k)$ es verdadera" de 2′) se le llama la **hipótesis de inducción**. Al establecer 2′), no nos preocupamos por la veracidad o la falsedad de $P(k)$, sino sólo por la validez de la implicación "si $P(k)$, entonces $P(k+1)$". Por ejemplo, si se consideran las proposiciones $P(n)$: "$n = n + 5$", entonces 2′) es lógicamente correcta, ya que simplemente puede sumarse 1 en ambos miembros de $P(k)$ para obtener $P(k+1)$. Sin embargo, dado que la proposición $P(1)$: "$1 = 6$" es falsa, no es posible usar la inducción matemática para concluir que $n = n + 5$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Puede ocurrir que las proposiciones $P(n)$ sean falsas para ciertos números naturales pero después sean verdaderas para toda $n \geq n_0$ para una n_0 particular. Es posible modificar el principio de inducción matemática para tratar esta situación. Se formulará el principio modificado, pero su verificación se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 12.)

1.2.3 Principio de inducción matemática (segunda versión) *Sea* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y sea* P(n) *una proposición para cada número natural* $n \geq n_0$. *Suponer que:*

1) *La proposición* $P(n_0)$ *es verdadera.*
2) *Para toda* $k \geq n_0$, *el hecho de que* P(k) *sea verdadera implica que* P(k + 1) *es verdadera.*

Entonces P(n) *es verdadera para toda* $n \geq n_0$.

En ocasiones al número n_0 de 1) se le llama la **base**, ya que sirve como punto de partida, y a la implicación de 2), que puede escribirse $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, se le llama el **puente**, ya que relaciona el caso k con el caso $k + 1$.

Los ejemplos siguientes ilustran la forma en que se aplica el principio de inducción matemática para demostrar afirmaciones acerca de números naturales.

1.2.4 Ejemplos **a)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, la suma de los n primeros números naturales está dada por

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Para demostrar esta fórmula, sea S el conjunto de todas las $n \in \mathbb{N}$ para las cuales la fórmula es verdadera. Debe verificarse que se satisfacen las condiciones 1) y 2) de 1.2.2. Si $n = 1$, entonces se tiene $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$, de modo que $1 \in S$ y se satisface 1). Después se *supone* que $k \in S$ y a partir de este supuesto se quiere inferir que $k + 1 \in S$. De hecho, si $k \in S$, entonces

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1).$$

Si se suma $k + 1$ a ambos miembros de la igualdad supuesta, se obtiene

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Puesto que ésta es la fórmula enunciada para $n = k + 1$, se concluye que $k + 1 \in S$. Por lo tanto, se satisface la condición 2) de 1.2.2. Por consiguiente, por el principio de inducción matemática se infiere que $S = \mathbb{N}$, de donde la fórmula es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales está dada por la fórmula

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Para establecer esta fórmula, se observa que es verdadera para $n = 1$, ya que $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$. Si se supone que es verdadera para k, entonces al sumar $(k + 1)^2$ en ambos miembros de la fórmula supuesta, se obtiene

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la fórmula es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

c) Dados dos números reales a y b, se demostrará que $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se observa primero que la proposición es evidentemente verdadera para $n = 1$. Si se supone ahora que $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$, entonces

$$\begin{aligned} a^{k+1}-b^{k+1} &= a^{k+1}-ab^k+ab^k-b^{k+1} \\ &= a(a^k-b^k)+b^k(a-b). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, $a - b$ es un factor de $a(a^k - b^k)$ y es claramente un factor de $b^k(a - b)$. Por lo tanto, $a - b$ es un factor de $a^{k+1} - b^{k+1}$, y por el principio de inducción matemática se sigue que $a - b$ es un factor de $a^n - b^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

A partir de este hecho es posible deducir varios resultados de divisibilidad. Por ejemplo, ya que $11 - 7 = 4$, se observa que $11^n - 7^n$ es divisible entre 4 para toda $n \in \mathbb{N}$.

d) La desigualdad $2^n > 2n + 1$ es falsa para $n = 1, 2$, pero es verdadera para $n = 3$. Si se supone que $2^k > 2k + 1$, entonces, al multiplicar por 2 se obtiene, cuando $2k + 2 > 3$, la desigualdad

$$2^{k+1} > 2(2k + 1) = 4k + 2 = 2k + (2k + 2) > 2k + 3 = 2(k + 1) + 1.$$

Puesto que $2k + 2 > 3$ para toda $k \geq 1$, el puente es válido para toda $k \geq 1$ (aun cuando la proposición es falsa para $k = 1, 2$). En consecuencia, se aplica el principio de inducción matemática, con la base $n_0 = 3$, para concluir que la desigualdad es válida para toda $n \geq 3$.

e) La desigualdad $2^n \leq (n + 1)!$ puede establecerse por inducción matemática.

Se observa primero que es verdadera para $n = 1$, ya que $2^1 = 2 = 1 + 1$. Si se supone que $2^k \leq (k + 1)!$, del hecho de que $2 \leq k + 2$ se sigue que

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2(k + 1)! \leq (k + 2)(k + 1)! = (k + 2)!.$$

Así, si la desigualdad se cumple para k, entonces también se cumple para $k + 1$. Por lo tanto, el principio de inducción matemática implica que la desigualdad es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

f) Si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Esta fórmula corresponde a la suma de los términos de una "progresión geométrica". Puede establecerse empleando inducción matemática de la manera siguiente. Primero, si $n = 1$, entonces $1 + r = (1 - r^2)/(1 - r)$. Si se supone que la proposición es verdadera para $n = k$ y se suma el término r^{k+1} en ambos miembros de la igualdad, se obtiene (después de un poco de álgebra)

$$1 + r + r^k + \cdots + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r},$$

que es la fórmula para $n = k + 1$. Por lo tanto, el principio de inducción matemática implica la validez de la fórmula para toda $n \in \mathbb{N}$.

[Este resultado también puede demostrarse sin emplear la inducción matemática. Si se hace $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, entonces $rs_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}$, de donde

$$(1 - r)s_n = s_n - rs_n = 1 - r^{n+1}.$$

Si esta expresión se divide entre $1 - r$, se obtiene la fórmula original.]

g) La aplicación a la ligera del principio de inducción matemática puede llevar a conclusiones a todas luces absurdas. Se invita al lector a encontrar el error en la "demostración" de la siguiente afirmación.

Afirmación: Si $n \in \mathbb{N}$ y si n es el máximo de los números naturales p y q, entonces $p = q$.

"Demostración". Sea S el subconjunto de $\mathbb{N}$ para el que la afirmación es verdadera. Evidentemente, $1 \in S$ ya que si $p, q \in \mathbb{N}$ y si su máximo es 1, entonces ambos son iguales a 1 y $p = q$. Se supone ahora que $k \in S$ y que el máximo de p y q es $k + 1$. Entonces el máximo de $p - 1$ y $q - 1$ es k. Pero como $k \in S$, entonces $p - 1 = q - 1$, y por lo tanto $p = q$. Así, $k + 1 \in S$ y se concluye que la afirmación es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

h) Hay proposiciones que son verdaderas para *muchos* números naturales, pero que no lo son para *todos*.

Por ejemplo, la fórmula $p(n) := n^2 - n + 41$ da un número primo para $n = 1, 2, \cdots, 40$. Sin embargo, es evidente que $p(41)$ es divisible entre 41, por lo que no es un número primo. □

En ocasiones otra versión del principio de inducción matemática resulta de suma utilidad. Se le llama el "principio de inducción fuerte", aun cuando en realidad es equivalente a 1.2.2.

1.2.5 Principio de inducción fuerte *Sea* S *un subconjunto de* $\mathbb{N}$ *tal que*

1″) $1 \in S$.
2″) *Para toda* $k \in \mathbb{N}$, *si* $\{1, 2, \cdots, k\} \subseteq S$, *entonces* $k + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Se le deja al lector establecer la equivalencia de 1.2.2 y 1.2.5.

Ejercicios de la sección 1.2

1. Demostrar que $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + \cdots + 1/n(n + 1) = n/(n + 1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

2. Demostrar que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\frac{1}{2}\, n(n + 1)]^2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que $3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrar que $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = (4n^3 - n)/3$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

5. Demostrar que $1^2 - 2^2 + 3^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n + 1)/2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

6. Demostrar que $n^3 + 5n$ es divisible entre 6 para toda $n \in \mathbb{N}$.

7. Demostrar que $5^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para toda $n \in \mathbb{N}$.

8. Demostrar que $5^n - 4n - 1$ es divisible entre 16 para toda $n \in \mathbb{N}$.

9. Demostrar que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible entre 9 para toda $n \in \mathbb{N}$.

10. Conjeturar una fórmula para la suma $1/1 \cdot 3 + 1/3 \cdot 5 + \cdots + 1/(2n-1)(2n+1)$ y demostrar la conjetura por inducción matemática.

11. Conjeturar una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ y demostrar la conjetura por inducción matemática.

12. Demostrar el principio de inducción matemática 1.2.3 (segunda versión).

13. Demostrar que $n < 2^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

14. Demostrar que $2^n < n!$ para toda $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

15. Demostrar que $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ para toda $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

16. Encontrar todos los números naturales n tales que $n^2 < 2^n$. Demostrar el resultado.

17. Encontrar el número natural más grande m tal que $n^3 - n$ sea divisible entre m para toda $n \in \mathbb{N}$. Demostrar el resultado.

18. Demostrar que $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

19. Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que a) $2^k \in S$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y b) si $k \in S$ y $k \geq 2$, entonces $k - 1 \in S$. Demostrar que $S = \mathbb{N}$.

20. Sea que los números x_n estén definidos: $x_1 := 1$, $x_2 := 2$ y $x_{n+2} := \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Usar el principio de inducción fuerte (1.2.5) para demostrar que $1 \leq x_n \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

SECCIÓN 1.3 Conjuntos finitos e infinitos

Cuando contamos los elementos de un conjunto, decimos "uno, dos, tres,...", deteniéndonos cuando los elementos del conjunto se han agotado. Desde una perspectiva matemática, lo que hacemos es definir un mapeo biyectivo entre el conjunto y una parte del conjunto de los números naturales. Si el conjunto es tal que el conteo no termina, como el propio conjunto de los números naturales, entonces el conjunto se describe como infinito.

Las nociones de "finito" e "infinito" son de marcado carácter axiomático y es muy probable que el lector nunca las haya examinado con mucha atención. En esta sección se presenta la definición precisa de estos términos y se establecen algunos resultados básicos y se enuncian otros resultados importantes que parecen obvios, pero cuyas demostraciones requieren ingenio. Estas demostraciones se encuentran en el apéndice B y pueden leerse posteriormente.

1.3.1 Definición **a)** Se dice que el conjunto vacío $\emptyset$ tiene 0 **elementos**.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, se dice que un conjunto S tiene n **elementos** si existe una biyección del conjunto $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \cdots, n\}$ sobre S.

c) Se dice que un conjunto S es **finito** si es el conjunto vacío o tiene n elementos para alguna $n \in \mathbb{N}$.

d) Se dice que un conjunto S es **infinito** si no es finito.

Puesto que la inversa de una biyección es una biyección, es sencillo ver que un conjunto S tiene n elementos si y sólo si existe una biyección de S sobre el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Asimismo, ya que la composición de dos biyecciones es una biyección, se observa que un conjunto S_1 tiene n elementos si y sólo si existe una biyección de S_1 sobre otro conjunto S_2 que tiene n elementos. Además, un conjunto T_1 es finito si y sólo si existe una biyección de T_1 sobre otro conjunto T_2 que es finito.

Ahora es necesario establecer algunas propiedades básicas de los conjuntos finitos a fin de asegurarse de que las definiciones no lleven a conclusiones que entren en conflicto con la experiencia de contar. A partir de las definiciones, no es del todo claro que un conjunto finito no pueda tener n elementos para *más de un solo* valor de n. También existiría la posibilidad de que el conjunto $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ sea un conjunto finito de acuerdo con esta definición. El lector se sentirá aliviado de que estas posibilidades no existen, como se establece en los dos teoremas siguientes. Las demostraciones de estas afirmaciones, que usan las propiedades fundamentales de $\mathbb{N}$ descritas en la sección 1.2, se presentan en el apéndice B.

1.3.2 Teorema de unicidad *Si* S *es un conjunto finito, entonces el número de elementos en* S *es un número único en* $\mathbb{N}$.

1.3.3 Teorema *El conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales es un conjunto infinito.*

El resultado siguiente presenta algunas propiedades elementales de los conjuntos finitos e infinitos.

1.3.4 Teorema **a)** *Si* A *es un conjunto con* m *elementos y* B *es un conjunto con* n *elementos y si* $A \cap B = \emptyset$, *entonces* $A \cup B$ *tiene* m + n *elementos.*

b) *Si* A *es un conjunto con* $m \in \mathbb{N}$ *elementos y* $C \subseteq A$ *es un conjunto con* 1 *elemento, entonces* $A \backslash C$ *es un conjunto con* m − 1 *elementos.*

c) *Si* C *es un conjunto infinito y* B *es un conjunto finito, entonces* $C \backslash B$ *es un conjunto infinito.*

Demostración. a) Sea f una biyección de $\mathbb{N}_m$ sobre A y sea g una biyección de $\mathbb{N}_n$ sobre B. Se define h en $\mathbb{N}_{m+n}$ por $h(i) := f(i)$ para $i = 1, \cdots, m$ y $h(i) := g(i - m)$ para $i = m + 1, \cdots, m + n$. Se deja como ejercicio demostrar que h es una biyección de $\mathbb{N}_{m+n}$ sobre $A \cup B$.

Las demostraciones de los incisos b) y c) se le dejan al lector (véase el ejercicio 2). Q.E.D.

Puede parecer "obvio" que un subconjunto de un conjunto finito también es finito, pero la afirmación debe deducirse de las definiciones. Este hecho y la proposición correspondiente para conjuntos infinitos se establecen a continuación.

1.3.5 Teorema *Suponer que* S *y* T *son conjuntos y que* T $\subseteq$ S.

a) *Si* S *es un conjunto finito, entonces* T *es un conjunto finito.*
b) *Si* T *es un conjunto infinito, entonces* S *es un conjunto infinito.*

Demostración. a) Si $T = \emptyset$, se sabe ya que T es un conjunto finito. Por tanto, puede suponerse que $T \neq \emptyset$. La demostración se hace por inducción en el número de elementos de S.

Si S tiene 1 elemento, entonces el único subconjunto no vacío T de S debe coincidir con S, de donde T es un conjunto finito.

Se supone que todo subconjunto no vacío de un conjunto con k elementos es finito. Ahora, sea S un conjunto que tiene $k + 1$ elementos (por lo que existe una biyección f de N_{k+1} sobre S), y sea $T \subseteq S$. Si $f(k + 1) \notin T$, entonces T puede considerarse un subconjunto de $S_1 := S \backslash \{f(k+1)\}$, el cual tiene k elementos por el teorema 1.3.4b. Por consiguiente, por la hipótesis de inducción, T es un conjunto finito.

Por otra parte, si $f(k + 1) \in T$, entonces $T_1 := T \backslash \{f(k + 1)\}$ es un subconjunto de S_1. Puesto que S_1 tiene k elementos, la hipótesis de inducción implica que T_1 es un conjunto finito. Pero esto implica, a su vez, que $T = T_1 \cup \{f(k + 1)\}$ también es un conjunto finito.
b) Esta afirmación es el contrapositivo de la afirmación en a). (Véase el apéndice A para una discusión del contrapositivo.) Q.E.D.

Conjuntos contables

Se introduce ahora un importante tipo de conjuntos infinitos.

1.3.6 Definición **a)** Se dice que un conjunto S es **enumerable** (o **contablemente infinito**) si existe una biyección de $\mathbb{N}$ sobre S.
b) Se dice que un conjunto S es **contable** si es finito o enumerable.
c) Se dice que un conjunto S es **incontable** si no es contable.

A partir de las propiedades de las biyecciones, es claro que S es enumerable si y sólo si existe una biyección de S sobre $\mathbb{N}$. Asimismo, un conjunto S_1 es enumerable si y sólo si existe una biyección de S_1 sobre un conjunto S_2 que es enumerable. Además, un conjunto T_1 es contable si y sólo si existe una biyección de T_1 sobre un conjunto T_2 que es contable. Por último, un conjunto contable infinito es enumerable.

1.3.7 Ejemplos **a)** El conjunto $E := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ de los números naturales *pares* es enumerable, ya que el mapeo de $f : \mathbb{N} \to E$ definido por $f(n) := 2n$ para $n \in \mathbb{N}$, es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre E.

Del mismo modo, el conjunto $O := \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ de los números naturales *impares* es enumerable.

b) El conjunto $\mathbb{Z}$ de *todos* los enteros es enumerable.

Para construir una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z}$, se mapea 1 en 0, se mapea el conjunto de los números naturales pares en el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos y se mapea el conjunto de los números naturales impares en los enteros negativos. Este mapeo puede representarse por la enumeración:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}.$$

c) La unión de dos conjuntos enumerables disjuntos es enumerable.

De hecho, si $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$, los elementos de $A \cup B$ pueden enumerarse como:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots. \qquad \square$$

1.3.8 Teorema *El conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es enumerable.*

Demostración informal. Recuerde que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consiste en todos los pares ordenados (m, n), donde $m, n \in \mathbb{N}$. Estos pares pueden enumerarse como:

$$(1, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 1), \quad (1, 3), \quad (2, 2), \quad (3, 1), \quad (1, 4), \cdots,$$

de acuerdo con la suma creciente $m + n$ y con m creciente. (Véase la figura 1.3.1.)

Q.E.D.

La enumeración que acaba de describirse es un ejemplo de un "procedimiento en diagonal", ya que uno se mueve a lo largo de diagonales que contienen un número finito de términos, como se ilustra en la figura 1.3.1. Si bien este argumento es satisfactorio por cuanto muestra exactamente lo que la biyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ debe hacer, no es una "demostración formal", ya que no define con precisión esta biyección. (Véase el apéndice B para una demostración más formal.)

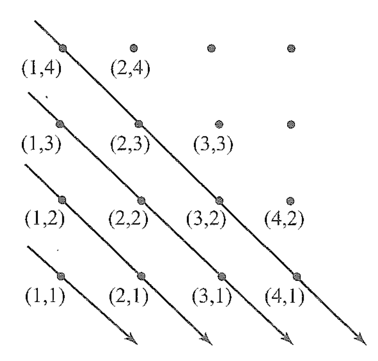


Figura 1.3.1 El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Como se ha hecho notar, la construcción de una biyección explícita entre conjuntos con frecuencia resulta complicada. Los dos resultados siguientes son útiles para establecer el carácter contable de conjuntos, ya que no incluyen establecer que ciertos mapeos son biyecciones. El primer resultado puede parecer intuitivamente claro, pero su demostración, que se presenta en el apéndice B, es bastante técnica.

1.3.9 Teorema *Suponer que* S *y* T *son conjuntos y que* T $\subseteq$ S.

a) *Si* S *es un conjunto contable, entonces* T *es un conjunto contable.*
b) *Si* T *es un conjunto incontable, entonces* S *es un conjunto incontable.*

1.3.10 Teorema *Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

a) S *es un conjunto contable.*
b) *Existe una suprayección de* $\mathbb{N}$ *sobre* S.
c) *Existe una inyección de* S *sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Si S es finito, entonces existe una biyección h de algún conjunto $\mathbb{N}_n$ sobre S y se define H en $\mathbb{N}$ por

$$H(k) := \begin{cases} h(k) & \text{para} \quad k = 1, \cdots, n, \\ h(n) & \text{para} \quad k > n. \end{cases}$$

Entonces H es una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre S.

Si S es enumerable, entonces existe una biyección H de $\mathbb{N}$ sobre S, que es también una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre S.
b) $\Rightarrow$ c) Si H es una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre S, se define $H_1 : S \to \mathbb{N}$ haciendo $H_1(s)$ el elemento menor en el conjunto $H^{-1}(s) := \{n \in \mathbb{N} : H(n) = s\}$. Para ver que H_1 es una inyección de S sobre $\mathbb{N}$, se observa que si $s, t \in S$ y $n_{st} := H_1(s) = H_1(t)$, entonces $s = H(n_{st}) = t$.
c) $\Rightarrow$ a) Si H_1 es una inyección de S sobre $\mathbb{N}$, entonces es una biyección de S sobre $H_1(S) \subseteq \mathbb{N}$. Por el teorema 1.3.9a, $H_1(S)$ es contable, de donde el conjunto S es contable. Q.E.D.

1.3.11 Teorema *El conjunto* $\mathbb{Q}$ *de todos los números racionales es enumerable.*

Demostración. La idea de la demostración es observar que el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos está contenido en la enumeración:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

que es otro "mapeo en diagonal" (véase la figura 1.3.2). Sin embargo, este mapeo no es una inyección, ya que las fracciones diferentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ representan el mismo número racional.

A fin de proceder de manera más formal, se observa que como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es contable (por el teorema 1.3.8), del teorema 1.3.10b se sigue que existe una suprayección f de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ es el mapeo que envía el par ordenado (m, n) al número racional que tiene la representación m/n, entonces g es una suprayección sobre $\mathbb{Q}^+$. Por lo tanto, la composición $g \circ f$ es una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}^+$ y el teorema 1.3.10 implica que $\mathbb{Q}^+$ es un conjunto contable.

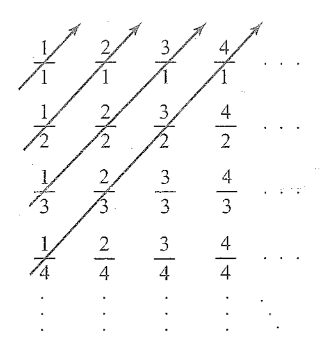


Figura 1.3.2 El conjunto $\mathbb{Q}^+$.

Del mismo modo, el conjunto $\mathbb{Q}^-$ de todos los números racionales negativos es contable. Como en el ejemplo 1.3.7b, se sigue que el conjunto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ es contable. Puesto que $\mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{N}$, debe ser un conjunto enumerable.

Q.E.D.

El resultado siguiente se refiere a las uniones de conjuntos. Con base en el teorema 1.3.10, no es necesario preocuparse por el posible traslape de los conjuntos. Asimismo, no es necesario construir una biyección.

1.3.12 Teorema *Si* A_m *es un conjunto contable para cada* $m \in \mathbb{N}$, *entonces la unión* $A := \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ *es contable.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea φ_m una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre A_m. Se define $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ por

$$\psi(m, n) := \varphi_m(n).$$

Se afirma que ψ es una suprayección. De hecho, si $a \in A$, entonces existe una m menor que está en $\mathbb{N}$ tal que $a \in A_m$, de donde existe una n menor que está en $\mathbb{N}$ tal que $a = \varphi_m(n)$. Por lo tanto, $a = \psi(m, n)$.

Puesto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es contable, del teorema 1.3.10 se sigue que existe una suprayección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de donde $\psi \circ f$ es una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre A. Ahora se aplica de nuevo el teorema 1.3.10 para concluir que A es contable. Q.E.D.

Observación Una manera menos formal (pero más intuitiva) de ver que el teorema 1.3.12 es verdadero consiste en enumerar los elementos de A_m, $m \in \mathbb{N}$, como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\}, \\ &\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots. \end{aligned}$$

Después se enumera este arreglo usando el "procedimiento en diagonal":

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, \cdots,$$

como se ilustra en la figura 1.3.1.

El argumento de que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es contable fue planteado inicialmente en 1874 por Georg Cantor (1845-1918). Fue el primer matemático que examinó el concepto de conjunto infinito con detalle riguroso. En contraste con el carácter contable de $\mathbb{Q}$, también demostró que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un conjunto incontable. (Este resultado se establece en la sección 2.5.)

En una serie de importantes escritos, Cantor desarrolló una amplia teoría de los conjuntos infinitos y la aritmética transfinita. Algunos de sus resultados fueron absolutamente sorprendentes y generaron considerable controversia entre los matemáticos de la época. En una carta de 1877 a su colega Richard Dedekind, escribió, después de demostrar un teorema inesperado: "Lo veo, pero no lo creo".

Se concluye esta sección con uno de los teoremas más memorables de Cantor.

1.3.13 Teorema de Cantor *Si* A *es cualquier conjunto, entonces no existe ninguna suprayección de* A *sobre el conjunto* $\mathcal{P}$(A) *de todos los subconjuntos de* A.

Demostración. Suponer que $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ es una suprayección. Puesto que $\varphi(a)$ es un subconjunto de A, entonces a pertenece a $\varphi(a)$ o no pertenece a este conjunto. Se hace

$$D := \{a \in A : a \notin \varphi(a)\}.$$

Puesto que D es un subconjunto de A, si φ es una suprayección, entonces $D = \varphi(a_0)$ para alguna $a_0 \in A$.

Debe tenerse $a_0 \in D$ o $a_0 \notin D$. Si $a_0 \in D$, entonces, como $D = \varphi(a_0)$, debe tenerse $a_0 \in \varphi(a_0)$, lo cual contradice la definición de D. Del mismo modo, si $a_0 \notin D$, entonces $a_0 \notin \varphi(a_0)$, de donde $a_0 \in D$, lo cual constituye también una contradicción.

Por lo tanto, φ no puede ser una suprayección. Q.E.D.

El teorema de Cantor implica que hay una progresión interminable de conjuntos cada vez más grandes. En particular, implica que la colección $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos de los números naturales $\mathbb{N}$ es incontable.

Ejercicios de la sección 1.3

1. Demostrar que un conjunto no vacío T_1 es finito si y sólo si existe una biyección de T_1 sobre un conjunto finito T_2.

2. Demostrar los incisos b) y c) del teorema 1.3.4.

3. Sean $S := \{1, 2\}$ y $T := \{a, b, c\}$.

a) Determinar el número de inyecciones diferentes de S sobre T.
b) Determinar el número de inyecciones diferentes de T sobre S.

4. Encontrar una biyección entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de todos los enteros impares mayores que 13.

5. Escribir una definición explícita de la biyección f de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z}$ descrita en el ejemplo 1.3.7b.

6. Encontrar una biyección entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto propio de sí mismo.

7. Demostrar que un conjunto T_1 es enumerable si y sólo si existe una biyección de T_1 sobre un conjunto enumerable T_2.

8. Dar un ejemplo de una colección contable de conjuntos finitos cuya unión sea no finita.

9. Demostrar en detalle que si S y T son enumerables, entonces $S \cup T$ es enumerable.

10. Determinar el número de elementos en $\mathcal{P}(S)$, la colección de todos los subconjuntos de S, para cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $S := \{1, 2\}$,
b) $S := \{1, 2, 3\}$,
c) $S := \{1, 2, 3, 4\}$.

Asegurarse de incluir en $\mathcal{P}(S)$ al conjunto vacío y al propio conjunto S.

11. Aplicar la inducción matemática para demostrar que si el conjunto S tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(S)$ tiene 2^n elementos.

12. Demostrar que la colección $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos *finitos* de $\mathbb{N}$ es contable.

Capítulo 2

LOS NÚMEROS REALES

En este capítulo se tratan las propiedades esenciales del sistema de los números reales $\mathbb{R}$. Aun cuando es posible dar una construcción formal de este sistema con base en un conjunto más primitivo (como el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales o el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales), se ha decidido no hacerlo así. En vez de ello, se presenta una lista de las propiedades fundamentales asociadas con los números reales y se indica cómo pueden deducirse propiedades adicionales a partir de ellas. Proceder de este modo resulta mucho más provechoso para el aprendizaje de las herramientas del análisis que examinar las dificultades lógicas de construir un modelo de $\mathbb{R}$.

El sistema de los números reales puede describirse como un "campo ordenado completo", descripción que se estudiará con gran detalle. En la sección 2.1 se empieza introduciendo las propiedades "algebraicas" –llamadas con frecuencia propiedades de "campo" en álgebra abstracta– que se basan en las dos operaciones de adición y multiplicación. La sección continúa con la introducción de las propiedades de orden de $\mathbb{R}$, se deducen algunas consecuencias de estas propiedades y se ilustra su uso al trabajar con desigualdades. La noción de valor absoluto, que se basa en las propiedades de orden, se trata en la sección 2.2.

En la sección 2.3 se da el paso final al incorporar la crucial propiedad de "completez" a las propiedades algebraicas y de orden de $\mathbb{R}$. Es esta propiedad, la cual no se entendía del todo hasta fines del siglo XIX, en la que se basa la teoría de límites y de continuidad, así como prácticamente el resto del contenido de este libro. El desarrollo riguroso del análisis real no sería posible sin esta propiedad esencial.

En la sección 2.4 se aplica la propiedad de completez para deducir varios resultados fundamentales referentes a $\mathbb{R}$, entre los que se incluyen la propiedad de Arquímedes, la existencia de raíces cuadradas y la densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$. En la sección 2.5 se establece la propiedad de los intervalos anidados, la cual se usa para demostrar la incontabilidad de $\mathbb{R}$. Se estudia asimismo su relación con las representaciones binarias y decimales de los números reales.

Parte de la finalidad de las secciones 2.1 y 2.2 es ofrecer ejemplos de demostraciones de teoremas elementales a partir de supuestos enunciados explícitamente. De este modo, los estudiantes pueden adquirir experiencia en la elaboración de demostraciones formales antes de encontrarse con los razonamientos más sutiles y complicados relacionados con la propiedad de completez y sus consecuencias. Sin embargo, quienes hayan estudiado ya el método axiomático y las técnicas de

demostración (quizá en un curso de álgebra abstracta) pueden pasar a la sección 2.3 después de una lectura rápida de las secciones anteriores. En el apéndice A al final del libro se incluye una breve discusión de lógica y de los tipos de demostraciones.

SECCIÓN 2.1 Propiedades algebraicas y de orden de $\mathbb{R}$

Se empieza con una breve discusión de la "estructura algebraica" del sistema de los números reales. Se presentará una corta lista de las propiedades básicas de adición y multiplicación a partir de las cuales pueden deducirse todas las demás propiedades algebraicas como teoremas. En la terminología del álgebra abstracta, el sistema de los números reales es un "campo" con respecto a la adición y la multiplicación. Las propiedades básicas presentadas en el apartado 2.1.1 se conocen como los *axiomas de campo*. Una *operación binaria* asocia con cada par (a, b) un elemento único $B(a, b)$, pero se usarán las notaciones convencionales $a + b$ y $a \cdot b$ cuando se estudien las propiedades de la adición y la multiplicación.

2.1.1 Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$ En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales hay dos operaciones binarias, denotadas por $+$ y $\cdot$, a las que se llama **adición** y **multiplicación**, respectivamente. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

(A1) $a + b = b + a$ para toda a, b en $\mathbb{R}$ (*propiedad conmutativa de la adición*);
(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (*propiedad asociativa de la adición*);
(A3) existe un elemento 0 en $\mathbb{R}$ tal que $0 + a = a$ y $a + 0 = a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (*existencia del elemento cero*);
(A4) para cada a en $\mathbb{R}$ existe un elemento $-a$ en $\mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$ (*existencia de elementos negativos*);
(M1) $a \cdot b = b \cdot a$ para toda a, b en $\mathbb{R}$ (*propiedad conmutativa de la multiplicación*);
(M2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (*propiedad asociativa de la multiplicación*);
(M3) existe un elemento 1 en $\mathbb{R}$ *diferente de* 0 tal que $1 \cdot a = a$ y $a \cdot 1 = a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (*existencia del elemento cero*);
(M4) para cada $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$ existe un elemento $1/a$ en $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$ y $(1/a) \cdot a = 1$ (*existencia de recíprocos*);
(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (*propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición*).

Estas propiedades deben resultarle familiares al lector. Las cuatro primeras se refieren a la adición, las cuatro siguientes a la multiplicación y la última relaciona las dos operaciones. El objeto de la lista es que todas las técnicas comunes del álgebra pueden deducirse de estas nueve propiedades, en gran medida en el mismo sentido en que los teoremas de la geometría euclidiana pueden deducirse de los cinco axiomas básicos postulados por Euclides en sus *Elementos*. Puesto que esta tarea pertenece más bien a un curso de álgebra abstracta, no se llevará a cabo aquí.

Sin embargo, a fin de mostrar la esencia del proceso, se toman como muestra algunos resultados y sus demostraciones.

Se establece primero el hecho básico de que los elementos 0 y 1, cuya existencia se afirmó en (A3) y (M3), son en realidad únicos. Se demuestra asimismo que el resultado de una multiplicación por 0 siempre es 0.

2.1.2 Teorema **a)** *Si* z *y* a *son elementos de* $\mathbb{R}$ *con* $z + a = a$, *entonces* $z = 0$.
b) *Si* u *y* $b \neq 0$ *son elementos de* $\mathbb{R}$ *con* $u \cdot b = b$, *entonces* $u = 1$.
c) *Si* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $a \cdot 0 = 0$.

Demostración. a) Al usar (A3), (A4), (A2), la hipótesis $z + a = a$ y (A4), se obtiene

$$z = z + 0 = z + (a + (-a)) = (z + a) + (-a) = a + (-a) = 0.$$

b) Al usar (M3), (M4), (M2), la igualdad supuesta $u \cdot b = b$ y (M4) de nuevo, se obtiene

$$u = u \cdot 1 = u \cdot (b \cdot (1/b)) = (u \cdot b) \cdot (1/b) = b \cdot (1/b) = 1.$$

c) Se tiene (¿por qué?)

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a.$$

Por lo tanto, del inciso a) se concluye que $a \cdot 0 = 0$. Q.E.D.

Se establecen ahora dos importantes propiedades de la multiplicación: la unicidad de los recíprocos y el hecho de que el producto de dos números es cero sólo cuando uno de los factores es cero.

2.1.3 Teorema **a)** *Si* $a \neq 0$ *y* b *en* $\mathbb{R}$ *son tales que* $a \cdot b = 1$, *entonces* $b = 1/a$.
b) *Si* $a \cdot b = 0$, *entonces o* $a = 0$ *o* $b = 0$.

Demostración. a) Al usar (M3), (M4), (M2), la hipótesis $a \cdot b = 1$ y (M3), se obtiene

$$b = 1 \cdot b = ((1/a) \cdot a) \cdot b = (1/a) \cdot (a \cdot b) = (1/a) \cdot 1 = 1/a.$$

b) Basta suponer que $a \neq 0$ y demostrar que $b = 0$ (¿por qué?). Se multiplica $a \cdot b$ por $1/a$ y se aplican (M2), (M4) y (M3) para obtener

$$(1/a) \cdot (a \cdot b) = ((1/a) \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Puesto que $a \cdot b = 0$, de acuerdo con 2.1.2c la expresión anterior también es igual a

$$(1/a) \cdot (a \cdot b) = (1/a) \cdot 0 = 0.$$

Se tiene, por tanto, $b = 0$. Q.E.D.

Estos teoremas representan una pequeña muestra de las propiedades algebraicas del sistema de los números reales. En los ejercicios se presentan algunas consecuencias adicionales de las propiedades de campo.

La operación de **sustracción** se define por $a - b := a + (-b)$ para a, b en $\mathbb{R}$. Del mismo modo, la **división** se define para a, b en $\mathbb{R}$ con $b \neq 0$ por $a/b := a \cdot (1/b)$. En lo sucesivo se usará esta notación convencional para la sustracción y la división, y también se utilizarán todas las propiedades comunes para estas operaciones. En general, se omitirá el uso del punto para indicar la multiplicación y se escribirá ab para indicar $a \cdot b$. Asimismo, se empleará la notación usual para los exponentes y se escribirá a^2 para indicar aa, a^3 para indicar $(a^2)a$; y, en general, se define $a^{n+1} := (a^n)a$ para $n \in \mathbb{N}$. Se adoptará la convención de que $a^1 = a$. Además, si $a \neq 0$, se escribe $a^0 = 1$ y a^{-1} para indicar $1/a$, y si $n \in \mathbb{N}$, se escribirá a^{-n} para indicar $(1/a)^n$, cuando resulte conveniente hacerlo. En general, se aplicarán con libertad todas las técnicas comunes del álgebra sin mayor explicación.

Números racionales e irracionales

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se considera un subconjunto de $\mathbb{R}$, identificándose el número natural $n \in \mathbb{N}$ con la suma n veces del elemento unidad $1 \in \mathbb{R}$. Asimismo, se identifica $0 \in \mathbb{Z}$ con el elemento cero de $0 \in \mathbb{R}$, y se identifica la suma n veces de -1 con el entero $-n$. Por tanto, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ se consideran subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Los elementos de $\mathbb{R}$ que pueden escribirse en la forma b/a, donde a, $b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, se llaman **números racionales**. El conjunto de todos los números racionales en $\mathbb{R}$ se denotará por la notación común $\mathbb{Q}$. La suma y el producto de dos números racionales es también un número racional (demostrar este hecho) y, además, puede demostrarse que las propiedades de campo presentadas al principio de esta sección son válidas para $\mathbb{Q}$.

El hecho de que hay elementos en $\mathbb{R}$ que no están en $\mathbb{Q}$ no es evidente a primera vista. En el siglo VI a. de C., la sociedad de los pitagóricos de la antigua Grecia descubrió que la diagonal de un cuadrado con lados unitarios no podía expresarse como un cociente de enteros. De acuerdo con el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, esto significa que no existe ningún número entero cuyo cuadrado sea igual a 2. Este descubrimiento tuvo un profundo impacto sobre el desarrollo de las matemáticas en Grecia. Una de sus consecuencias es que a los elementos de $\mathbb{R}$ que no están en $\mathbb{Q}$ llegó a conocérseles como **números irracionales**, lo cual indicaba simplemente que no podían expresarse como cocientes de enteros. Aun cuando el vocablo "irracional" tiene una connotación muy diferente en los idiomas modernos, se adoptará el uso matemático común de este término.

Se demostrará ahora que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. En la demostración se utilizarán las nociones de números pares e impares. Recuérdese que un número natural es **par** si tiene la forma $2n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y que es **impar** si tiene la forma $2n - 1$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Todo número natural es par o bien impar, y ningún número natural es a la vez par e impar.

2.1.4 Teorema *No existe un número racional* r *tal que* $r^2 = 2$.

Demostración. Supóngase, por el contrario, que p y q son enteros tales que $(p/q)^2 = 2$. Puede suponerse que p y q son positivos y que no tienen factores enteros comunes además de 1. (¿Por qué?) Puesto que $p^2 = 2q^2$, se observa que p^2 es par. Esto implica que p también es par [porque si $p = 2n - 1$ es impar, entonces su cuadrado $p^2 = 2(2n^2 - 2n + 1) - 1$ también es impar]. Por lo tanto, ya que p y q no tienen a 2 como factor común, entonces q debe ser un número natural impar.

Puesto que p es par, entonces $p = 2m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, $4m^2 = 2q^2$, de donde $2m^2 = q^2$. Por lo tanto, q^2 es par, y por el razonamiento del párrafo anterior se sigue que q es un número natural impar.

Puesto que la hipótesis de que $(p/q)^2 = 2$ lleva a la conclusión contradictoria de que q es par e impar, debe ser falsa. Q.E.D.

Las propiedades de orden de $\mathbb{R}$

Las "propiedades de orden" de $\mathbb{R}$ se refieren a las nociones de positividad y desigualdades entre números reales. Como en el caso de la estructura algebraica del sistema de los números reales, se procede aislando tres propiedades básicas a partir de las cuales se deducen todas las demás propiedades de orden y las operaciones con desigualdades. La manera más sencilla de hacerlo es identificando un subconjunto especial de $\mathbb{R}$ mediante la aplicación de la noción de "positividad".

2.1.5 Las propiedades de orden de $\mathbb{R}$ Existe un subconjunto no vacío $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$, llamado el conjunto de los **números reales positivos**, que satisface las siguientes propiedades:

(i) Si a, b pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces $a + b$ pertenece a $\mathbb{P}$.
(ii) Si a, b pertenecen a $\mathbb{P}$, entonces ab pertenece a $\mathbb{P}$.
(iii) Si a pertenece a $\mathbb{R}$, entonces se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a \in \mathbb{P}, \qquad a = 0, \qquad -a \in \mathbb{P}.$$

Las dos primeras condiciones aseguran la compatibilidad del orden con las operaciones de adición y multiplicación, respectivamente. La condición 2.1.5(iii) suele conocerse como la **propiedad de tricotomía**, ya que divide $\mathbb{R}$ en tres tipos de elementos distintos. Establece que el conjunto $\{-a : a \in P\}$ de los números reales **negativos** no tiene elementos en común con el conjunto $\mathbb{P}$ de los números reales positivos y, además, que el conjunto $\mathbb{R}$ es la unión de tres conjuntos disjuntos.

Si $a \in \mathbb{P}$, se escribe $a > 0$ y se dice que a es un número real **positivo** (o **estrictamente positivo**). Si $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, se escribe $a \geq 0$ y se dice que a es un número real **no negativo**. Del mismo modo, si $-a \in \mathbb{P}$, se escribe $a < 0$ y se dice que a es un número real **negativo** (o **estrictamente negativo**). Si $-a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, se escribe $a \leq 0$ y se dice que a es un número real **no positivo**.

Se define ahora la noción de desigualdad entre dos números reales en términos del conjunto $\mathbb{P}$ de elementos positivos.

2.1.6 Definición Sean a, b elementos de $\mathbb{R}$.

a) Si $a - b \in \mathbb{P}$, entonces se escribe $a > b$ o $b < a$.

b) Si $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, entonces se escribe $a \geq b$ o $b \leq a$.

La propiedad de tricotomía 2.1.5(iii) implica que para a, $b \in \mathbb{R}$ se cumplirá exactamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a > b, \qquad a = b, \qquad a < b.$$

Por lo tanto, si se cumple a la vez que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Por conveniencia en la notación, se escribirá

$$a < b < c$$

para indicar que se satisfacen tanto $a < b$ como $b < c$. Las otras desigualdades "dobles" $a \leq b < c$, $a \leq b \leq c$ y $a < b \leq c$ se definen de manera similar.

A fin de ilustrar cómo se usan las propiedades de orden básicas para deducir las "reglas de las desigualdades", se establecen a continuación varios resultados que el lector ha usado en cursos de matemática anteriores.

2.1.7 Teorema *Sean* a, b, c *elementos cualesquiera de* $\mathbb{R}$.

a) *Si* $\mathrm{a} > \mathrm{b}$ *y* $\mathrm{b} > \mathrm{c}$, *entonces* $\mathrm{a} > \mathrm{c}$.

b) *Si* $\mathrm{a} > \mathrm{b}$, *entonces* $\mathrm{a} + \mathrm{c} > \mathrm{b} + \mathrm{c}$.

c) *Si* $\mathrm{a} > \mathrm{b}$ *y* $\mathrm{c} > 0$, *entonces* $\mathrm{ca} > \mathrm{cb}$.
Si $\mathrm{a} > \mathrm{b}$ *y* $\mathrm{c} < 0$, *entonces* $\mathrm{ca} < \mathrm{cb}$.

Demostración. a) Si $a - b \in \mathbb{P}$ y $b - c \in \mathbb{P}$, entonces 2.1.5(i) implica que $(a - b) + (b - c) = a - c$ pertenece a $\mathbb{P}$. En consecuencia, $a > c$.

b) Si $a - b \in \mathbb{P}$, entonces $(a + c) - (b + c) = a - b$ está en $\mathbb{P}$. Por lo tanto, $a + c > b + c$.

c) Si $a - b \in \mathbb{P}$ y $c \in \mathbb{P}$, entonces $ca - cb = c(a - b)$ está en $\mathbb{P}$ por 2.1.5(ii). Por tanto, $ca > cb$ cuando $c > 0$.

Por otra parte, si $c < 0$, entonces $-c \in \mathbb{P}$, de donde $cb - ca = (-c)(a - b)$ está en $\mathbb{P}$. Por tanto, $cb > ca$ cuando $c < 0$. Q.E.D.

Es de esperarse que los números naturales sean números reales positivos. Esta propiedad se deduce de las propiedades de orden básicas. La observación clave es que el cuadrado de cualquier número real diferente de cero es positivo.

2.1.8 Teorema **a)** *Si* $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ *y* $\mathrm{a} \neq 0$, *entonces* $\mathrm{a}^2 > 0$.

b) $1 > 0$.

c) *Si* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathrm{n} > 0$.

Demostración. a) Por la propiedad de tricotomía, si $a \neq 0$, entonces $a \in \mathbb{P}$, o bien, $-a \in \mathbb{P}$. Si $a \in \mathbb{P}$, entonces por 2.1.5(ii), $a^2 = a \cdot a \in \mathbb{P}$. Asimismo, si $-a \in \mathbb{P}$, entonces $a^2 = (-a)(-a) \in \mathbb{P}$. Se concluye que si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

b) Puesto que $1 = 1^2$, del inciso a) se sigue que $1 > 0$.

c) Se aplica la inducción matemática. El enunciado es verdadero para $n = 1$ por el inciso b). Si se supone que el enunciado es verdadero para el número natural k, entonces $k \in \mathbb{P}$, y como $1 \in \mathbb{P}$, se tiene que $k + 1 \in \mathbb{P}$ según 2.1.5(i). Por lo tanto, el enunciado es verdadero para todos los números naturales. Q.E.D.

Cabe señalar que *no puede existir un número real positivo mínimo*. Este hecho se establece observando que si $a > 0$, entonces, puesto que $\frac{1}{2} > 0$ (¿por qué?), se tiene que

$$0 < \frac{1}{2}a < a.$$

Por tanto, si se afirma que a es el menor número real positivo, puede darse el número positivo menor $\frac{1}{2}a$.

Esta observación lleva al siguiente resultado, el cual será de uso frecuente como método de demostración. Por ejemplo, para demostrar que un número $a \geq 0$ es en realidad igual a cero, se observa que basta demostrar que a es menor que un número positivo arbitrario.

2.1.9 Teorema *Si* $a \in \mathbb{R}$ *es tal que* $0 \leq a < \varepsilon$ *para toda* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = 0$.

Demostración. Se supone, por el contrario, que $a > 0$. Entonces, si se toma $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}a$, se tiene $0 < \varepsilon_0 < a$. Por lo tanto, es falso que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$ y se concluye que $a = 0$. Q.E.D.

Observación Se deja como un ejercicio demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

El producto de dos números positivos es positivo. Sin embargo, el carácter positivo del producto de dos números no implica que ambos factores son positivos. La conclusión correcta se presenta en el siguiente teorema. Este teorema es una herramienta importante cuando se trabaja con desigualdades.

2.1.10 Teorema *Si* $ab > 0$, *entonces*
(i) $a > 0$ *y* $b > 0$, *o bien*
(ii) $a < 0$ *y* $b < 0$.

Demostración. Se empieza observando que $ab > 0$ implica que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. (¿Por qué?) Por la propiedad de tricotomía, $a > 0$, o bien, $a < 0$. Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ (¿por qué?) y, por lo tanto, $b = (1/a)(ab) > 0$. Del mismo modo, si $a < 0$, entonces $1/a < 0$, de donde $b = (1/a)(ab) < 0$. Q.E.D.

2.1.11 Corolario *Si* $ab < 0$, *entonces*
(i) $a < 0$ *y* $b > 0$, *o bien*
(ii) $a > 0$ *y* $b < 0$.

Desigualdades

Se sabe ahora cómo pueden usarse las propiedades de orden presentadas en esta sección para "resolver" ciertas desigualdades. El lector debe justificar cada uno de los pasos.

2.1.12 Ejemplos **a)** Determinar el conjunto A de todos los números reales x tales que $2x + 3 \leq 6$.

Se observa que se tiene*

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \tfrac{3}{2}.$$

Por lo tanto, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{2}\}$.

b) Determinar el conjunto $B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$.

La desigualdad se reescribe de tal forma que pueda aplicarse el teorema 2.1.10. Obsérvese que

$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+2) > 0.$$

Por tanto, se tiene (i) $x - 1 > 0$ y $x + 2 > 0$, o bien, se tiene (ii) $x - 1 < 0$ y $x + 2 < 0$. En el caso (i) debe tenerse a la vez $x > 1$ y $x > -2$, condición que se satisface si y sólo si $x > 1$. En el caso (ii) debe tenerse a la vez $x < 1$ y $x < -2$, condición que se satisface si y sólo si $x < -2$.

Se concluye que $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$.

c) Determinar el conjunto

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} < 1 \right\}.$$

Se observa que

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} < 0.$$

Por lo tanto, se tiene (i) $x - 1 < 0$ y $x + 2 > 0$, o bien, (ii) $x - 1 > 0$ y $x + 2 < 0$. (¿Por qué?) En el caso (i) debe tenerse a la vez $x < 1$ y $x > -2$, condición que se satisface si y sólo si $-2 < x < 1$. En el caso (ii) debe tenerse a la vez $x > 1$ y $x < -2$, condición que nunca se satisface.

Se concluye que $C = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\}$. □

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades de orden de $\mathbb{R}$ para establecer ciertas desigualdades. El lector debe verificar los pasos seguidos en los razonamientos identificando las propiedades que se aplican.

Cabe señalar que no se ha establecido aún la existencia de las raíces cuadradas de números positivos; sin embargo, se supone la existencia de dichas raíces

---

*El símbolo $\Leftrightarrow$ debe leerse "si y sólo si".

para los fines de estos ejemplos. (La existencia de las raíces cuadradas se trata en la sección 2.4.)

2.1.13 Ejemplos **a)** Sean $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}\,. \tag{1}$$

Se considera el caso en que $a > 0$ y $b > 0$, dejándole al lector el caso $a = 0$. De 2.1.5(i) se sigue que $a + b > 0$. Puesto que $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, de 2.1.7c se sigue que $b - a > 0$ implica que $b^2 - a^2 > 0$. Asimismo, de 2.1.10 se sigue que $b^2 - a^2 > 0$ implica que $b - a > 0$.

Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\sqrt{a} > 0$ y $\sqrt{b} > 0$. Puesto que $a = (\sqrt{a}\,)^2$ y $b = (\sqrt{b}\,)^2$, la segunda implicación es una consecuencia de la primera cuando a y b se sustituyen por $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, respectivamente.

Se le deja también al lector demostrar que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \leq b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \tag{1'}$$

b) Si a y b son números reales positivos, entonces su **media aritmética** es $\frac{1}{2}(a + b)$ y su **media geométrica** es $\sqrt{ab}$. La **desigualdad de la media aritmética-geométrica** para a, b es

$$\sqrt{ab} < \tfrac{1}{2}(a + b), \tag{2}$$

donde la igualdad ocurre si y sólo si $a = b$.

Para poder demostrar este hecho, obsérvese que si $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq b$, entonces $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} > 0$ y $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. (¿Por qué?) Por lo tanto, de 2.1.8a se sigue que $(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^2 > 0$. Al desarrollar el cuadrado se obtiene

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0,$$

de donde se sigue que

$$\sqrt{ab} < \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Por lo tanto, (2) es válida (con la desigualdad estricta) cuando $a \neq b$. Además, si $a = b\ (> 0)$, entonces ambos miembros de (2) son iguales a a, en cuyo caso (2) se convierte en igualdad. Con esto se demuestra que (2) es válida para $a > 0$, $b > 0$.

Por otra parte, supóngase que $a > 0$, $b > 0$ y que $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b)$. Entonces, al elevar al cuadrado ambos miembros y multiplicar por 4, se obtiene

$$4ab = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

de donde se sigue que

$$0 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Pero esta igualdad implica que $a = b$. (¿Por qué?) Por tanto, la igualdad en (2) implica que $a = b$.

Observación La desigualdad de la media artimética-geométrica general para los números reales positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ es

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{3}$$

donde la igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Puede probarse este enunciado más general por inducción matemática, pero la demostración es un tanto intrincada. En el ejercicio 8.3.9 del capítulo 8 se presenta una demostración más elegante que usa las propiedades de la función exponencial.

c) **Desigualdad de Bernoulli.** Si $x > -1$, entonces

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

La demostración se hace por inducción matemática. El caso $n = 1$ produce la igualdad, por lo que la afirmación es válida en este caso. Enseguida, se supone la validez de la desigualdad (4) para $k \in \mathbb{N}$ y se deduce su validez para $k + 1$. De hecho, los supuestos de que $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ y de que $1 + x > 0$ implican (¿por qué) que

$$\begin{aligned}(1 + x)^{k+1} &= (1 + x)^k \cdot (1 + x) \\ &\geq (1 + kx) \cdot (1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

En consecuencia, la desigualdad (4) es válida para $n = k + 1$. Por lo tanto, (4) es válida para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Ejercicios de la sección 2.1

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar las siguientes expresiones.

   a) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$, b) $-(-a) = a$,
   c) $(-1)a = -a$, d) $(-1)(-1) = 1$.

2. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

   a) $-(a + b) = (-a) + (-b)$, b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$,
   c) $1/(-a) = -(1/a)$, d) $-(a/b) = (-a)/b$ si $b \neq 0$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones, justificando cada paso con la referencia a la propiedad o teorema apropiado.

   a) $2x + 5 = 8$, b) $x^2 = 2x$,
   c) $x^2 - 1 = 3$, d) $(x - 1)(x + 2) = 0$.

4. Si $a \in \mathbb{R}$ satisface $a \cdot a = a$, demostrar que o $a = 0$ o $a = 1$.

5. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, demostrar que $1/(ab) = (1/a)(1/b)$.

6. Aplicar el razonamiento usado en la demostración del teorema 2.1.4 para probar que no existe un número racional s tal que $s^2 = 6$.

7. Modificar la demostración del teorema 2.1.4 para probar que no existe un número racional t tal que $t^2 = 3$.

8. a) Demostrar que si x, y son números racionales, entonces $x + y$ y xy son números racionales.
b) Demostrar que si x es un número racional y y es un número irracional, entonces $x + y$ es un número irracional. Si, además, $x \neq 0$, probar que xy es un número irracional.

9. Sea $K := \{s + t\sqrt{2} : s, t \in \mathbb{Q}\}$. Demostrar que K satisface las siguientes condiciones:

a) Si $x_1, x_2 \in K$, entonces $x_1 + x_2 \in K$ y $x_1x_2 \in K$.
b) Si $x \neq 0$ y $x \in K$, entonces $1/x \in K$.

(Por tanto, el conjunto K es un *subcampo* de $\mathbb{R}$. Con las propiedades de orden heredadas de $\mathbb{R}$, el conjunto K es un campo ordenado que está entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.)

10. a) Si $a < b$ y $c \leq d$, demostrar que $a + c < b + d$.
b) Si $0 < a < b$ y $0 \leq c \leq d$, demostrar que $0 \leq ac \leq bd$.

11. a) Demostrar que si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ y $1/(1/a) = a$.
b) Demostrar que si $a < b$, entonces $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.

12. Sean a, b, c, d números que satisfacen $0 < a < b$ y $c < d < 0$. Dar un ejemplo donde $ac < bd$ y uno donde $bd < ac$.

13. Si $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que $a^2 + b^2 = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.

14. Si $0 \leq a < b$, probar que $a^2 \leq ab < b^2$. Demostrar con un ejemplo que *no* se sigue que $a^2 < ab < b^2$.

15. Si $0 < a < b$, probar que a) $a < \sqrt{ab} < b$, y b) $1/b < 1/a$.

16. Encontrar todos los números reales x que satisfacen las siguientes desigualdades.

a) $x^2 > 3x + 4$,
b) $1 < x^2 < 4$,
c) $1/x < x$,
d) $1/x < x^2$.

17. Demostrar la siguiente forma del teorema 2.1.9: si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y suponer que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene $a \leq b + \varepsilon$. Demostrar que $a \leq b$.

19. Demostrar que $[\frac{1}{2}(a + b)]^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$.

20. a) Si $0 < c < 1$, demostrar que $0 < c^2 < c < 1$.
 b) Si $1 < c$, demostrar que $1 < c < c^2$.

21. a) Demostrar que no hay ninguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$. (Usar la propiedad del buen orden de $\mathbb{N}$.)
 b) Demostrar que ningún número natural puede ser a la vez par e impar.

22. a) Si $c > 1$, demostrar que $c^n \geq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $c^n > c$ para $n > 1$.
 b) Si $0 < c < 1$, demostrar que $c^n \leq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $c^n < c$ para $n > 1$.

23. Si $a > 0$, $b > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $a < b$ si y sólo si $a^n < b^n$. [Sugerencia: aplicar la inducción matemática.]

24. a) Si $c > 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, demostrar que $c^m > c^n$ si y sólo si $m > n$.
 b) Si $0 < c < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, demostrar que $c^m < c^n$ si y sólo si $m > n$.

25. Suponiendo la existencia de las raíces, demostrar que si $c > 1$, entonces $c^{1/m} < c^{1/n}$ si y sólo si $m > n$.

26. Usar la inducción matemática para demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^m a^n$ y $(a^m)^n = a^{mn}$.

SECCIÓN 2.2 Valor absoluto y la recta real

Por la propiedad de tricotomía 2.1.5(iii), se tiene la seguridad de que si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces exactamente uno de los números a y $-a$ es positivo. El valor absoluto de $a \neq 0$ se define como el número que sea positivo de los dos anteriores. El valor absoluto de 0 se define como 0.

2.2.1 Definición El **valor absoluto** de un número real a, denotado por $|a|$, se define como

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a = 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-8| = 8$. Por la definición se observa que $|a| \geq 0$ para toda $a \in \mathbb{R}$ y que $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$. Asimismo, $|-a| = |a|$ para toda $a \in \mathbb{R}$. Se presentan a continuación algunas propiedades adicionales.

2.2.2 Teorema **a)** $|ab| = |a|\,|b|$ *para toda* $a, b \in \mathbb{R}$.
b) $|a|^2 = a^2$ *para toda* $a \in \mathbb{R}$.
c) *Si* $c \geq 0$, *entonces* $|a| \leq c$ *si y sólo si* $-c \leq a \leq c$.
d) $-|a| \leq a \leq |a|$ *para toda* $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. a) Si a, o bien b, es 0, entonces ambos miembros son 0. Hay cuatro casos más por considerar. Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $ab > 0$, de dond

$|ab| = ab = |a||b|$. Si $a > 0$, $b < 0$, entonces $ab < 0$, de donde $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$. Los casos restantes reciben un tratamiento similar.

b) Puesto que $a^2 \geq 0$, se tiene $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.

c) Si $|a| \leq c$, entonces se tiene tanto $a \leq c$ como $-a \leq c$ (¿por qué?), que es equivalente a $-c \leq a \leq c$. Recíprocamente, si $-c \leq a \leq c$, entonces se tiene tanto $a \leq c$ como $-a \leq c$ (¿por qué?), de modo que $|a| \leq c$.

(d) Se hace $c = |a|$ en el inciso c). Q.E.D.

La importante desigualdad siguiente se usará con frecuencia.

2.2.3 Desigualdad del triángulo *Si* a, b $\in \mathbb{R}$, *entonces* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Demostración. Por 2.2.2d, se tiene $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. Al sumar estas desigualdades, se obtiene

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

En consecuencia, por 2.2.2c se tiene $|a + b| \leq |a| + |b|$. Q.E.D.

Puede demostrarse que la igualdad en la desigualdad del triángulo ocurre si y sólo si $ab > 0$, lo que es equivalente a decir que a y b tienen el mismo signo. (Véase el ejercicio 2.)

Hay varias variantes útiles de la desigualdad del triángulo. A continuación se presentan dos de ellas.

2.2.4 Corolario *Si* a, b $\in \mathbb{R}$, *entonces*
a) $||a| - |b|| \leq |a - b|$,
b) $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Demostración. a) Se escribe $a = a - b + b$ y se aplica después la desigualdad del triángulo para obtener $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Ahora se resta $|b|$ para obtener $|a| - |b| \leq |a - b|$. Del mismo modo, de $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$, se obtiene $-|a - b| = -|b - a| \leq |a| - |b|$. Si se combinan estas dos desigualdades, usando 2.2.2c, se obtiene la desigualdad del inciso a).

b) Se sustituye b por $-b$ en la desigualdad del triángulo para obtener $|a - b| \leq |a| + |-b|$. Puesto que $|-b| = |b|$, se obtiene la desigualdad del inciso b). Q.E.D.

Una aplicación directa de la inducción matemática amplía la desigualdad del triángulo a cualquier número finito de elementos de $\mathbb{R}$.

2.2.5 Corolario *Si* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *son números reales cualesquiera, entonces*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Los siguientes ejemplos ilustran cómo pueden usarse las propiedades del valor absoluto.

2.2.6 Ejemplos **a)** Determinar el conjunto A de todos los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $|2x + 3| < 7$.

Por una modificación de 2.2.2c para el caso de la desigualdad estricta, se observa que $x \in A$ si y sólo si $-7 < 2x + 3 < 7$, que se satisface si y sólo si $-10 < 2x < 4$. Al dividir entre 2, se concluye que $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 2\}$.

b) Determinar el conjunto $B := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x|\}$.

Un procedimiento consiste en considerar los diferentes casos a fin de eliminar los símbolos de valor absoluto. Dichos casos son los siguientes:

$$\text{(i) } x \geq 1, \qquad \text{(ii) } 0 \leq x < 1, \qquad \text{(iii) } x < 0.$$

(¿Por qué se eligieron estos tres casos?) En el caso (i), la desigualdad queda como $x - 1 < x$, la cual se satisface sin necesidad de más restricciones. En consecuencia, todas las x tales que $x \geq 1$ pertenecen al conjunto B. En el caso (ii), la desigualdad queda como $-(x - 1) < x$, la cual requiere que $x > \frac{1}{2}$. Así, este caso incorpora al conjunto B todas las x tales que $\frac{1}{2} < x < 1$. En el caso (iii), la desigualdad queda como $-(x - 1) < -x$, que es equivalente a $1 < 0$. Puesto que este enunciado es falso, ningún valor de x del caso (iii) satisface la desigualdad. Al formar la unión de los tres casos, se concluye que $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\right\}$.

Hay un segundo procedimiento para determinar el conjunto B, basado en el hecho de que $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$ cuando tanto $a \geq 0$ como $b \geq 0$. (Véase 2.1.13a.) De este modo, la desigualdad $|x - 1| < |x|$ es equivalente a la desigualdad $|x - 1|^2 < |x|^2$. Puesto que $|a|^2 = a^2$ para toda a por 2.2.2b, puede desarrollarse el cuadrado para obtener $x^2 - 2x + 1 < x^2$, que al simplificarse queda como $x > \frac{1}{2}$. Por tanto, se encuentra de nueva cuenta que $B = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2}\}$. Este procedimiento de elevación al cuadrado en ocasiones puede ser conveniente, pero con frecuencia resultará inevitable el análisis por casos cuando se trabaje con valores absolutos.

c) Sea f la función definida por $f(x) := (2x^2 + 3x + 1)/(2x - 1)$ para $2 \leq x \leq 3$. Hallar una constante M tal que $|f(x)| \leq M$ para toda x que satisface $2 \leq x \leq 3$.

Se consideran por separado el numerador y el denominador de

$$|f(x)| = \frac{|2x^2 + 3x + 1|}{|2x - 1|}.$$

Por la desigualdad del triángulo, se obtiene

$$|2x^2 + 3x + 1| \leq 2|x|^2 + 3|x| + 1 \leq 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$$

ya que $|x| \leq 3$ para las x bajo consideración. Asimismo, $|2x - 1| \geq 2|x| - 1 \geq 2 \cdot 2 - 1 = 3$, ya que $|x| \geq 2$ para las x bajo consideración. En consecuencia, $1/|2x - 1| \leq {}^1/_3$ para $x \geq 2$. (¿Por qué?) Por lo tanto, para $2 \leq x \leq 3$ se tiene $|f(x)| \leq {}^{28}/_3$. Por consiguiente, puede tomarse $M = {}^{28}/_3$. (Obsérvese que se ha encontrado uno de los valores de M; evidentemente, cualquier número $H > {}^{28}/_3$ también satisfará $|f(x)| \leq H$. También existe la posibilidad de que ${}^{28}/_3$ no sea la menor elección posible para M.) □

La recta real

Una interpretación geométrica conveniente y familiar del sistema de los números reales es la recta real. En esta interpretación, el valor absoluto $|a|$ de un elemento

a de $\mathbb{R}$ se considera como la distancia de a al origen 0. En términos más generales, la **distancia** entre los elementos a y b en $\mathbb{R}$ es $|a - b|$. (Véase la figura 2.2.1.)

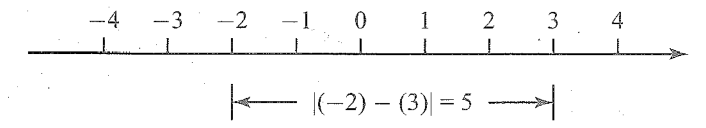


Figura 2.2.1 La distancia entre $a = -2$ y $b = 3$.

Más adelante será necesario precisar el lenguaje para examinar la idea de que un número real está "cerca de" otro. Si a es un número real dado, entonces decir que un número real x está "cerca de" a significará que la distancia $|x - a|$ que los separa es "pequeña". Un contexto en el que puede explicarse esta idea lo proporciona la terminología de vecindades, concepto que se define a continuación.

2.2.7 Definición Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces la **vecindad-ε** de a es el conjunto $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Para $a \in \mathbb{R}$, la afirmación de que x pertenece a $V_\varepsilon(a)$ es equivalente a cualquiera de los enunciados (véase la figura 2.2.2)

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

$a - \varepsilon$ a $a + \varepsilon$

Figura 2.2.2 Vecindad-ε de a.

2.2.8 Teorema *Sea* $a \in \mathbb{R}$. *Si* x *pertenece a la vecindad* $V_\varepsilon(a)$ *para toda* $\varepsilon > 0$, *entonces* $x = a$.

Demostración. Si una x particular satisface $|x - a| < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces de 2.1.9 se sigue que $|x - a| = 0$ y, por consiguiente, $x = a$. Q.E.D.

2.2.9 Ejemplos **a)** Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los dos números a y $1 - a$. Entonces es un ejercicio demostrar que la vecindad $V_\varepsilon(a)$ está contenida en U. Por lo tanto, cada elemento de U tiene alguna vecindad-ε del mismo que está contenida en U.

b) Si $I := \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, entonces para toda $\varepsilon > 0$, la vecindad-ε $V_\varepsilon(0)$ de 0 contiene puntos que no están en I y, en consecuencia, $V_\varepsilon(0)$ no está contenida en I. Por ejemplo, el número $x_\varepsilon := -\varepsilon/2$ está en $V_\varepsilon(0)$ pero no en I.

c) Si $|x - a| < \varepsilon$ y $|y - b| < \varepsilon$, entonces la desigualdad del triángulo implica que

$$\begin{aligned} |(x + y) - (a + b)| &= |(x - a) + (y - b)| \\ &\leq |x - a| + |y - b| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, si x, y pertenecen a las vecindades-ε de a, b, respectivamente, entonces $x + y$ pertenece a las vecindades-2ε de $a + b$ (pero no necesariamente a la vecindad-ε de $a + b$). □

Ejercicios de la sección 2.2

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, demostrar que:

a) $|a| = \sqrt{a^2}$, b) $|a/b| = |a|/|b|$.

2. Si $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que $|a + b| = |a| + |b|$ si y sólo si $ab \geq 0$.

3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x \leq z$, demostrar que $x \leq y \leq z$ si y sólo si $|x - y| + |y - z| = |x - z|$. Establecer la interpretación geométrica de este resultado.

4. Demostrar que $|x - a| < \varepsilon$ si y sólo si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

5. Si $a < x < b$ y $a < y < b$, demostrar que $|x - y| < b - a$. Establecer la interpretación geométrica de este resultado.

6. Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades.

a) $|4x - 5| \leq 13$, b) $|x^2 - 1| \leq 3$.

7. Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $|x + 1| + |x - 2| = 7$.

8. Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades.

a) $|x - 1| > |x + 1|$, b) $|x| + |x + 1| < 2$.

9. Trazar la gráfica de la ecuación $y = |x| - |x - 1|$.

10. Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$.

11. Encontrar todas las $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente tanto $|2x - 3| < 5$ como $|x + 1| > 2$.

12. Determinar y graficar el conjunto de los pares (x, y) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

a) $|x| = |y|$, b) $|x| + |y| = 1$,
c) $|xy| = 2$, d) $|x| - |y| = 2$.

13. Determinar y graficar el conjunto de los pares (x, y) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

a) $|x| \leq |y|$, b) $|x| + |y| \leq 1$,
c) $|xy| \leq 2$, d) $|x| - |y| \geq 2$.

14. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que $V_\varepsilon(a) \cap V_\delta(a)$ y $V_\varepsilon(a) \cup V_\delta(a)$ son vecindades-γ de a para valores apropiados de γ.

15. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq b$, entonces existen las vecindades-ε U de a y V de b tales que $U \cap V = \emptyset$.

16. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

a) $\text{máx}\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ y $\text{mín}\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

b) $\text{mín}\{a, b, c\} = \text{mín}\{\text{mín}\{a, b\}, c\}$.

17. Demostrar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces el "número medio" es $\text{med}\{a, b, c\} = \text{mín}\{\text{máx}\{a, b\}, \text{máx}\{b, c\}, \text{máx}\{c, a\}\}$.

SECCIÓN 2.3 La propiedad de completez de $\mathbb{R}$

Hasta este punto del capítulo se han estudiado las propiedades algebraicas y las propiedades de orden del sistema de los números reales $\mathbb{R}$. En esta sección se presenta una propiedad más de $\mathbb{R}$ que suele llamarse la "propiedad de completez". El sistema $\mathbb{Q}$ de los números racionales posee también las propiedades algebraicas y las propiedades de orden estudiadas en las secciones precedentes, pero se ha visto que $\sqrt{2}$ *no puede* representarse como un número racional; en consecuencia, $\sqrt{2}$ no pertenece a $\mathbb{Q}$. Esta observación muestra la necesidad de una propiedad adicional que caracterice al sistema de los números reales. Esta propiedad adicional, la propiedad de completez (o del supremo), constituye una característica esencial de $\mathbb{R}$, y se dirá que $\mathbb{R}$ es un *campo ordenado completo*. Es esta propiedad especial la que permite definir y desarrollar los diferentes procedimientos para encontrar límites que se estudian en los capítulos subsecuentes.

Hay varias formas diferentes de describir la propiedad de completez. Se decidió presentar aquí el que quizá sea el tratamiento más eficaz, el cual consiste en suponer que todo subconjunto no vacío acotado de $\mathbb{R}$ tiene un supremo.

Supremos e ínfimos

Se introducen a continuación las nociones de cota superior y cota inferior de un conjunto de números reales. Estas ideas serán de suma importancia en secciones posteriores.

2.3.1 Definición Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a) Se dice que el conjunto S está **acotado superiormente** si existe un número $u \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq u$ para toda $s \in S$. A cada uno de estos números u se le llama **cota superior** de S.

b) Se dice que el conjunto S está **acotado inferiormente** si existe un número $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \leq s$ para toda $s \in S$. A cada uno de estos números w se le llama **cota inferior** de S.

c) Se dice que un conjunto está **acotado** si está acotado tanto superior como inferiormente; en caso contrario, se dice que es **no acotado**.

Por ejemplo, el conjunto $S := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ está acotado superiormente; el número 2 y cualquier número mayor que 2 es una cota superior de S. Este conjunto no tiene cotas inferiores, por lo que no está acotado inferiormente. Por consiguiente, el conjunto S es no acotado (aun cuando esté acotado superiormente).

Si un conjunto S tiene una cota superior, entonces tiene un número infinito de cotas superiores, ya que si u es una cota superior de S, entonces los números $u + 1, u + 2, \cdots$ también son cotas superiores de S. (Una observación similar es válida para las cotas inferiores.)

En el conjunto de las cotas superiores de S y en el conjunto de las cotas inferiores de S, se particularizan sus elementos mínimo y máximo, respectivamente, para prestarles atención especial en la siguiente definición. (Véase la figura 2.3.1.)

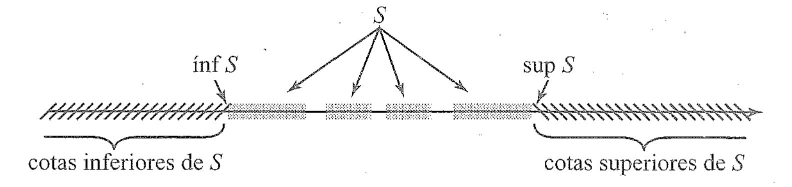


Figura 2.3.1 ínf S y sup S.

2.3.2 Definición Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a) Si S está acotado superiormente, entonces se dice que un número u es un **supremo** (o una **mínima cota superior**) de S si satisface las condiciones:
 1) u es una cota superior de S, y
 2) si v es cualquier cota superior de S, entonces $u \leq v$.

b) Si S está acotado inferiormente, entonces se dice que un número w es un **ínfimo** (o una **máxima cota inferior**) de S si satisface las condiciones:
 1′) w es una cota inferior de S, y
 2′) si t es cualquier cota inferior de S, entonces $t \leq w$.

No es difícil ver que *únicamente puede haber un supremo de un subconjunto* S *de* $\mathbb{R}$ *dado.* (Entonces es posible hacer referencia a *el* supremo de un conjunto en vez de a *un* supremo.) Para ver por qué, supóngase que u_1 y u_2 son ambos supremos de S. Si $u_1 < u_2$, entonces la hipótesis de que u_2 es un supremo implica que u_1 no puede ser una cota superior de S. Del mismo modo, se observa que $u_2 < u_1$ tampoco es posible. Por lo tanto, debe tenerse que $u_1 = u_2$. Puede usarse un razonamiento similar para demostrar que el ínfimo de un conjunto se encuentra determinado de manera única.

Si existen el supremo o el ínfimo de un conjunto S, se les denotará, respectivamente, por

$$\sup S \quad \text{e} \quad \inf S.$$

Se hace notar asimismo que si u' es una cota superior arbitraria de un conjunto no vacío S, entonces $\sup S \leq u'$. Esto es así porque sup S es la mínima de las cotas superiores de S.

Antes que nada, es necesario hacer hincapié en que para que un conjunto no vacío S en $\mathbb{R}$ tenga un supremo, debe tener una cota superior. Por tanto, no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene un supremo; del mismo modo, no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene un ínfimo. De hecho, hay cuatro posibilidades para un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$: puede

(i) tener tanto supremo como ínfimo,
(ii) tener supremo pero no ínfimo,
(iii) tener ínfimo pero no supremo,
(iv) no tener ni supremo ni ínfimo.

También se hace hincapié en que a fin de demostrar que $u = \sup S$ para algún subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}$, es necesario demostrar que se cumple *tanto* la condición 1) *como* la 2) de la definición 2.3.2a. Resultará instructivo reformular estas consideraciones. Primero, el lector deberá ver que los dos enunciados siguientes acerca de un número u y un conjunto S son equivalentes:

1) u es una cota superior de S,

1′) $s \leq u$ para toda $s \in S$.

Asimismo, los siguientes enunciados acerca de una cota superior u de un conjunto S son equivalentes:

2) si v es cualquier cota superior de S, entonces $u \leq v$,

2′) si $z < u$, entonces z no es una cota superior de S,

2″) si $z < u$, entonces existe $s_z \in S$ tal que $z < s_z$,

2‴) si $\varepsilon > 0$, entonces existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Por lo tanto, pueden enunciarse dos formulaciones alternativas para el supremo.

2.3.3 Lema *Un número* u *es el supremo de un subconjunto no vacío* S *de* ℝ *si y sólo si* u *satisface las condiciones:*

(1) $s \leq u$ *para toda* $s \in S$,

(2) *si* $v < u$, *entonces existe* $s' \in S$ *tal que* $v < s'$.

Se le deja al lector desarrollar los detalles de la demostración.

2.3.4 Lema *Una cota superior* u *de un conjunto no vacío* S *de* ℝ *es el supremo de* S *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una* $s_\varepsilon \in S$ *tal que* $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Demostración. Si u es una cota superior de S que satisface la condición enunciada y si $v < u$, entonces se hace $\varepsilon := u - v$. Entonces $\varepsilon > 0$, por lo que existe $s_\varepsilon \in S$ tal que $v = u - \varepsilon < s_\varepsilon$. Por lo tanto, v no es una cota superior de S y se concluye que $u = \sup S$.

Recíprocamente, suponer que $u = \sup S$ y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $u - \varepsilon < u$, entonces $u - \varepsilon$ no es una cota superior de S. Por lo tanto, algún elemento s_ε de S debe ser mayor que $u - \varepsilon$; es decir, $u - \varepsilon < s_\varepsilon$. (Véase la figura 2.3.2.) Q.E.D.

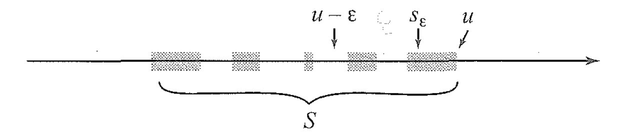


Figura 2.3.2 $u = \sup S$.

Es importante percatarse de que el supremo de un conjunto puede ser o no elemento del mismo. En ocasiones lo es, en ocasiones no lo es, lo cual depende del conjunto particular. Se consideran a continuación algunos ejemplos.

2.3.5 Ejemplos **a)** Si un conjunto no vacío S_1 tiene un número finito de elementos, entonces puede demostrarse que S_1 tiene un elemento máximo u y un elemento mínimo w. Entonces, $u = \sup S_1$ y $w = \inf S_1$, y ambos son miembros de S_1. (Lo anterior es claro si S_1 tiene un solo elemento, y puede demostrarse por

inducción matemática cuál es el número de elementos en S_1; véanse los ejercicios 11 y 12.)

b) El conjunto $S_2 := \{x : 0 \le x \le 1\}$ tiene evidentemente a 1 como la cota superior. Se demuestra que 1 es su supremo como sigue. Si $v < 1$, existe un elemento $s' \in S_2$ tal que $v < s'$. (Nombrar uno de estos elementos s'.) Por lo tanto, v no es una cota superior de S_2 y, ya que v es un número arbitrario $v < 1$, se concluye que $\sup S_2 = 1$. De manera similar, se demuestra que $\inf S_2 = 0$. Obsérvese que tanto el supremo como el ínfimo de S_2 están contenidos en S_2.

c) El conjunto $S_3 := \{x : 0 < x < 1\}$ tiene evidentemente a 1 como cota superior. Usando el mismo razonamiento que en el inciso b), se observa que $\sup S_3 = 1$. En este caso, el conjunto S_3 *no* contiene a su supremo. Del mismo modo, $\inf S_3 = 0$ no está contenido en S_3. □

La propiedad de completez de ℝ

Con base en las propiedades de campo y de orden de ℝ discutidas en la sección 2.1 no es posible demostrar que todo subconjunto no vacío de ℝ que está acotado superiormente tiene un supremo en ℝ. Sin embargo, es una propiedad profunda y fundamental del sistema de los números reales que éste es en realidad el caso. Se hará un uso frecuente y esencial de esta propiedad, en particular al tratar los procesos de límites. El enunciado siguiente referente a la existencia de supremos es el supuesto final acerca de ℝ. Así, se dice que ℝ es un *campo ordenado completo*.

2.3.6 La propiedad de completez de ℝ *Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior también tiene un supremo en ℝ.*

Esta propiedad también recibe el nombre de **propiedad del supremo** de ℝ. La propiedad análoga para los ínfimos puede deducirse a partir de la propiedad de completez como sigue. Suponer que S es un subconjunto no vacío de ℝ que está acotado inferiormente. Entonces el conjunto no vacío $\overline{S} := \{-s : s \in S\}$ está acotado superiormente y la propiedad del supremo implica que $u := \sup \overline{S}$ existe en ℝ. El lector deberá verificar en detalle que $-u$ es el ínfimo de S.

Ejercicios de la sección 2.3

1. Sea $S_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$. Demostrar en detalle que el conjunto S_1 tiene cotas inferiores, pero no cotas superiores. Demostrar que $\inf S_1 = 0$.

2. Sea $S_2 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. ¿El conjunto S_2 tiene cotas inferiores? ¿El conjunto S_2 tiene cotas superiores? ¿Existe $\inf S_2$? ¿Existe $\sup S_2$? Demuestre sus afirmaciones.

3. Sea $S_3 := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que $\sup S_3 = 1$ e $\inf S_3 \ge 0$. (Más adelante, en la sección 2.4, a partir de la propiedad de Arquímedes, se establecerá que $\inf S_3 = 0$.)

4. Sea $S_4 := \{1 - (-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}$. Encontrar $\inf S_4$ y $\sup S_4$.

5. Sea S un subconjunto no vacío de ℝ que está acotado inferiormente. Demostrar que $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$.

6. Si un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ contiene una de sus cotas superiores, demostrar que esta cota superior es el supremo de S.

7. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demostrar que $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S si y sólo si las condiciones $t \in \mathbb{R}$ y $t > u$ implican que $t \notin S$.

8. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demostrar que si $u = \sup S$, entonces para todo número $n \in \mathbb{N}$ el número $u - 1/n$ no es una cota superior de S, pero que el número $u + 1/n$ es una cota superior de S. (El recíproco también es verdadero; véase el ejercicio 2.4.3.)

9. Demostrar que si A y B son subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, entonces $A \cup B$ es un conjunto acotado. Demostrar que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

10. Sea S un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ y sea S_0 un subconjunto no vacío de S. Demostrar que $\inf S \leq \inf S_0 \leq \sup S_0 \leq \sup S$.

11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y suponer que $s^* := \sup S$ pertenece a S. Si $u \notin S$, demostrar que $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.

12. Demostrar que el conjunto no vacío finito $S \subseteq \mathbb{R}$ contiene a su supremo. [*Sugerencia*: aplicar la inducción matemática y el ejercicio anterior.]

13. Demostrar que las afirmaciones 1) y 1′) que anteceden al lema 2.3.3 son equivalentes.

14. Demostrar que las afirmaciones 2), 2′), 2″) y 2‴) que anteceden al lema 2.3.3 son equivalentes.

15. Desarrollar los detalles de la demostración del lema 2.3.3.

SECCIÓN 2.4 Aplicaciones de la propiedad del supremo

Se examina ahora cómo trabajar con supremos e ínfimos. Se presentan asimismo varias aplicaciones de suma importancia de estos conceptos para deducir propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$. Se empieza con ejemplos que ilustran útiles técnicas al aplicar las ideas del supremo y del ínfimo.

2.4.1 Ejemplos **a)** Es un hecho importante que los procedimientos para determinar supremos e ínfimos son compatibles con las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$. En calidad de ejemplo, se presenta a continuación la compatibilidad de la determinación de supremos y la adición.

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente y sea a un número cualquiera en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $a + S := \{a + s : s \in S\}$. Se demostrará que

$$\sup(a + S) = a + \sup S.$$

Si se hace $u := \sup S$, entonces $x \le u$ para toda $x \in S$, por lo que $a + x \le a + u$. Por lo tanto, $a + u$ es una cota superior del conjunto $a + S$; por consiguiente, se tiene $\sup(a + S) \le a + u$.

Ahora bien, si v es *cualquier* cota superior del conjunto $a + S$, entonces $a + x \le v$ para toda $x \in S$. En consecuencia, $x \le v - a$ para toda $x \in S$, por lo que $v - a$ es una cota superior de S. Por lo tanto, $u = \sup S \le v - a$, de donde se obtiene $a + u \le v$. Puesto que v es cualquier cota superior de $a + S$, puede sustituirse v por $\sup(a + S)$ para obtener $a + u \le \sup(a + S)$.

Al combinar estas desigualdades se concluye que

$$\sup(a + S) = a + u = a + \sup S.$$

Para relaciones similares entre los supremos y los ínfimos de conjuntos y las operaciones de adición y multiplicación, véanse los ejercicios.

b) Cuando intervienen supremos o ínfimos de dos conjuntos, con frecuencia es necesario establecer los resultados en dos etapas, trabajando con un conjunto a la vez. A continuación se presenta un ejemplo.

Suponer que A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que satisfacen la propiedad:

$$a \le b \qquad \text{para toda } a \in A \text{ y toda } b \in B.$$

Se demostrará que

$$\sup A \le \inf B.$$

Porque, dada $b \in B$, se tiene $a \le b$ para toda $a \in A$. Esto significa que b es una cota superior de A, de donde $\sup A \le b$. Ahora bien, ya que la última desigualdad se cumple para toda $b \in B$, se observa que el número $\sup A$ es una cota inferior del conjunto B. Por lo tanto, se concluye que $\sup A \le \inf B$. □

Funciones

La idea de cota superior y cota inferior se aplica a funciones considerando el codominio de una función. Dada una función $f : D \to \mathbb{R}$, se dice que f está **acotada superiormente** si el conjunto $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ está acotado superiormente en $\mathbb{R}$; es decir, existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \le B$ para toda $x \in D$. Del mismo modo, la función f está **acotada inferiormente** si el conjunto $f(D)$ está acotado inferiormente. Se dice que f está **acotada** si está acotada superior e inferiormente; esto es equivalente a decir que existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le B$ para toda $x \in D$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo trabajar con supremos e ínfimos de funciones.

2.4.2 Ejemplo Suponer que f y g son funciones reales con dominios comunes $D \subseteq \mathbb{R}$. Se supone que f y g están acotadas.

a) Si $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in D$, entonces $\sup f(D) \leq \sup g(D)$, que en ocasiones se escribe:

$$\sup_{x \in D} f(x) \leq \sup_{x \in D} g(x).$$

Se empieza observando que $f(x) \leq g(x) \leq \sup g(D)$, lo cual implica que el número $\sup g(D)$ es una cota superior de $f(D)$. Por lo tanto, $\sup f(D) \leq \sup g(D)$.
b) Se observa que la hipótesis $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in D$ del inciso a) no implica ninguna relación entre $\sup f(D)$ e $\text{ínf}\, g(D)$.

Por ejemplo, si $f(x) := x^2$ y $g(x) := x$ con $D = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$, entonces $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in D$. Sin embargo, se observa que $\sup f(D) = 1$ e $\text{ínf}\, g(D) = 0$. Puesto que $\sup g(D) = 1$, es válida la conclusión del inciso a).
c) Si $f(x) \leq g(y)$ para toda $x, y \in D$, entonces puede concluirse que $\sup f(D) \leq \text{ínf}\, g(D)$, lo que puede escribirse como:

$$\sup_{x \in D} f(x) \leq \operatorname*{ínf}_{y \in D} g(y).$$

[Adviértase que las funciones del inciso b) no satisfacen esta hipótesis.]

La demostración se hace en dos etapas, como en el ejemplo 2.4.1b. El lector deberá desarrollar los detalles del razonamiento. □

En los ejercicios se presentan otras relaciones entre supremos e ínfimos de funciones.

La propiedad de Arquímedes

Debido a la familiaridad del lector con el conjunto $\mathbb{R}$ y a la representación habitual de la recta real, quizá parezca obvio que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales *no* está acotado en $\mathbb{R}$. ¿Cómo puede demostrarse este hecho "obvio"? En realidad no puede hacerse usando únicamente las propiedades algebraicas y de orden dadas en la sección 2.1. De hecho, es necesario usar la propiedad de completez de $\mathbb{R}$ así como la propiedad inductiva de $\mathbb{N}$ (es decir, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$).

La ausencia de cotas superiores para $\mathbb{N}$ significa que dado cualquier número real x, existe un número natural n (el cual depende de x) tal que $x < n$.

2.4.3 Propiedad de Arquímedes *Si* $x \in \mathbb{R}$, *entonces existe* $n_x \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < n_x$.

Demostración. Si la afirmación es falsa, entonces $n \leq x$ para toda $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto, x es una cota superior de $\mathbb{N}$. En consecuencia, por la propiedad de completez, el conjunto no vacío $\mathbb{N}$ tiene un supremo $u \in \mathbb{R}$. Al restar 1 de u se obtiene un número $u - 1$ que es menor que el supremo u de $\mathbb{N}$. Por lo tanto, $u - 1$ no es una cota superior de $\mathbb{N}$, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ con $u - 1 < m$. Al sumar 1 se obtiene $u < m + 1$, y como $m + 1 \in \mathbb{N}$ esta desigualdad contradice el hecho de que u es una cota superior de $\mathbb{N}$. Q.E.D.

2.4.4 Corolario *Si* $S := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, *entonces* $\inf S = 0$.

Demostración. Puesto que el conjunto $S \neq \emptyset$ está acotado inferiormente por 0, tiene un ínfimo y se hace $w := \inf S$. Es claro que $w \geq 0$. Para toda $\varepsilon > 0$, la propiedad de Arquímedes implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/\varepsilon < n$, lo cual implica que $1/n < \varepsilon$. Por lo tanto, se tiene

$$0 \leq w \leq 1/n < \varepsilon.$$

Pero como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, del teorema 2.1.9 se sigue que $w = 0$. Q.E.D.

2.4.5 Corolario *Si* $t > 0$, *existe* $n_t \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < 1/n_t < t$.

Demostración. Puesto que $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ y $t > 0$, entonces t no es una cota inferior del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n_t < t$. Q.E.D.

2.4.6 Corolario *Si* $y > 0$, *existe* $n_y \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_y - 1 \leq y < n_y$.

Demostración. La propiedad de Arquímedes asegura que el subconjunto $E_y := \{m \in \mathbb{N} : y < m\}$ de $\mathbb{N}$ es no vacío. Por la propiedad de buen orden 1.2.1, E_y tiene un elemento mínimo, el cual se denota por n_y. Entonces $n_y - 1$ no pertenece a E_y y, por consiguiente, se tiene $n_y - 1 \leq y < n_y$. Q.E.D.

Considerados en conjunto, en ocasiones se hace referencia a los corolarios 2.4.4–2.4.6 como la propiedad de Arquímedes de $\mathbb{R}$.

La existencia de $\sqrt{2}$

La importancia de la propiedad del supremo radica en el hecho de que garantiza la existencia de números reales bajo ciertas hipótesis. En muchas ocasiones se hará uso de ella en esta forma. Por el momento, se ilustrará este uso demostrando la existencia de un número real positivo x tal que $x^2 = 2$; es decir, la raíz cuadrada positiva de 2. Se demostró ya (ver el teorema 2.1.4) que dicha x no puede ser un número racional; por tanto, en realidad se estará deduciendo la existencia de al menos un número irracional.

2.4.7 Teorema *Existe un número real positivo* x *tal que* $x^2 = 2$.

Demostración. Sea $S := \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s, s^2 < 2\}$. Puesto que $1 \in S$, el conjunto es no vacío. Asimismo, S está acotado superiormente por 2, porque si $t > 2$, entonces $t^2 > 4$, en cuyo caso $t \notin S$. En consecuencia, la propiedad del supremo implica que el conjunto S tiene un supremo en $\mathbb{R}$ y se hace $x := \sup S$. Adviértase que $x > 1$.

Se demostrará que $x^2 = 2$ descartando las otras dos posibilidades: $x^2 < 2$ y $x^2 > 2$.

Se supone primero que $x^2 < 2$. Se probará que este supuesto contradice el hecho de que $x = \sup S$ encontrando una $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1/n \in S$, lo cual impli-

ca que x no es una cota superior de S. Así, para ver cómo se elige n, obsérvese que $1/n^2 \le 1/n$, de modo que

$$\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \le x^2 + \frac{1}{n}(2x+1).$$

Por tanto, si n se puede elegir de tal modo que

$$\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2,$$

entonces se obtiene $(x + 1/n)^2 < x^2 + (2 - x^2) = 2$. Por hipótesis se tiene $2 - x^2 > 0$, de donde $(2 - x^2)/(2x + 1) > 0$. Por consiguiente, puede aplicarse la propiedad de Arquímedes (corolario 2.4.5) para obtener $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}.$$

Estos pasos pueden invertirse para demostrar que para esta elección de n se tiene $x + 1/n \in S$, lo cual contradice el hecho de que x es una cota superior de S. Por lo tanto, no puede tenerse $x^2 < 2$.

Se supone ahora que $x^2 > 2$. Se probará que en tal caso es posible encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $x - 1/m$ es también una cota superior de S, lo cual contradice el hecho de que $x = \sup S$. Para ello, obsérvese que

$$\left(x-\frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}.$$

Por tanto, si m se puede elegir de tal modo que

$$\frac{2x}{m} < x^2 - 2,$$

entonces $(x - 1/m)^2 > x^2 - (x^2 - 2) = 2$. Ahora bien, por hipótesis se tiene $x^2 - 2 > 0$, de donde $(x^2 - 2)/2x > 0$. Por tanto, por la propiedad de Arquímedes, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{x^2-2}{2x}.$$

Estos pasos pueden invertirse para demostrar que para esta elección de m se tiene $(x - 1/m)^2 > 2$. Ahora bien, si $s \in S$, entonces $s^2 < 2 < (x - 1/m)^2$, de donde, por 2.1.13a, se sigue que $s < x - 1/m$. Esto implica que $x - 1/m$ es una cota superior de S, lo cual contradice el hecho de que $x = \sup S$. Por lo tanto, no puede tenerse $x^2 > 2$.

Puesto que se han excluido las posibilidades $x^2 < 2$ y $x^2 > 2$, debe tenerse $x^2 = 2$. Q.E.D.

Haciendo ligeras modificaciones en el razonamiento anterior, el lector puede demostrar que si $a > 0$, entonces existe un número $b > 0$ único tal que $b^2 = a$. A b se le llama la **raíz cuadrada positiva** de a y se denota por $b = \sqrt{a}$ o $b = a^{1/2}$. Es posible formular un razonamiento un tanto más complicado en el que se usa el teorema del binomio para establecer la existencia de una **raíz n-ésima positiva** única de a, denotada por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{1/n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación Si en la demostración del teorema 2.4.7 el conjunto S se reemplaza con el conjunto de los números racionales $T := \{r \in \mathbb{Q} : 0 \le r, r^2 < 2\}$, entonces el razonamiento lleva a la conclusión de que $y := \sup T$ satisface $y^2 = 2$. Puesto que en el teorema 2.1.4 se vio que y no puede ser un número racional, se infiere que el conjunto T que consiste en los números racionales no tiene un supremo que pertenezca al conjunto $\mathbb{Q}$. Por tanto, el campo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales *no* posee la propiedad de completez.

Densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$

Se sabe ahora que existe al menos un número real irracional, a saber, $\sqrt{2}$. En realidad, hay "más" números irracionales que racionales en el sentido de que el conjunto de los números racionales es enumerable (como se demostró en la sección 1.3), en tanto que el conjunto de los números irracionales no lo es (véase la sección 2.5). Sin embargo, se demuestra enseguida que no obstante esta aparente disparidad, el conjunto de los números racionales es "denso" en $\mathbb{R}$, en el sentido de que dados dos números reales cualesquiera, entre ellos hay un número racional (de hecho, hay un número infinito).

2.4.8 Teorema de densidad *Si* x *y* y *son números reales cualesquiera con* x < y, *entonces existe un número racional* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* x < r < y.

Demostración. El hecho de suponer que $x > 0$ no tiene efecto sobre el carácter general del teorema (¿por qué?). Puesto que $y - x > 0$, del corolario 2.4.5 se sigue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < y - x$. Por lo tanto, se tiene $nx + 1 < ny$. Si se aplica el corolario 2.4.6 a $nx > 0$, se obtiene $m \in \mathbb{N}$ con $m - 1 \le nx < m$. Por consiguiente, $m \le nx + 1 < ny$, de donde $nx < m < ny$. Por lo tanto, el número racional $r := m/n$ satisface $x < r < y$. Q.E.D.

Para completar la discusión del entrelazamiento de los números racionales y los irracionales, se tiene la misma "propiedad de densidad" para el conjunto de los números irracionales.

2.4.9 Corolario *Si* x *y* y *son números reales cualesquiera con* x < y, *entonces existe un número irracional* z *tal que* x < z < y.

Demostración. Si se aplica el teorema de densidad 2.4.8 a los números reales $x/\sqrt{2}$ y $y/\sqrt{2}$, se obtiene un número racional $r \ne 0$ (¿por qué?) tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Entonces $z := r\sqrt{2}$ es irracional (¿por qué?) y satisface $x < z < y$. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 2.4

1. Demostrar que $\sup\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. Si $S := \{1/n - 1/m : n, m \in \mathbb{N}\}$, encontrar $\inf S$ y $\sup S$.

3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demostrar que si un número u en $\mathbb{R}$ tiene las propiedades: (i) para toda $n \in \mathbb{N}$ el número $u - 1/n$ no es una cota superior de S, y (ii) para todo número $n \in \mathbb{N}$ el número $u + 1/n$ es una cota superior de S, entonces $u = \sup S$. (Este resultado es el recíproco del ejercicio 2.3.8.)

4. Sea S un conjunto no vacío acotado en $\mathbb{R}$.

   a) Sea $a > 0$ y sea $aS := \{as : s \in S\}$. Demostrar que

   $$\text{ínf}(aS) = a \text{ ínf } S, \qquad \sup(aS) = a \sup S.$$

   b) Sea $b < 0$ y sea $bS := \{bs : s \in S\}$. Demostrar que

   $$\text{ínf}(bS) = b \sup S, \qquad \sup(bS) = b \text{ ínf } S.$$

5. Sea X un conjunto no vacío y sea que $f : X \to \mathbb{R}$ tenga un codominio acotado en $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$, demostrar que el ejemplo 2.4.1a implica que

   $$\sup\{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

   Demostrar que se tiene

   $$\text{ínf}\{a + f(x) : x \in X\} = a + \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}.$$

6. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y sea $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ y que $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf } A + \text{ínf } B$.

7. Sea X un conjunto no vacío y sea que f y g estén definidas en X y tengan codominios acotados en $\mathbb{R}$. Demostrar que

   $$\sup\{f(x) + g(x) : x \in X\} \le \sup\{f(x) : x \in X\} + \sup\{g(x) : x \in X\}$$

   y que

   $$\text{ínf}\{f(x) : x \in X\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in X\} \le \text{ínf}\{f(x) + g(x) : x \in X\}.$$

   Dar ejemplos que muestren que cada una de estas desigualdades puede ser una igualdad o una desigualdad estricta.

8. Sea $X = Y := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Se define $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ por $h(x, y) := 2x + y$.

   a) Para toda $x \in X$, encontrar $f(x) := \sup\{h(x, y) : y \in Y\}$; encontrar después $\text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$.
   b) Para toda $y \in Y$, encontrar $g(y) := \text{ínf}\{h(x, y) : x \in X\}$; encontrar después $\sup\{g(y) : y \in Y\}$. Comparar el resultado con el obtenido en el inciso a).

9. Realizar los cálculos de los incisos a) y b) del ejercicio precedente para la función $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida por

   $$h(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ 1 & \text{si } x \ge y. \end{cases}$$

10. Sean X y Y conjuntos no vacíos y sea que $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ tenga codominio acotado en $\mathbb{R}$. Sea que $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$ estén definidas por

    $$f(x) := \sup\{h(x, y) : y \in Y\} \qquad g(y) := \text{ínf}\{h(x, y) : x \in X\}$$

    Demostrar que

    $$\sup\{g(y) : y \in Y\} \le \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$$

    En ocasiones esto se expresa escribiendo

    $$\sup_y \text{ínf}_x h(x, y) \le \text{ínf}_x \sup_y h(x, y).$$

Obsérvese que con los ejercicios 8 y 9 se demuestra que la desigualdad puede ser una igualdad o bien una desigualdad estricta.

11. Sean X y Y conjuntos no vacíos y sea que $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ tenga codominio acotado en $\mathbb{R}$. Sea que $F : X \to \mathbb{R}$ y $G : Y \to \mathbb{R}$ estén definidas por

$$F(x) := \sup\{h(x, y) : y \in Y\}, \qquad G(y) := \sup\{h(x, y) : x \in X\}.$$

Establecer el **principio de los supremos iterados**:

$$\sup\{h(x, y) : x \in X, y \in Y\} = \sup\{F(x) : x \in X\} = \sup\{G(y) : y \in Y\}.$$

En ocasiones esto se expresa con símbolos por

$$\sup_{x,y} h(x, y) = \sup_{x} \sup_{y} h(x, y) = \sup_{y} \sup_{x} h(x, y)$$

12. Dada cualquier $x \in \mathbb{R}$, demostrar que existe una $n \in \mathbb{Z}$ *única* tal que $n - 1 \le x < n$.

13. Si $y > 0$, demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^n < y$.

14. Modificar el razonamiento del teorema 2.4.7 para demostrar que existe un número real positivo y tal que $y^2 = 3$.

15. Modificar el razonamiento del teorema 2.4.7 para demostrar que si $a > 0$, entonces existe un número real positivo z tal que $z^2 = a$.

16. Modificar el razonamiento del teorema 2.4.7 para demostrar que existe un número real positivo u tal que $u^3 = 2$.

17. Completar la demostración del teorema de densidad 2.4.8 eliminando el supuesto de que $x > 0$.

18. Si $u > 0$ es cualquier número real y $x < y$, demostrar que existe un número racional r tal que $x < ru < y$. (Por consiguiente, el conjunto $\{ru : r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.)

SECCIÓN 2.5 Intervalos

La relación de orden en $\mathbb{R}$ determina una colección natural de subconjuntos llamados "intervalos". La notación y terminología para estos conjuntos especiales resultarán familiares por cursos anteriores. Si $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $a < b$, entonces el **intervalo abierto** determinado por a y b es el conjunto

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

A los puntos a y b se les llama los **puntos terminales** del intervalo; sin embargo, en un intervalo abierto no están incluidos los puntos terminales. Si ambos puntos terminales se incorporan a este intervalo abierto, se obtiene entonces el **intervalo cerrado** determinado por a y b, a saber, el conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}.$$

Los dos intervalos **semiabiertos** (o **semicerrados**) determinados por a y b son $[a, b)$, que incluye el punto terminal a, y $(a, b]$, que incluye el punto terminal b.

Cada uno de estos cuatro intervalos está acotado y tiene una **longitud** definida por $b - a$. Si $a = b$, el intervalo abierto correspondiente es el conjunto vacío $(a, a) = \emptyset$, mientras que el intervalo cerrado correspondiente es el conjunto con un solo elemento (*singleton*) $[a, a] = \{a\}$.

Hay cinco tipos de intervalos no acotados en los cuales se usan los símbolos ∞ (o $+\infty$) y $-\infty$ como convención de notación en lugar de los puntos terminales. Los **intervalos abiertos infinitos** son los conjuntos de la forma

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \text{y} \quad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

El primer conjunto no tiene cotas superiores y el segundo no tiene cotas inferiores. Al agregar los puntos terminales se obtienen los **intervalos cerrados infinitos**:

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad \text{y} \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

Con frecuencia resulta conveniente considerar al conjunto $\mathbb{R}$ en su totalidad como un intervalo infinito; en este caso se escribe $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$. Ningún punto es un punto terminal de $(-\infty, \infty)$.

Atención Es necesario hacer hincapié en que ∞ y $-\infty$ *no* son elementos de $\mathbb{R}$, sino únicamente símbolos convenientes.

Caracterización de intervalos

Una propiedad obvia de los intervalos es que si dos puntos x, y con $x < y$ pertenecen a un intervalo I, entonces cualquier punto que esté entre ellos también pertenece a I. Es decir, si $x < t < y$, entonces el punto t pertenece al mismo intervalo que x y y. En otras palabras, si x y y pertenecen a un intervalo I, entonces el intervalo $[x, y]$ está contenido en I. Se demuestra a continuación que un subconjunto de $\mathbb{R}$ que posee esta propiedad debe ser un intervalo.

2.5.1 Teorema de caracterización *Si* S *es un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que contiene al menos dos puntos y tiene la propiedad*

$$\textit{si } \mathrm{x, y} \in \mathrm{S} \ \ \textit{y} \ \ \mathrm{x} < \mathrm{y}, \ \ \textit{entonces } [\mathrm{x, y}] \subseteq \mathrm{S}, \tag{1}$$

entonces S *es un intervalo.*

Demostración. Hay cuatro casos por considerar: (i) S está acotado, (ii) S está acotado superiormente pero no inferiormente, (iii) S está acotado inferiormente pero no superiormente, y (iv) S no está acotado ni superior ni inferiormente.

Caso (i): sea $a := \inf S$ y $b := \sup S$. Entonces $S \subseteq [a, b]$ y se demostrará que $(a, b) \subseteq S$.

Si $a < z < b$, entonces z no es una cota inferior de S, por lo que existe $x \in S$ con $x < z$. Asimismo, z no es una cota superior de S, por lo que existe $y \in S$ con $z < y$. Por lo tanto, $z \in [x, y]$, por lo que la propiedad (1) implica que $z \in S$. Puesto que z es un elemento arbitrario de (a, b), se concluye que $(a, b) \subseteq S$.

Ahora bien, si $a \in S$ y $b \in S$, entonces $S = [a, b]$. (¿Por qué?) Si $a \notin S$ y si $b \notin S$, entonces $S = (a, b)$. Las otras posibilidades llevan a $S = (a, b]$, o bien a $S = [a, b)$.

Caso (ii): sea $b := \sup S$. Entonces $S \subseteq (-\infty, b]$ y así se demostrará que $(-\infty, b) \subseteq S$. Ya que si $z < b$, entonces existen $x, y \in S$ tales que $z \in [x, y] \subseteq S$. (¿Por qué?) Por lo tanto, $(-\infty, b) \subseteq S$. Si $b \in S$, entonces $S = (-\infty, b]$ y si $b \notin S$, entonces $S = (-\infty, b)$.

Los casos (iii) y (iv) se dejan como ejercicios. Q.E.D.

Intervalos anidados

Se dice que una sucesión de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, está **anidada** si es válida la siguiente cadena de inclusiones (véase la figura 2.5.1):

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

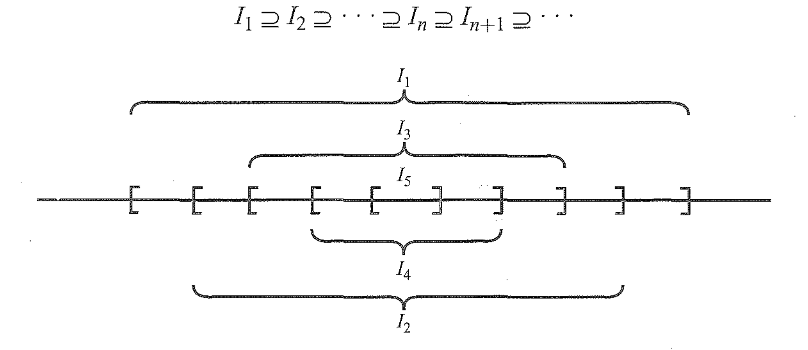


Figura 2.5.1 Intervalos anidados.

Por ejemplo, si $I_n := [0, 1/n]$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $I_n \supseteq I_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que esta sucesión de intervalos está anidada. En este caso, el elemento 0 pertenece a todo I_n y puede aplicarse la propiedad de Arquímedes 2.4.5 para demostrar que 0 es el único elemento común. (Demostrarlo.) Lo anterior se denota escribiendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

Es importante entender que, en general, una sucesión anidada de intervalos *no* tiene necesariamente un punto común. Por ejemplo, si $J_n := (0, 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces esta sucesión de intervalos está anidada, pero los intervalos no tienen ningún punto común, ya que para toda $x > 0$ dada existe (¿por qué?) $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < x$, de tal modo que $x \notin J_m$. Del mismo modo, la sucesión de intervalos $K_n := (n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, está anidada pero no tiene ningún punto común. (¿Por qué?)

Sin embargo, una propiedad muy importante de $\mathbb{R}$ es que toda sucesión anidada de intervalos *acotados cerrados* tiene un punto común, como se demuestra a continuación. Adviértase que la completez de $\mathbb{R}$ desempeña un papel central en el establecimiento de esta propiedad.

2.5.2 Propiedad de los intervalos anidados *Si* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, *es una sucesión anidada de intervalos acotados cerrados, entonces existe un número* $\xi \in \mathbb{R}$ *tal que* $\xi \in I_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que los intervalos están anidados, se tiene $I_n \subseteq I_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $a_n \leq b_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, el conjunto no vacío $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente y se hace que ξ sea su supremo. Evidentemente, $a_n \leq \xi$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se afirma asimismo que $\xi \leq b_n$ para toda n. Lo anterior se establece probando que para cualquier n particular, el número b_n es una cota superior del conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Se consideran dos casos. (i) Si $n \leq k$, entonces, como $I_n \supseteq I_k$, se tiene $a_k \leq b_k \leq b_n$. (ii) Si $k < n$, entonces, como $I_k \supseteq I_n$, se tiene $a_k \leq a_n \leq b_n$. (Véase la figura 2.5.2.) Por tanto, se concluye que $a_k \leq b_n$ para toda k, por lo que b_n es una cota superior del conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Por consiguiente, $\xi \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $a_n \leq \xi \leq b_n$ para toda n, se tiene $\xi \in I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

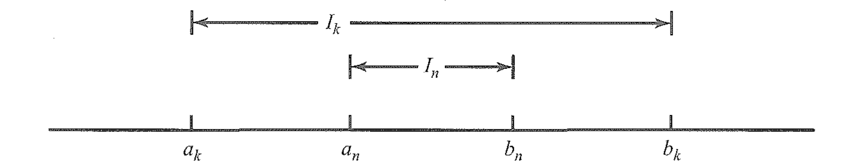


Figura 2.5.2 Si $k < n$, entonces $I_n \subseteq I_k$.

2.5.3 Teorema *Si* $\mathrm{I_n} := [\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}]$, $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, *es una sucesión anidada de intervalos acotados cerrados tal que las longitudes* $\mathrm{b_n - a_n}$ *de* $\mathrm{I_n}$ *satisfacen*

$$\text{ínf}\{\mathrm{b_n - a_n : n} \in \mathbb{N}\} = 0,$$

entonces el número ξ *contenido en* $\mathrm{I_n}$ *para toda* $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ *es único.*

Demostración. Si $\eta := \text{ínf}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces puede utilizarse un razonamiento similar al de la demostración de 2.5.2 para probar que $a_n \leq \eta$ para toda n y, en consecuencia, que $\xi \leq \eta$. De hecho, se deja como ejercicio (véase el ejercicio 10) demostrar que $x \in I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $\xi \leq x \leq \eta$. Si se tiene $\text{ínf}\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \eta - \xi \leq b_m - a_m < \varepsilon$. Puesto que esta condición sólo se cumple para $\varepsilon > 0$, del teorema 2.1.9 se sigue que $\eta - \xi = 0$. Por lo tanto, se concluye que $\xi = \eta$ es el único punto que pertenece a I_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

La innumerabilidad de $\mathbb{R}$

El concepto de conjunto enumerable se examinó en la sección 1.3, donde también se estableció la enumerabilidad del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. A continuación se usa la propiedad de los intervalos anidados para demostrar que el conjunto $\mathbb{R}$ es *innumerable*. La demostración fue hecha por Georg Cantor en 1874 en su primer escrito sobre series infinitas. Posteriormente publicó una demostración que utilizaba representaciones decimales de números reales, que es la demostración que se presentará más adelante en esta sección.

2.5.4 Teorema *El conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales no es contable.*

Demostración. Se demostrará que el intervalo unitario $I := [0, 1]$ es un conjunto no contable. Esto implica que el conjunto $\mathbb{R}$ es incontable, ya que si $\mathbb{R}$ fuera contable, entonces el subconjunto I también sería contable. (Véase el teorema 1.3.9a.)

La demostración se hace por reducción al absurdo. Si se supone que I es contable, entonces el conjunto puede enumerarse como $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Se selecciona primero un subintervalo cerrado I_1 de I tal que $x_1 \notin I_1$, después se selecciona un subintervalo cerrado I_2 de I_1 tal que $x_2 \notin I_2$, y así sucesivamente. De esta manera se obtienen los intervalos cerrados no vacíos

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

tal que $I_n \subseteq I$ y $x_n \notin I_n$ para toda n. La propiedad de los intervalos anidados 2.5.2 implica que existe un punto $\xi \in I$ tal que $\xi \in I_n$ para toda n. Por lo tanto, $\xi \neq x_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que la enumeración de I no es un listado completo de los elementos de I, como se afirmó. En consecuencia, I es un conjunto incontable.

Q.E.D.

El hecho de que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales sea incontable puede combinarse con el hecho de que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es contable para concluir que el conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de los números irracionales es incontable. De hecho, ya que la unión de dos conjuntos contables es contable (véase 1.3.7c), si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es contable, entonces, ya que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, se concluye que $\mathbb{R}$ también es un conjunto contable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es un conjunto incontable.

*Representaciones binarias

Se hará una breve digresión para examinar de manera informal las representaciones binarias (decimales) de los números reales. Bastará considerar los números reales entre 0 y 1, ya que las representaciones de los demás números reales puede obtenerse sumando un número positivo o uno negativo.

Si $x \in [0, 1]$, se usará un procedimiento de bisección repetida para asociar una sucesión (a_n) de ceros y unos como se indica a continuación. Si $x \neq \frac{1}{2}$ pertenece al subintervalo izquierdo $[0, \frac{1}{2}]$, se toma $a_1 := 0$, en tanto que si x pertenece al subintervalo derecho $[\frac{1}{2}, 1]$, se toma $a_1 := 1$. Si $x = \frac{1}{2}$, entonces a_1 puede tomarse como 0 o como 1. En cualquiera de los dos casos, se tiene

$$\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1 + 1}{2}.$$

Se hace ahora la bisección del intervalo $\left[\frac{1}{2}\, a_1, \frac{1}{2}(a_1 + 1)\right]$. Si x no es el punto de bisección y pertenece al subintervalo izquierdo, se toma $a_2 := 0$, y si x pertenece al subintervalo derecho, se toma $a_2 := 1$. Si $x = \frac{1}{4}$ o $x = \frac{3}{4}$, a_2 puede tomarse ya sea como 0 o como 1. En cualquier caso, se tiene

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 + 1}{2^2}.$$

*El resto de esta sección puede omitirse en una primera lectura.

Se continúa con este procedimiento de bisección, asignando el valor $a_n := 0$ en la n-ésima etapa si x no es el punto de bisección y está en el subintervalo izquierdo, y asignándole el valor $a_n := 1$ si x está en el subintervalo derecho. De este modo, se obtiene una sucesión (a_n) de ceros o unos que corresponde a una sucesión anidada de intervalos que contienen al punto x. Así, para toda n, se tiene la desigualdad

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{2^n}. \tag{2}$$

Si x es el punto de bisección en la n-ésima etapa, entonces $x = m/2^n$ con m impar. En este caso, puede escogerse el subintervalo izquierdo o el derecho; sin embargo, una vez que se elige este subintervalo, todos los subintervalos subsecuentes en el procedimiento de bisección están determinados. [Por ejemplo, si se elige el subintervalo izquierdo de tal modo que $a_n = 0$, entonces x es el punto terminal derecho de todos los subintervalos subsecuentes y, por consiguiente, $a_k = 1$ para toda $k \geq n + 1$. Por otra parte, si se elige el subintervalo derecho de modo que $a_n = 1$, entonces x es el punto terminal izquierdo de todos los subintervalos subsecuentes y, por consiguiente, $a_k = 0$ para toda $k \geq n + 1$. Por ejemplo, si $x = \frac{3}{4}$, entonces las dos posibles sucesiones para x son $1, 0, 1, 1, 1, \cdots$ y $1, 1, 0, 0, 0, \cdots$.]

Para resumir, *si* $x \in [0, 1]$, *entonces existe una sucesión* (a_n) *de ceros y unos tal que la desigualdad* (2) *se cumple para toda* $n \in \mathbb{N}$. En este caso se escribe

$$x = (.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_2, \tag{3}$$

y a (3) se le llama **representación binaria** de x. Esta representación es única excepto cuando $x = m/2^n$ para m impar, en cuyo caso x tiene las dos representaciones:

$$x = (.a_1 a_2 \cdots a_{n-1}1000 \cdots)_2 = (.a_1 a_2 \cdots a_{n-1}0111 \cdots)_2,$$

una que termina en ceros y la otra que termina en unos.

Recíprocamente, toda sucesión de ceros y unos es la representación binaria de un número real único en $[0, 1]$. La desigualdad correspondiente a (2) determina un intervalo cerrado con longitud $1/2^n$ y la sucesión de estos intervalos está anidada. Por lo tanto, el teorema 2.5.3 implica que existe un número real único x que satisface (2) para toda $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, x tiene la representación binaria $(.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_2$.

Observación El concepto de representación binaria es de suma importancia en esta era de la computadora digital. Un número se ingresa en una computadora digital en "bits", y cada bit se puede poner en uno de dos estados: dejar pasar corriente o no dejar pasar corriente. Estos dos estados corresponden a los valores 1 y 0, respectivamente. En consecuencia, la representación binaria de un número puede almacenarse en una computadora digital en una cadena de bits. Desde luego, debido a que en la práctica sólo puede almacenarse un número finito de bits, las representaciones binarias deben truncarse. Si se usan n dígitos binarios para un número $x \in [0, 1]$, entonces la precisión es a lo sumo $1/2^n$. Por ejemplo, para asegurar una precisión de cuatro cifras decimales, es necesario usar al menos 15 dígitos binarios (o 15 bits).

Representaciones decimales

Las representaciones decimales de los números reales son similares a las representaciones binarias, excepto que los intervalos se subdividen en *diez* subintervalos iguales en vez de en dos.

Por tanto, dada $x \in [0, 1]$, si $[0, 1]$ se subdivide en diez subintervalos iguales, entonces x pertenece al subintervalo $[b_1/10, (b_1 + 1)/10]$ para algún entero b_1 en $\{0, 1, \cdots, 9\}$. Procediendo como en el caso binario, se obtiene una sucesión (b_n) de enteros con $0 \le b_n \le 9$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que x satisface

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \le x \le \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n + 1}{10^n}. \tag{4}$$

En este caso se dice que x tiene una **representación decimal** dada por

$$x = .b_1 b_2 \cdots b_n \cdots.$$

Si $x \ge 1$ y si $B \in \mathbb{N}$ es tal que $B \le x < B + 1$, entonces $x = B.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$, donde la representación decimal de $x - B \in [0, 1]$ es como la de arriba. Los números negativos se tratan de forma similar.

El hecho de que cada decimal determina un número real único se infiere del teorema 2.5.3, ya que cada decimal especifica una sucesión anidada de intervalos con longitud $1/10^n$.

La representación decimal de $x \in [0, 1]$ es única, excepto cuando x es un punto de subdivisión en alguna de las etapas, lo cual puede verse que ocurre cuando $x = m/10^n$ para alguna $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le 10^n$. (También puede suponerse que m no es divisible entre 10.) Cuando x es un punto de subdivisión en la n-ésima etapa, una opción para b_n corresponde a seleccionar el subintervalo izquierdo, lo cual hace que todos los dígitos subsecuentes sean nueves, y la otra opción corresponde a seleccionar el subintervalo derecho, lo cual hace que todos los dígitos subsecuentes sean ceros. [Por ejemplo, si $x = \frac{1}{2}$, entonces $x = .4999 \cdots = .5000 \cdots$, y si $y = 38/100$, entonces $y = .37999 \cdots = .38000 \cdots$.]

Decimales periódicos

Se dice que un decimal $B.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ es **periódico** (o sea, que se **repite**) si existen $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $b_n = b_{n+m}$ para toda $n \ge k$. En este caso, el bloque de dígitos $b_k b_{k+1} \cdots b_{k+m-1}$ se repite una vez que se llega al k-ésimo dígito. Al menor número m con esta propiedad se le llama el **periodo** del decimal. Por ejemplo, $19/88 = .2159090 \cdots 90 \cdots$ tiene periodo $m = 2$ con el bloque 90 que se repite a partir de $k = 4$. Un **decimal exacto** es un decimal periódico en el que el bloque repetido es simplemente el dígito 0.

Se presentará una demostración informal de la afirmación: *un número real positivo es racional si y sólo si su representación decimal es periódica*.

Suponer que $x = p/q$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ no tienen factores enteros comunes. Por resultar conveniente, se supone asimismo que $0 < p < q$. Se observa que el

proceso de realizar la división larga de q entre p da la representación decimal de p/q. Cada paso en el proceso de la división produce un residuo que es un entero de 0 a $q - 1$. Por lo tanto, después de a lo sumo q pasos, algún residuo ocurrirá por segunda vez y, en ese punto, los dígitos en el cociente empezarán a repetirse en ciclos. En consecuencia, la representación decimal de tal número racional es periódica.

Recíprocamente, si un decimal es periódico, entonces representa un número racional. La idea de la demostración se ilustra mejor con un ejemplo. Suponer que $x = 7.31414\cdots14\cdots$. Se multiplica por una potencia de 10 para recorrer el punto decimal al primer bloque repetido, obteniéndose en este caso $10x = 73.1414\cdots$. Se multiplica ahora por una potencia de 10 para mover un bloque a la izquierda del punto decimal, obteniéndose en este caso $1000x = 7314.1414\cdots$. Ahora se restan ambos resultados para obtener un entero, obteniéndose en este caso $1000x - 10x = 7314 - 73 = 7241$, de donde $x = 7241/990$, que es un número racional.

La segunda demostración de Cantor

Se presenta a continuación la segunda demostración de Cantor de la incontabilidad de $\mathbb{R}$. Se trata del elegante razonamiento de la "diagonal" basado en las representaciones decimales de los números reales.

2.5.5 Teorema *El intervalo unitario* $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ *no es contable.*

Demostración. La demostración se hace por reducción al absurdo. Se usará el hecho de que todo número real $x \in [0, 1]$ tiene una representación decimal $x = 0.b_1b_2\,b_3\cdots$, donde $b_i = 0, 1\cdots, 9$. Suponer que existe una enumeración $x_1, x_2, x_3\cdots$ de todos los números en $[0, 1]$, la cual se desarrolla como:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.b_{11}b_{12}b_{13}\cdots b_{1n}\cdots,\\
x_2 &= 0.b_{21}b_{22}b_{23}\cdots b_{2n}\cdots,\\
x_3 &= 0.b_{31}b_{32}b_{33}\cdots b_{3n}\cdots,\\
&\cdots \quad \cdots\\
x_n &= 0.b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots b_{nn}\cdots,\\
&\cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

Se define ahora un número real $y := 0.y_1y_2\,y_3\cdots y_n\cdots$ haciendo $y_1 := 2$ si $b_{11} \geq 5$ y $y_1 := 7$ si $b_{11} \leq 4$; en general, se hace

$$
y_n := \begin{cases} 2 & \text{si } b_{nn} \geq 5,\\ 7 & \text{si } b_{nn} \leq 4. \end{cases}
$$

Entonces $y \in [0, 1]$. Adviértase que el número y no es igual a ninguno de los números con dos representaciones decimales, ya que $y_n \neq 0, 9$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, ya que y y x_n difieren en la n-ésima cifra decimal, entonces $y \neq x_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, y no está incluida en la enumeración de $[0, 1]$, lo cual contradice la hipótesis. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 2.5

1. Si $I := [a, b]$ e $I' := [a', b']$ son intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, demostrar que $I \subseteq I'$ si y sólo si $a' \leq a$ y $b \leq b'$.

2. Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, demostrar que S está acotado si y sólo si existe un intervalo acotado cerrado I tal que $S \subseteq I$.

3. Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío acotado e $I_S := [\text{ínf } S, \text{sup } S]$, demostrar que $S \subseteq I_S$. Además, si J es cualquier intervalo acotado cerrado que contiene a S, demostrar que $I_S \subseteq J$.

4. En la demostración del caso (ii) del teorema 2.5.1, explicar por qué x, y existen en S.

5. Desarrollar los detalles de la demostración del caso (iv) del teorema 2.5.1.

6. Si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ es una sucesión anidada de intervalos y si $I_n = [a_n, b_n]$, demostrar que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ y que $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$.

7. Sea $I_n := [0, 1/n]$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

8. Sea $J_n := (0, 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

9. Sea $K_n := (n, \infty)$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

10. Con la notación usada en las demostraciones de los teoremas 2.5.2 y 2.5.3, demostrar que se tiene $\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Demostrar asimismo que $[\xi, \eta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

11. Demostrar que los intervalos obtenidos de las desigualdades incluidas en (2) forman una sucesión anidada.

12. Dar las dos representaciones binarias de $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{16}$.

13. a) Dar los cuatro primeros dígitos de la representación binaria de $\frac{1}{3}$.
    b) Dar la representación binaria completa de $\frac{1}{3}$.

14. Demostrar que si $a_k, b_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ y si

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \neq 0.$$

entonces $n = m$ y $a_k = b_k$ para $k = 1, \cdots, n$.

15. Encontrar la representación decimal de $-\frac{2}{7}$.

16. Expresar $\frac{1}{7}$ y $\frac{2}{19}$ como decimales periódicos.

17. ¿Qué racionales están representados por los decimales periódicos $1.25137\cdots137\cdots$ y $35.14653\cdots653\cdots$?

Capítulo 3

SUCESIONES Y SERIES

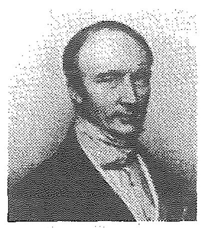
Ahora que se han sentado las bases del sistema de los números reales $\mathbb{R}$, el terreno está preparado para tratar cuestiones de naturaleza más analítica, y se empieza con el estudio de la convergencia de sucesiones. Quizá algunos de los resultados iniciales le resulten familiares al lector por sus cursos de cálculo, pero la presentación aquí pretende ser rigurosa y llevará a teoremas más profundos que los que suelen abordarse en los cursos previos.

Se empieza precisando el significado de la convergencia de una sucesión de números reales y se establecen algunos resultados básicos, pero muy útiles, acerca de las sucesiones convergentes. Después se presentan algunos criterios importantes de la convergencia de sucesiones. Entre ellos se encuentran el teorema de convergencia monótona, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones. Es importante que el lector aprenda tanto los teoremas como la forma en que éstos se aplican a sucesiones especiales.

Debido a las limitaciones lineales inherentes a un libro, es necesario decidir dónde ubicar el tema de las series infinitas. Sería razonable que a este capítulo le siguiera una discusión completa de las series infinitas, pero esto retrasaría los importantes temas de la continuidad, la derivación y la integración. Por consiguiente, se ha decidido adoptar un término medio. Se presenta una breve introducción a las series infinitas en la sección 3.7 al final de este capítulo, para ofrecer un tratamiento más extenso en el capítulo 9. Así, los lectores que deseen un examen más a fondo de las series en este punto pueden pasar al capítulo 9 después de terminar el presente capítulo.

Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nació en París justo después de iniciarse la Revolución Francesa. Su padre era abogado en el departamento de policía de París y la familia se vio obligada a huir durante el Reinado del Terror. Como resultado, los primeros años de Cauchy fueron difíciles y desarrolló intensos sentimientos antirrevolucionarios y pro realistas. Después de volver a París, el padre de Cauchy se convirtió en secretario del senado recién formado, el cual incluía a los matemáticos Laplace y Lagrange. Éstos fueron impresionados por el talento matemático del joven Cauchy y lo ayudaron a iniciar su carrera.



Ingresó en la École Polytechnique en 1805 y pronto se forjó una reputación como matemático excepcional. En 1815, el año en que se restauró la monarquía, fue nombrado

(*continúa*)

miembro del cuerpo docente de la École Polytechnique, pero sus sólidas posiciones políticas y sus inflexibles criterios en matemáticas con frecuencia resultaban en relaciones fallidas con sus colegas. Después de la revolución de julio de 1830, Cauchy se rehusó a adherirse al nuevo voto de lealtad y abandonó Francia durante ocho años en un exilio impuesto por voluntad propia. En 1838 aceptó un puesto docente menor en París y en 1848 Napoleón III lo reinstaló en su antiguo nombramiento en la École Polytechnique, donde permaneció hasta su muerte.

Cauchy fue sorprendentemente versátil y prolífico, realizando contribuciones sustanciales en diversas áreas, como en análisis real y complejo, teoría de los números, ecuaciones diferenciales, física matemática y probabilidad. Publicó ocho libros y 789 artículos, y sus obras completas ocupan 26 volúmenes. Fue uno de los matemáticos más importantes de la primera mitad del siglo XIX.

SECCIÓN 3.1 Sucesiones y sus límites

Una sucesión en un conjunto S es una función cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y cuyo codominio está contenido en el conjunto S. En este capítulo se tratan las sucesiones en $\mathbb{R}$ y se examina lo que se entiende por la convergencia de estas sucesiones.

3.1.1 Definición Una **sucesión de números reales** (o **sucesión en** $\mathbb{R}$) es una función definida en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ de los números naturales cuyo codominio está contenido en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

En otras palabras, una sucesión en $\mathbb{R}$ le asigna a cada número natural $n = 1, 2, \cdots$ un número real determinado de manera única. Si $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, el valor de X en n se denotará por lo general por el símbolo x_n en vez de usar la notación de funciones $X(n)$. A los valores x_n también se les llama los **términos** o los **elementos** de la sucesión. Se denotará esta sucesión por las notaciones

$$X, \qquad (x_n), \qquad (x_n : n \in \mathbb{N}).$$

Desde luego, con frecuencia se usarán otras literales, como $Y = (y_k)$, $Z = (z_i)$, etc., para denotar las sucesiones.

Se usan paréntesis a propósito a fin de enfatizar que el ordenamiento inducido por el orden natural de $\mathbb{N}$ es una cuestión importante. Así, por medio de la notación se distingue entre la sucesión $(x_n : n \in \mathbb{N})$, cuyo número infinito de términos tiene un ordenamiento, y el conjunto de valores $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en el codominio de la sucesión, los cuales no están ordenados. Por ejemplo, la sucesión $X := ((-1)^n : n \in \mathbb{N})$ tiene un número infinito de términos que se alternan entre -1 y 1, mientras que el conjunto de valores $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ es igual al conjunto $\{-1, 1\}$, el cual sólo tiene dos elementos.

Es común definir sucesiones dando una fórmula para el n-ésimo término x_n. Con frecuencia resulta conveniente listar los términos de una sucesión en orden, deteniéndose cuando la regla de formación parece evidente. Por ejemplo, la sucesión de los recíprocos de los números pares puede definirse escribiendo

$$X := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots \right),$$

aunque un método más satisfactorio consiste en especificar la fórmula para el término general y escribir

$$X := \left(\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right)$$

o, en forma más simple, $X = (1/2n)$.

Otra manera de definir una sucesión consiste en especificar el valor de x_1 y dar una fórmula para x_{n+1} $(n \geq 1)$ en términos de x_n. En términos más generales, puede especificarse x_1 y dar una fórmula para obtener x_{n+1} a partir de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Se dice que las sucesiones así definidas están definidas **inductivamente** (o **recursivamente**).

3.1.2 Ejemplos **a)** Si $b \in \mathbb{R}$, la sucesión $B := (b, b, b, \cdots)$, cuyos términos son todos iguales a b, recibe el nombre de la **sucesión constante** b. Así, la sucesión constante 1 es la sucesión $(1, 1, 1, \cdots)$, y la sucesión constante 0 es la sucesión $(0, 0, 0, \cdots)$.

b) Si $b \in \mathbb{R}$, entonces $B := (b^n)$ es la sucesión $B = (b, b^2, b^3, \cdots, b^n, \cdots)$. En particular, si $b = \frac{1}{2}$, se obtiene entonces la sucesión

$$\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \right).$$

c) La sucesión de $(2n : n \in \mathbb{N})$ de los números naturales pares puede definirse inductivamente por

$$x_1 := 2, \quad x_{n+1} := x_n + 2,$$

o por la definición

$$y_1 := 2, \quad y_{n+1} := y_1 + y_n.$$

d) La famosa **sucesión de Fibonacci** $F := (f_n)$ está dada por la definición inductiva

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+1} := f_{n-1} + f_n \quad (n \geq 2).$$

Así, cada término después del segundo es la suma de los dos términos precedentes inmediatos. Los diez primeros términos de F resultan ser (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\cdots$). □

El límite de una sucesión

Hay varios conceptos diferentes de límite en el análisis real. El concepto de límite de una sucesión es el más básico de ellos y será el centro de atención en este capítulo.

3.1.3 Definición Se dice que una sucesión $X = (x_n)$ en $\mathbb{R}$ **converge** a $x \in \mathbb{R}$, o que x es el **límite** de (x_n), si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq K(\varepsilon)$ los términos x_n satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$.

Si una sucesión tiene límite, se dice que es **convergente**; si no tiene límite, se dice que la sucesión es **divergente**.

Nota La notación $K(\varepsilon)$ se usa para enfatizar que la elección de K depende del valor de ε. Sin embargo, con frecuencia resulta conveniente escribir K en vez de $K(\varepsilon)$. En la mayoría de los casos, un valor "pequeño" de ε por lo general requerirá de un valor "grande" de K a fin de garantizar que la distancia $|x_n - x|$ entre x_n y x es menor que ε para toda $n \geq K = K(\varepsilon)$.

Cuando una sucesión tiene el límite x, se usará la notación

$$\text{lím}\, X = x \quad \text{o} \quad \text{lím}(x_n) = x.$$

En ocasiones se usará la simbología $x_n \to x$, la cual indica la idea intuitiva de que los valores x_n "se acercan" al número x cuando $n \to \infty$.

3.1.4 Unicidad de límites *Una sucesión en $\mathbb{R}$ puede tener a lo sumo un límite.*

Demostración. Suponer que tanto x' como x'' son límites de (x_n). Para cada $\varepsilon > 0$ existe K' tal que $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ para toda $n \geq K'$, y existe K'' tal que $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ para toda $n \geq K''$. Se hace que K sea el valor mayor de K' y K''. Entonces para $n \geq K$ se aplica la desigualdad del triángulo para obtener

$$\begin{aligned} |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\ &\leq |x' - x_n| + |x_n - x''| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es un número positivo arbitrario, se concluye que $x' - x'' = 0$.

Q.E.D.

Recuérdese que, para $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, la vecindad-ε de x es el conjunto

$$V_\varepsilon(x) := \{u \in \mathbb{R} : |u - x| < \varepsilon\}.$$

(Véase la sección 2.2.) Puesto que $u \in V_\varepsilon(x)$ es equivalente a $|u - x| < \varepsilon$, la definición de convergencia de una sucesión puede formularse en términos de vecindades. En el siguiente teorema se presentan varias formas diferentes de decir que una sucesión x_n converge a x.

3.1.5 Teorema *Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) *X converge a x.*

b) *Para toda $\varepsilon > 0$, existe un número natural K tal que para toda $n \geq K$, los términos x_n satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$.*

c) *Para toda $\varepsilon > 0$, existe un número natural K tal que para toda $n \geq K$, los términos x_n satisfacen $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.*

d) *Para toda vecindad-ε* $V_\varepsilon(x)$ *de* x, *existe un número natural* K *tal que para toda* $n \geq K$, *los términos* x_n *pertenecen a* $V_\varepsilon(x)$.

Demostración. La equivalencia de los incisos a) y b) es tan sólo la definición. La equivalencia de b), c) y d) se sigue de las siguientes implicaciones:

$$|u-x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u-x < \varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon < u < x+\varepsilon \Leftrightarrow u \in V_\varepsilon(x).$$

Q.E.D.

Con el lenguaje de vecindades, la convergencia de la sucesión $X = (x_n)$ al número x puede describirse diciendo: *para toda vecindad-ε* $V_\varepsilon(x)$ *de x, todos los términos de X, con excepción de un número finito de ellos, pertenecen a* $V_\varepsilon(x)$. El número finito de términos que quizá no pertenezcan a la vecindad-ε son $x_1, x_2, \cdots, x_{K-1}$.

Observación La definición del límite de una sucesión de números reales se usa para comprobar que un valor propuesto de x es en realidad el límite. *No* proporciona ningún medio para determinar inicialmente cuál podría ser ese valor. Resultados posteriores contribuirán a este fin, pero con mucha frecuencia en la práctica es necesario llegar a un valor conjeturado del límite mediante el cálculo directo de varios términos de la sucesión. Las computadoras pueden ser de ayuda a este respecto, pero como sólo pueden calcular un número finito de los términos de una sucesión, dichos cálculos de ninguna manera constituyen una demostración del valor del límite.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo se aplica la definición para demostrar que una sucesión tiene un límite particular. En cada caso, se da una ε positiva y se pide encontrar un valor de K, que depende de ε, como lo requiere la definición.

3.1.6 Ejemplos **a)** $\text{lím}(1/n) = 0$.

Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces $1/\varepsilon > 0$. Por la propiedad de Arquímedes 2.4.5, existe un número natural $K = K(\varepsilon)$ tal que $1/K < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq K$, se tiene $1/n \leq 1/K < \varepsilon$. Por consiguiente, si $n \geq K$, entonces

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, puede afirmarse que la sucesión $(1/n)$ converge a 0.

b) $\text{lím}(1/(n^2+1)) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para encontrar K, se observa primero que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora se elige K tal que $1/K < \varepsilon$, como en el inciso a) anterior. Entonces $n \geq K$ implica que $1/n < \varepsilon$ y, por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

En consecuencia, se ha demostrado que el límite de la sucesión es cero.

c) $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+1}\right) = 3.$

Dada $\varepsilon > 0$, quiere obtenerse la desigualdad

$$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \tag{1}$$

cuando n sea lo suficientemente grande. Primero se simplifica la expresión del primer miembro:

$$\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Ahora bien, si la desigualdad $1/n < \varepsilon$ se satisface, entonces la desigualdad (1) se cumple. Así, si $1/K < \varepsilon$, entonces para toda $n \geq K$ también se tiene $1/n < \varepsilon$ y se cumple (1). Por lo tanto, el límite de la sucesión es 3.

d) Si $0 < b < 1$, entonces $\lim(b^n) = 0$.

Se hará uso de las propiedades elementales de la función logaritmo natural. Si $\varepsilon > 0$ está dada, se observa que

$$b^n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \ln b < \ln \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \ln \varepsilon / \ln b.$$

(La última desigualdad se invierte porque $\ln b < 0$.) Por tanto, si se elige que K sea un número tal que $K > \ln \varepsilon/\ln b$, entonces se tendrá $0 < b^n < \varepsilon$ para toda $n \geq K$. Se tiene por tanto que $\lim(b^n) = 0$.

Por ejemplo, si $b = 0.8$ y si está dada $\varepsilon = 0.01$, entonces se necesitaría $K > \ln 0.01/\ln 0.8 \approx 20.6377$. Por tanto, $K = 21$ sería una elección apropiada para $\varepsilon = 0.01$. □

Observación **El juego** $K(\varepsilon)$ Al trabajar con el concepto de convergencia de una sucesión, una manera de recordar la conexión entre la ε y la K consiste en considerarla como si se tratara de un pasatiempo llamado el juego $K(\varepsilon)$. En este juego, el jugador A afirma que cierto número x es el límite de una sucesión (x_n). El jugador B refuta esta afirmación dándole al jugador A un valor específico para $\varepsilon > 0$. El jugador A responde a la refutación proponiendo un valor de K tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ para toda $n > K$. Si el jugador A puede encontrar siempre un valor de K que funcione, entonces gana, y la sucesión es convergente. Sin embargo, si el jugador B puede ofrecer un valor específico de $\varepsilon > 0$ para el que el jugador A no puede responder adecuadamente, entonces el jugador B gana, y se concluye que la sucesión no converge a x.

Para establecer que una sucesión $X = (x_n)$ *no* converge al número x, basta producir un número $\varepsilon_0 > 0$ tal que, sin importar cuál sea el número natural K que se elija, es posible encontrar un número n_K particular que satisface $n_K \geq K$ tal que $|x_{n_K} - x| \geq \varepsilon_0$. (Lo anterior se examina con mayor detalle en la sección 3.4.)

3.1.7 Ejemplo La sucesión $(0, 2, 0, 2, \cdots, 0, 2, \cdots)$ *no* converge al número 0.

Si el jugador A afirma que 0 es el límite de la sucesión, perderá el juego $K(\varepsilon)$ cuando el jugador B le presente el valor $\varepsilon < 2$. Para ser precisos, sea que el jugador B le proponga al jugador A el valor $\varepsilon_0 = 1$. Entonces, sin importar cuál sea el valor que el jugador A elija para K, su respuesta no será adecuada, porque el jugador B responderá seleccionando un número par $n > K$. Entonces el valor correspondiente es $x_n = 2$, de tal modo que $|x_n - 0| = 2 > 1 = \varepsilon_0$. Por consiguiente, el número 0 no es el límite de la sucesión. □

Colas de sucesiones

Es importante entender que la convergencia (o divergencia) de una sucesión $X = (x_n)$ depende únicamente del "comportamiento a la larga" de los términos. Con esto se quiere decir que si para cualquier número natural m se omiten los m primeros términos de la sucesión, entonces la sucesión resultante X_m converge si y sólo si la sucesión original converge y, en este caso, los límites son iguales. Este hecho se enunciará formalmente después de introducir la idea de "cola" de una sucesión.

3.1.8 Definición Si $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ es una sucesión de números reales y si m es un número natural dado, entonces la **cola-m** de X es la sucesión

$$X_m := (x_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots).$$

Por ejemplo, la cola-3 de la sucesión $X = (2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots)$ es la sucesión $X_3 = (8, 10, 12, \cdots, 2n + 6, \cdots)$.

3.1.9 Teorema *Sea* $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *una sucesión de números reales y sea* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces la cola-*m $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ *de* X *converge si y sólo si* X *converge. En este caso,* $\lim X_m = \lim X$.

Demostración. Se observa que para cualquier $p \in \mathbb{N}$, el p-ésimo término de X_m es el $(p + m)$-ésimo término de X. Del mismo modo, si $q > m$, entonces el q-ésimo término de X es el $(q - m)$-ésimo término de X_m.

Suponer que X converge a x. Entonces, dada cualquier $\varepsilon > 0$, si los términos de X para $n \geq K(\varepsilon)$ satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$, entonces los términos de X_m para $k \geq K(\varepsilon) - m$ satisfacen $|x_k - x| < \varepsilon$. Por tanto, puede tomarse $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, de modo que X_m también converge a x.

Recíprocamente, si los términos de X_m para $k \geq K_m(\varepsilon)$ satisfacen $|x_k - x| < \varepsilon$, entonces los términos de X para $n \geq K(\varepsilon) + m$ satisfacen $|x_n - x| < \varepsilon$. En consecuencia, puede tomarse $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$.

Por lo tanto, X converge a x si y sólo si X_m converge a x. Q.E.D.

En ocasiones se dirá que una sucesión X posee cierta propiedad *a la larga* si alguna cola de X tiene dicha propiedad. Por ejemplo, se dice que la sucesión (3, 4, 5, 5, 5, $\cdots$, 5, $\cdots$) es "constante a la larga". Por otra parte, la sucesión (3, 5, 3, 5, $\cdots$, 3, 5, $\cdots$) no es constante a la larga. La noción de convergencia puede formularse utilizando esta terminología: una sucesión X converge a x si y sólo si los

términos de X están a la larga en toda vecindad-ε de x. A continuación se presentan otros casos de esta terminología de "a la larga".

Ejemplos adicionales

Al establecer que un número x es el límite de una sucesión (x_n), con frecuencia se intenta simplificar la diferencia $|x_n - x|$ antes de considerar una $\varepsilon > 0$ y de encontrar una $K(\varepsilon)$, como es requerido por la definición de límite. Se hizo esto en algunos de los ejemplos anteriores. El resultado siguiente es una formulación más formal de esta idea, y en los ejemplos que siguen se hace uso de este procedimiento.

3.1.10 Teorema *Sea* (x_n) *una sucesión de números reales y sea* $x \in \mathbb{R}$. *Si* (a_n) *es una sucesión de números reales positivos con* $\text{lím}(a_n) = 0$ *y si para alguna constante* $C > 0$ *y alguna* $m \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$|x_n - x| \leq Ca_n \quad \textit{para toda} \quad n \geq m,$$

entonces se sigue que $\text{lím}(x_n) = x$.

Demostración. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces como $\text{lím}(a_n) = 0$ se sabe que existe $K = K(\varepsilon/C)$ tal que $n \geq K$ implica que

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon/C.$$

Se sigue en consecuencia que si tanto $n \geq K$ como $n \geq m$, entonces

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C(\varepsilon/C) = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $x = \text{lím}(x_n)$. Q.E.D.

3.1.11 Ejemplos **a)** Si $a > 0$, entonces $\text{lím}\left(\dfrac{1}{1+na}\right) = 0$.

Puesto que $a > 0$, entonces $0 < na < 1 + na$ y, en consecuencia, $0 < 1/(1 + na) < 1/(na)$. Se tiene por tanto

$$\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| \leq \left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n} \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $\text{lím}(1/n) = 0$, puede apelarse al teorema 3.1.10 con $C = 1/a$ y $m = 1$ para inferir que $\text{lím}(1/(1 + na)) = 0$.

b) Si $0 < b < 1$, entonces $\text{lím}(b^n) = 0$.

Este límite se obtuvo antes en el ejemplo 3.1.6d. Se presentará una segunda demostración que ilustra el uso de la desigualdad de Bernoulli (véase el ejemplo 2.1.13c).

Puesto que $0 < b < 1$, puede escribirse $b = 1/(1 + a)$, donde $a := (1/b) - 1$ de modo que $a > 0$. Por la desigualdad de Bernoulli, se tiene $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Por consiguiente,

$$0 < b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}.$$

Así, por el teorema 3.1.10 se concluye que $\lim(b^n) = 0$.

En particular, si $b = 0.8$, de tal modo que $a = 0.25$, y si se da $\varepsilon = 0.01$, entonces la desigualdad precedente da como resultado $K(\varepsilon) = 4/(0.01) = 400$. Al comparar este resultado con el obtenido en el ejemplo 3.1.6d, donde $K = 25$, se observa que este método de estimación no produce el "mejor" valor de K. Sin embargo, cuando el propósito es establecer el límite, la magnitud de K no es relevante.

c) Si $c > 0$, entonces $\lim(c^{1/n}) = 1$.

El caso $c = 1$ es trivial, ya que entonces $(c^{1/n})$ es la sucesión constante $(1, 1, \cdots)$, la cual evidentemente converge a 1.

Si $c > 1$, entonces $c^{1/n} = 1 + d_n$ para alguna $d_n > 0$. En consecuencia, por la desigualdad de Bernoulli 2.1.13c,

$$c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene por tanto $c - 1 \geq nd_n$, de modo que $d_n \leq (c - 1)/n$. Por consiguiente, se tiene

$$|c^{1/n} - 1| = d_n \leq (c-1)\frac{1}{n} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se apela ahora al teorema 3.1.10 para inferir que $\lim(c^{1/n}) = 1$ cuando $c > 1$.

Suponer ahora que $0 < c < 1$; entonces $c^{1/n} = 1/(1 + h_n)$ para alguna $h_n > 0$. En consecuencia, la desigualdad de Bernoulli implica que

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n},$$

de donde se sigue que $0 < h_n < 1/nc$ para $n \in \mathbb{N}$. Se tiene por tanto

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n < \frac{1}{nc}$$

de modo que

$$|c^{1/n} - 1| < \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se aplica ahora el teorema 3.1.10 para inferir que $\lim(c^{1/n}) = 1$ cuando $0 < c < 1$.

d) $\lim(n^{1/n}) = 1$.

Puesto que $n^{1/n} > 1$ para $n > 1$, puede escribirse $n^{1/n} = 1 + k_n$ para alguna $k_n > 0$ cuando $n > 1$. Por consiguiente, $n = (1 + k_n)^n$ para $n > 1$. Por el teorema del binomio, si $n > 1$ se tiene

$$n = 1 + nk_n + \tfrac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geq 1 + \tfrac{1}{2}n(n-1)k_n^2,$$

de donde se sigue que

$$n - 1 \geq \tfrac{1}{2}n(n-1)k_n^2.$$

Por consiguiente, $k_n^2 \leq 2/n$ para $n > 1$. Si $\varepsilon > 0$ está dada, de la propiedad de Arquímedes se sigue que existe un número natural N_ε tal que $2/N_\varepsilon < \varepsilon^2$. Se sigue que si $n \geq \sup\{2, N_\varepsilon\}$, entonces $2/n < \varepsilon^2$, de donde

$$0 < n^{1/n} - 1 = k_n \leq (2/n)^{1/2} < \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se deduce que $\lim(n^{1/n}) = 1$. □

Ejercicios de la sección 3.1

1. La sucesión (x_n) se define por las siguientes fórmulas para el n-ésimo término. Escribir los cinco primeros términos en cada caso:

a) $x_n := 1 + (-1)^n$, b) $x_n := (-1)^n/n$,

c) $x_n := \dfrac{1}{n(n+1)}$, d) $x := \dfrac{1}{n^2+2}$.

2. Se presentan abajo los primeros términos de una sucesión (x_n). Suponiendo que el "patrón natural" indicado por estos términos persiste, dar una fórmula para el n-ésimo término x_n.

a) $5, 7, 9, 11, \cdots$, b) $1/2, -1/4, 1/8, -1/16, \cdots$,
c) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \cdots$, d) $1, 4, 9, 16, \cdots$.

3. Enumerar los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas inductivamente.

a) $x_1 := 1, \quad x_{n+1} = 3x_n + 1$,
b) $y_1 := 2, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + 2/y_n)$,
c) $z_1 := 1, \quad z_2 := 2, \quad z_{n+2} := (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n)$,
d) $s_1 := 3, \quad s_2 := 5, \quad s_{n+2} := s_n + s_{n+1}$.

4. Para cualquier $b \in \mathbb{R}$, demostrar que $\lim(b/n) = 0$.

5. Usar la definición del límite de una sucesión para establecer los siguientes límites.

a) $\lim\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right) = 0$, b) $\lim\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) = 2$,

c) $\lim\left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right) = \dfrac{3}{2}$, d) $\lim\left(\dfrac{n^2-1}{2n^2+3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

6. Demostrar que

a) $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+7}}\right) = 0$, b) $\lim\left(\dfrac{2n}{n+2}\right) = 2$,

c) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right) = 0$, d) $\lim\left(\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\right) = 0$.

7. Sea $x_n := 1/\ln(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$.

a) Usar la definición de límite para demostrar que $\lim(x_n) = 0$.
b) Encontrar un valor específico de $K(\varepsilon)$ como se requiere en la definición de límite para (i) $\varepsilon = 1/2$ y (ii) $\varepsilon = 1/10$.

8. Demostrar que $\lim(x_n) = 0$ si y sólo si $\lim(|x_n|) = 0$. Dar un ejemplo que muestre que la convergencia de $(|x_n|)$ no implica la convergencia de (x_n).

9. Demostrar que si $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim(x_n) = 0$, entonces $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

10. Demostrar que si $\lim(x_n) = x$ y si $x > 0$, entonces existe un número natural M tal que $x_n > 0$ para toda $n \geq M$.

11. Demostrar que $\lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0$.

12. Demostrar que $\lim(1/3^n) = 0$.

13. Sea $b \in \mathbb{R}$ que satisface $0 < b < 1$. Demostrar que $\lim(nb^n) = 0$. [*Sugerencia*: usar el teorema del binomio como en el ejemplo 3.1.11d.]

14. Demostrar que $\lim((2n)^{1/n}) = 1$.

15. Demostrar que $\lim(n^2/n!) = 0$.

16. Demostrar que $\lim(2^n/n!) = 0$. [*Sugerencia*: si $n \geq 3$, entonces $0 < 2^n/n! \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.]

17. Si $\lim(x_n) = x > 0$, demostrar que existe un número natural K tal que si $n \geq K$, entonces $\frac{1}{2}x < x_n < 2x$.

SECCIÓN 3.2 Teoremas de límites

En esta sección se obtienen algunos resultados que permitirán evaluar los límites de ciertas sucesiones de números reales. Estos resultados ampliarán de manera considerable la colección de sucesiones convergentes. Se empieza estableciendo una importante propiedad de las sucesiones convergentes que se necesitarán aquí y en secciones subsecuentes.

3.2.1 Definición Se dice que una sucesión $X = (x_n)$ de números reales está **acotada** si existe un número real $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Así, la sucesión (x_n) está acotada si y sólo si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de sus valores es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

3.2.2 Teorema *Una sucesión convergente de números reales está acotada.*

Demostración. Suponer que $\lim(x_n) = x$ y sea $\varepsilon := 1$. Entonces existe un número natural $K = K(1)$ tal que $|x_n - x| < 1$ para toda $n \geq K$. Si se aplica la desigualdad del triángulo con $n \geq K$, se obtiene

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Si se hace

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, 1 + |x|\},$$

se sigue entonces que $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Se examina ahora la forma en que el proceso del límite interactúa con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de sucesiones. Si $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ son sucesiones de números reales, entonces se define su **suma** como la sucesión $X + Y := (x_n + y_n)$, su **diferencia** como la sucesión $X - Y := (x_n - y_n)$ y su **producto** como la sucesión $X \cdot Y := (x_n y_n)$. Si $c \in \mathbb{R}$, se define el **múltiplo** de X por c como la sucesión $cX := (cx_n)$. Por último, si $Z = (z_n)$ es una sucesión de números reales con $z_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces se define el **cociente** de X y Z como la sucesión $X/Z := (x_n/z_n)$.

Por ejemplo, si X y Y son las sucesiones

$$X := (2, 4, 6, \cdots 2n, \cdots), \quad Y := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right),$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned} X + Y &= \left(\frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \cdots, \frac{2n^2+1}{n}, \cdots\right), \\ X - Y &= \left(\frac{1}{1}, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \cdots, \frac{2n^2-1}{n}, \cdots\right), \\ X \cdot Y &= (2, 2, 2, \cdots, 2, \cdots), \\ 3X &= (6, 12, 18, \cdots, 6n, \cdots), \\ X/Y &= (2, 8, 18, \cdots, 2n^2, \cdots). \end{aligned}$$

Cabe señalar que si Z es la sucesión

$$Z := (0, 2, 0, \cdots, 1 + (-1)^n, \cdots),$$

entonces pueden definirse $X + Z$, $X - Z$ y $X \cdot Z$, pero X/Z no está definida ya que algunos de los términos de Z son cero.

Se demuestra a continuación que las sucesiones obtenidas mediante la aplicación de estas operaciones a sucesiones convergentes dan lugar a nuevas sucesiones cuyos límites pueden predecirse.

3.2.3 Teorema **a)** *Sean* $X = (x_n)$ *y* $Y = (y_n)$ *sucesiones de números reales que convergen a* x *y* y*, respectivamente, y sea* $c \in \mathbb{R}$*. Entonces las sucesiones* $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ *y* cX *convergen a* $x + y$, $x - y$, xy *y* cx*, respectivamente.*

b) *Si* X = (x_n) *converge a* x *y* Z = (z_n) *es una sucesión de números reales diferentes de cero que converge a* z *y si* z ≠ 0, *entonces la sucesión cociente* X/Z *converge a* x/z.

Demostración. a) Para demostrar que $\lim(x_n + y_n) = x + y$ es necesario estimar la magnitud de $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Para ello, se usa la desigualdad del triángulo 2.2.3 para obtener

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y|. \end{aligned}$$

Por hipótesis, si $\varepsilon > 0$, existe un número natural K_1 tal que si $n \geq K_1$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$; asimismo, existe un número natural K_2 tal que si $n \geq K_2$, entonces $|y_n - y| < \varepsilon/2$. En consecuencia, si $K(\varepsilon) := \sup\{K_1, K_2\}$, se sigue que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que $X + Y = (x_n + y_n)$ converge a $x + y$.

Puede usarse exactamente el mismo razonamiento para demostrar que $X - Y = (x_n - y_n)$ converge a $x - y$.

Para demostrar que $X \cdot Y = (x_n y_n)$ converge a xy, se hace la estimación

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y| \\ &= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema 3.2.2, existe un número real $M_1 > 0$ tal que $|x_n| \leq M_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y se hace $M := \sup\{M_1, |y|\}$. En consecuencia, se tiene la estimación

$$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|.$$

De la convergencia de X y Y se concluye que si está dada $\varepsilon > 0$, entonces existen los números naturales K_1 y K_2 tales que si $n \geq K_1$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2M$, y si $n \geq K_2$, entonces $|y_n - y| < \varepsilon/2M$. Se hace ahora $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; entonces, si $n \geq K(\varepsilon)$ se infiere que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq M|y_n - y| + M|x_n - x| \\ &< M(\varepsilon/2M) + M(\varepsilon/2M) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se ha demostrado que la sucesión $X \cdot Y = (x_n y_n)$ converge a xy.

El hecho de que $cX = (cx_n)$ converge a cx puede demostrarse de la misma manera; también puede deducirse tomando Y como la sucesión constante $(c, c, c, \cdots)$. Se le dejan los detalles al lector.

b) Se demuestra a continuación que si $Z = (z_n)$ es una sucesión de números reales diferentes de cero que converge a un límite z diferente de cero, entonces la sucesión $(1/z_n)$ de los recíprocos converge a $1/z$. Primero se hace $\alpha := \frac{1}{2}|z|$, de tal modo que $\alpha > 0$. Puesto que $\text{lím}(z_n) = z$, existe un número natural K_1 tal que si $n \geq K_1$, entonces $|z_n - z| < \alpha$. Del corolario 2.2.4a de la desigualdad del triángulo se sigue que $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ para $n \geq K_1$, de donde se sigue que $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$ para $n \geq K_1$. Por lo tanto, $1/|z_n| \leq 2/|z|$ para $n \geq K_1$, por lo que se tiene la estimación

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|}|z - z_n|$$

$$\leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n| \qquad \text{para toda} \qquad n \geq K_1 .$$

Ahora bien, si está dada $\varepsilon > 0$, existe un número natural K_2 tal que si $n \geq K_2$, entonces $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Por lo tanto, se sigue que si $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$, entonces

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon \qquad \text{para toda} \qquad n > K(\varepsilon).$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que

$$\text{lím}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}.$$

Se completa ahora la demostración del inciso b) tomando Y como la sucesión $(1/z_n)$ y utilizando el hecho de que $X \cdot Y = (x_n/z_n)$ converge a $x(1/z) = x/z$. Q.E.D.

Algunos de los resultados del teorema 3.2.3 pueden extenderse, por inducción matemática, a un número finito de sucesiones convergentes. Por ejemplo, si $A = (a_n)$, $B = (b_n)$, $\cdots$, $Z = (z_n)$ son sucesiones convergentes de números reales, entonces su suma $A + B + \cdots + Z = (a_n + b_n + \cdots + z_n)$ es una sucesión convergente y

$$\text{lím}(a_n + b_n + \cdots + z_n) = \text{lím}(a_n) + \text{lím}(b_n) + \cdots + \text{lím}(z_n). \qquad (1)$$

También su producto $A \cdot B \cdots Z := (a_n b_n \cdots z_n)$ es una sucesión convergente y

$$\text{lím}(a_n b_n \cdots z_n) = (\text{lím}(a_n))\,(\text{lím}(b_n)) \cdots (\text{lím}(z_n)). \qquad (2)$$

En consecuencia, si $k \in \mathbb{N}$ y si $A = (a_n)$ es una sucesión convergente, entonces

$$\text{lím}(a_n^k) = (\text{lím}(a_n))^k \qquad (3)$$

Se le deja al lector la demostración de estas afirmaciones.

3.2.4 Teorema *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión convergente de números reales y si* $x_n \geq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $x = \text{lím}(x_n) \geq 0$.

Demostración. Suponer que la conclusión no es verdadera y que $x < 0$; entonces $\varepsilon := -x$ es positiva. Puesto que X converge a x, existe un número natural K tal que

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \qquad \text{para toda} \quad n \geq K.$$

En particular, se tiene $x_K < x + \varepsilon = x + (-x) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, esta contradicción implica que $x \geq 0$.

Q.E.D.

Se presenta a continuación un útil resultado que es formalmente más sólido que el teorema 3.2.4.

3.2.5 Teorema *Si* $X = (x_n)$ *y* $Y = (y_n)$ *son sucesiones convergentes de números reales y si* $x_n \leq y_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Demostración. Sea $z_n := y_n - x_n$ de tal modo que $Z := (z_n) = Y - X$ y $z_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De los teoremas 3.2.4 y 3.2.3 se sigue que

$$0 \leq \lim Z = \lim(y_n) - \lim(x_n),$$

de donde $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$. Q.E.D.

El resultado siguiente afirma que si todos los términos de una sucesión convergente satisfacen una desigualdad de la forma $a \leq x_n \leq b$, entonces el límite de la sucesión satisface la misma desigualdad. Por consiguiente, si la sucesión es convergente, es posible "pasar al límite" en una desigualdad de este tipo.

3.2.6 Teorema *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión convergente y si* $a \leq x_n \leq b$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a \leq \lim(x_n) \leq b$.

Demostración. Sea Y la sucesión constante $(b, b, b, \cdots)$. El teorema 3.2.5 implica que $\lim X \leq \lim Y = b$. El hecho de que $a \leq \lim X$ se demuestra del mismo modo. Q.E.D.

El siguiente resultado establece que si una sucesión Y está "comprimida" entre dos sucesiones que convergen *al mismo límite*, entonces debe converger a dicho límite.

3.2.7 Teorema de compresión *Suponer que* $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ *y* $Z = (z_n)$ *son sucesiones de números reales tales que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N},$$

y que $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. *Entonces* $Y = (y_n)$ *es convergente y*

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$$

Demostración. Sea $w := \text{lím}(x_n) = \text{lím}(z_n)$. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces de la convergencia de X y Z a w se sigue que existe un número natural K tal que si $n \geq K$, entonces

$$|x_n - w| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |z_n - w| < \varepsilon.$$

Puesto que la hipótesis implica que

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N},$$

se sigue (¿por qué?) que

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$$

para toda $n \geq K$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, esto implica que $\text{lím}(y_n) = w$.

Q.E.D.

Observación Puesto que cualquier cola de una sucesión convergente tiene el mismo límite, es posible hacer menos rigurosas las hipótesis de los teoremas 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7 a fin de aplicarlos a la cola de una sucesión. Por ejemplo, si en el teorema 3.2.4 $X = (x_n)$ es "positiva a la larga" en el sentido de que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0$ para toda $n \geq m$, entonces se cumplirá la misma conclusión de que $x \geq 0$. Modificaciones similares son válidas para los demás teoremas, como el lector deberá comprobar.

3.2.8 Ejemplos **a)** La sucesión (n) es divergente.

Del teorema 3.2.2 se sigue que si la sucesión $X := (n)$ es convergente, entonces existe un número real $M > 0$ tal que $n = |n| < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pero esto contradice la propiedad de Arquímedes 2.4.3.

b) La sucesión $((-1)^n)$ es divergente.

Esta sucesión $X = ((-1)^n)$ está acotada (tomar $M := 1$), por lo que no se puede apelar al teorema 3.2.2. Sin embargo, suponer que existe $a := \text{lím } X$. Sea $\varepsilon := 1$ de tal modo que existe un número natural K_1 tal que

$$|(-1) - a| < 1 \qquad \text{para toda } n \geq K_1.$$

Si n es un número natural impar con $n \geq K_1$, se obtiene $|-1 - a| < 1$, de donde $-2 < a < 0$. (¿Por qué?) Por otra parte, si n es un número natural par con $n \geq K_1$, de esta desigualdad se obtiene $|1 - a| < 1$, de donde $0 < a < 2$. Puesto que a no puede satisfacer ambas desigualdades, la hipótesis de que X es convergente lleva a una contradicción. Por lo tanto, la sucesión X es divergente.

c) $\text{lím}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right) = 2.$

Si se hace $X := (2)$ y $Y := (1/n)$, entonces $((2n + 1)/n) = X + Y$. Así, del teorema 3.2.3a se sigue que $\text{lím}(X + Y) = \text{lím } X + \text{lím } Y = 2 + 0 = 2$.

d) $\text{lím}\left(\dfrac{2n+1}{n+5}\right) = 2.$

Puesto que las sucesiones $(2n + 1)$ y $(n + 5)$ no son convergentes (¿por qué?), no es posible usar directamente el teorema 3.2.3b. Sin embargo, si se escribe

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2+1/n}{1+5/n},$$

la sucesión dada puede obtenerse en una forma en que el teorema 3.2.3b puede aplicarse cuando se hace $X := (2 + 1/n)$ y $Z := (1 + 5/n)$. (Comprobar que se satisfacen todas las hipótesis.) Puesto que $\text{lím}\, X = 2$ y $\text{lím}\, Z = 1 \neq 0$, se deduce que $\text{lím}((2n + 1)/(n + 5)) = 2/1 = 2$.

e) $\text{lím}\left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = 0.$

No se puede aplicar directamente el teorema 3.2.3b. (¿Por qué?) Se observa que

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{n+1/n},$$

pero el teorema 3.2.3b tampoco se aplica en este caso, porque $(n + 1/n)$ no es una sucesión convergente. (¿Por qué no?) Sin embargo, si se escribe

$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2/n}{1+1/n^2},$$

entonces se puede aplicar el teorema 3.2.3b, ya que $\text{lím}(2/n) = 0$ y $\text{lím}(1 + 1/n^2) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, $\text{lím}(2n/(n^2 + 1)) = 0/1 = 0$.

f) $\text{lím}\left(\frac{\text{sen}\, n}{n}\right) = 0.$

No se puede aplicar el teorema 3.2.3b, ya que la sucesión (n) no es convergente [como tampoco lo es la sucesión $(\text{sen}\, n)$]. No parece ser el caso que una manipulación algebraica simple permita reducir la sucesión a una forma en que se aplique el teorema 3.2.3. Sin embargo, si se observa que $-1 \leq \text{sen}\, n \leq 1$, entonces se sigue que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{sen}\, n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, puede aplicarse el teorema de compresión 3.2.7 para inferir que $\text{lím}(n^{-1}\, \text{sen}\, n) = 0$. (Cabe mencionar que también pudo haberse aplicado el teorema 3.1.10 a esta sucesión.)

g) Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales que converge a $x \in \mathbb{R}$. Sea p un polinomio; por ejemplo, sea

$$p(t) := a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

donde $k \in \mathbb{N}$ y $a_j \in \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, \ldots, k$. Del teorema 3.2.3 se sigue que la secuencia $(p(x_n))$ converge a $p(x)$. Los detalles se le dejan al lector como ejercicio.

h) Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales que converja a $x \in \mathbb{R}$. Sea r una función racional (es decir, $r(t) := p(t)/q(t)$, donde p y q son polinomios). Suponer que $q(x_n) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $q(x) \neq 0$. Entonces la sucesión $(r(x_n))$ converge a $r(x) = p(x)/q(x)$. Los detalles se le dejan al lector como ejercicio. □

Se concluye esta sección con varios resultados que serán de utilidad en la exposición que sigue.

3.2.9 Teorema *Sea que la sucesión* $X = (x_n)$ *converja a* x. *Entonces la sucesión* $(|x_n|)$ *de los valores absolutos converge a* $|x|$. *Es decir, si* $x = \text{lím}(x_n)$, *entonces* $|x| = \text{lím}(|x_n|)$.

Demostración. De la desigualdad del triángulo (véase el corolario 2.2.4a) se sigue que

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La convergencia de $(|x_n|)$ a $|x|$ es entonces una consecuencia inmediata de la convergencia de (x_n) a x. Q.E.D.

3.2.10 Teorema *Sea* $X = (x_n)$ *una sucesión de números reales que converge a* x *y suponer que* $x_n \geq 0$. *Entonces la sucesión* $(\sqrt{x_n})$ *de las raíces cuadradas positivas converge y* $\text{lím}(\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$.

Demostración. Del teorema 3.2.4 se sigue que $x = \text{lím}(x_n) \geq 0$, por lo que la afirmación tiene sentido. Se consideran ahora dos casos: (i) $x = 0$ y (ii) $x > 0$.

Caso (i): Si $x = 0$, sea $\varepsilon > 0$ dada. Puesto que $x_n \to 0$, existe un número natural K tal que si $n \geq K$, entonces

$$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Por lo tanto [véase el ejemplo 2.1.13a], $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$ para $n \geq K$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, esto implica que $\sqrt{x_n} \to 0$.

Caso (ii): Si $x > 0$, entonces $\sqrt{x} > 0$ y se observa que

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}.$$

Puesto que $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, se sigue que

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x|.$$

La convergencia de $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$ se sigue del hecho de que $x_n \to x$. Q.E.D.

Para ciertos tipos de sucesiones, el siguiente resultado proporciona un "criterio del cociente" de convergencia rápido y sencillo. En los ejercicios pueden encontrarse resultados relacionados.

3.2.11 Teorema *Sea* (x_n) *una sucesión de números reales positivos tal que* $L := \text{lím}(x_{n+1}/x_n)$ *existe. Si* $L < 1$, *entonces* (x_n) *converge y* $\text{lím}(x_n) = 0$.

Demostración. Del teorema 3.2.4 se sigue que $L \geq 0$. Sea r un número tal que $L < r < 1$, y sea $\varepsilon := r - L > 0$. Existe un número $K \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq K$, entonces

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon.$$

De esto se sigue (¿por qué?) que si $n \geq K$, entonces

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon = L + (r - L) = r.$$

Por lo tanto, si $n \geq K$, se obtiene

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_K r^{n-K+1}.$$

Si se hace $C := x_K / r^K$, se observa que $0 < x_{n+1} < C r^{n+1}$ para toda $n \geq K$. Puesto que $0 < r < 1$, de 3.1.11b se sigue que $\lim(r^n) = 0$ y, por lo tanto, por el teorema 3.1.10, $\lim(x_n) = 0$. Q.E.D.

Como una ilustración de la utilidad del teorema precedente, considerar la sucesión (x_n) dada por $x_n := n/2^n$. Se tiene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

de modo que $\lim(x_{n+1}/x_n) = \frac{1}{2}$. Puesto que $\frac{1}{2} < 1$, del teorema 3.2.11 se sigue que $\lim(n/2^n) = 0$.

Ejercicios de la sección 3.2

1. Para x_n dada por las siguientes fórmulas, establecer la convergencia o divergencia de la sucesión $X = (x_n)$.

a) $x_n := \dfrac{n}{n+1}$,

b) $x_n := \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$,

c) $x_n := \dfrac{n^2}{n+1}$,

d) $x_n := \dfrac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.

2. Dar un ejemplo de dos sucesiones divergentes X y Y tales que:

a) su suma $X + Y$ converja,

b) su producto XY converja.

3. Demostrar que si X y Y son sucesiones tales que X y $X + Y$ son convergentes, entonces Y es convergente.

4. Demostrar que si X y Y son sucesiones tales que X converge a $x \neq 0$ y XY converge, entonces Y converge.

5. Demostrar que las siguientes sucesiones no son convergentes.

a) (2^n)

b) $((-1)^n n^2)$.

6. Encontrar los límites de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left((2+1/n)^2\right)$, b) $\lim\left(\dfrac{(-1)^n}{n+2}\right)$,

c) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$, d) $\lim\left(\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$.

7. Si (b_n) es una sucesión acotada y $\lim(a_n) = 0$, demostrar que $\lim(a_n b_n) = 0$. Explicar por qué *no puede* aplicarse el teorema 3.2.3.

8. Explicar por qué el resultado en la ecuación (3) que está antes del teorema 3.2.4 *no puede* usarse para evaluar el límite de la sucesión $((1 + 1/n)^n)$.

9. Sea $y_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (y_n) y $(\sqrt{n}y_n)$ convergen. Encontrar sus límites.

10. Determinar los siguientes límites.

a) $\lim\left((3\sqrt{n})^{1/2n}\right)$, b) $\lim\left((n+1)^{1/\ln(n+1)}\right)$.

11. Si $0 < a < b$, determinar $\lim\left(\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right)$.

12. Si $a > 0$, $b > 0$, demostrar que $\lim(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n) = (a+b)/2$.

13. Usar el teorema de compresión 3.2.7 para determinar los límites de las siguientes sucesiones.

a) (n^{1/n^2}), b) $((n!)^{1/n^2})$.

14. Demostrar que si $z_n := (a^n + b^n)^{1/n}$, donde $0 < a < b$, entonces $\lim(z_n) = b$.

15. Aplicar el teorema 3.2.11 a las siguientes sucesiones, donde a, b satisfacen $0 < a < 1$, $b > 1$.

a) (a^n), b) $(b^n/2^n)$,
c) (n/b^n), d) $(2^{3n}/3^{2n})$.

16. a) Proporcionar un ejemplo de una sucesión convergente (x_n) de números positivos con $\lim(x_{n+1}/x_n) = 1$.
b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente con esta propiedad. (Por tanto, esta propiedad no puede usarse como criterio de convergencia.)

17. Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales positivos tales que $\lim(x_{n+1}/x_n) = L > 1$. Demostrar que X es una sucesión no acotada y, por consiguiente, que no es convergente.

18. Discutir la convergencia de las siguientes sucesiones, donde a, b satisfacen $0 < a < 1$, $b > 1$.

a) $(n^2 a^n)$,
b) (b^n/n^2),
c) $(b^n/n!)$,
d) $(n!/n^n)$.

19. Sea (x_n) una sucesión de números reales positivos tales que $\text{lím}(x_n^{1/n}) = L < 1$. Demostrar que existe un número r con $0 < r < 1$ tal que $0 < x_n < r^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Usar este resultado para demostrar que $\text{lím}(x_n) = 0$.

20. a) Dar un ejemplo de una sucesión convergente (x_n) de números positivos con $\text{lím}(x_n^{1/n}) = 1$.
b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente (x_n) de números positivos $\text{lím}(x_n^{1/n}) = 1$. (Por tanto, esta propiedad no puede usarse como criterio de convergencia.)

21. Suponer que (x_n) es una sucesión convergente y que (y_n) es tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe M tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq M$. ¿Se infiere que (y_n) es convergente?

22. Demostrar que si (x_n) y (y_n) son sucesiones convergentes, entonces las sucesiones (u_n) y (v_n) definidas por $u_n := \text{máx}\{x_n, y_n\}$ y $v_n := \text{mín}\{x_n, y_n\}$ también son convergentes. (Véase el ejercicio 2.2.16.)

23. Demostrar que si (x_n), (y_n), (z_n) son sucesiones convergentes, entonces la sucesión (w_n) definida por $w_n := \text{med}\{x_n, y_n, z_n\}$ también es convergente. (Véase el ejercicio 2.2.17.)

SECCIÓN 3.3 Sucesiones monótonas

Hasta este punto, se han obtenido varios métodos para demostrar que una sucesión $X = (x_n)$ de números reales es convergente:

(i) Puede usarse directamente la definición 3.1.3 o el teorema 3.1.5, lo cual con frecuencia (pero no siempre) resulta difícil de hacer.
(ii) Se puede dominar $|x_n - x|$ con un múltiplo de los términos de una sucesión (a_n) cuya convergencia a 0 sea conocida para aplicar después el teorema 3.1.10.
(iii) Se puede identificar X como una sucesión obtenida a partir de otras sucesiones cuya convergencia sea conocida tomando colas, combinaciones algebraicas, valores absolutos o raíces cuadradas y aplicando los teoremas 3.1.9, 3.2.3, 3.2.9 o 3.2.10.
(iv) Puede "comprimirse" X entre dos sucesiones que convergen al mismo límite y usar el teorema 3.2.7.
(v) Puede usarse el "criterio del cociente" del teorema 3.2.11.

Salvo por (iii), todos estos métodos requieren que se sepa de antemano el valor del límite (o al menos que se tenga una conjetura del mismo) para después comprobar que es correcto.

Sin embargo, hay muchos casos en que no se cuenta con un posible valor evidente para el límite de una sucesión, aun cuando un análisis preliminar sugiera que

la convergencia es probable. En la presente sección y en las dos siguientes se establecerán resultados que pueden usarse para demostrar que una sucesión es convergente aun cuando no se conozca el valor del límite. El método que se introduce en esta sección es de alcance más restringido que los métodos que se presentan en las dos secciones siguientes, pero su aplicación es mucho más sencilla. Se aplica a sucesiones que son monótonas en el sentido siguiente.

3.3.1 Definición Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales. Se dice que X es **creciente** si satisface las desigualdades

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots.$$

Se dice que X es **decreciente** si satisface las desigualdades

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots.$$

Se dice que X es **monótona** si es creciente o decreciente.

Las siguientes sucesiones son crecientes:

$$(1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots), \qquad (1, 2, 2, 3, 3, 3, \cdots),$$
$$(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots), \qquad \text{si } a > 1.$$

Las siguientes sucesiones son decrecientes:

$$(1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots), \qquad (1, 1/2, 1/2^2, \cdots, 1/2^{n-1}, \cdots),$$
$$(b, b^2, b^3, \cdots, b^n, \cdots), \qquad \text{si } 0 < b < 1.$$

Las siguientes sucesiones no son monótonas:

$$(+1, -1, +1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots), \qquad (-1, +2, -3, \cdots, (-1)^n n, \cdots).$$

Las siguientes sucesiones no son monótonas, pero lo son "a la larga":

$$(7, 6, 2, 1, 2, 3, 4, \cdots), \qquad (-2, 0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots).$$

3.3.2 Teorema de convergencia monótona *Una sucesión monótona de números reales es convergente si y sólo si está acotada. Además:*

a) *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión creciente acotada, entonces*

$$\text{lím}(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b) *Si* $Y = (y_n)$ *es una sucesión decreciente acotada, entonces*

$$\text{lím}(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. En el teorema 3.2.2 se vio que una sucesión convergente debe estar acotada.

Recíprocamente, sea X una sucesión monótona acotada. Entonces o X es creciente o es decreciente.

a) Se trata primero el caso en que $X = (x_n)$ es una sucesión creciente acotada. Puesto que X está acotada, existe un número real M tal que $x_n \le M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De conformidad con la propiedad de completez 2.3.6, el supremo $x^* = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ existe en $\mathbb{R}$; se demostrará que $x^* = \text{lím}(x_n)$.

Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces $x^* - \varepsilon$ no es una cota superior del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por consiguiente, existe un miembro del conjunto x_K tal que $x^* - \varepsilon < x_K$. El hecho de que X es una sucesión creciente implica que $x_K \le x_n$ siempre que $n \ge K$, de donde

$$x^* - \varepsilon < x_k \le x_n \le x^* < x^* + \varepsilon \qquad \text{para toda} \quad n \ge K.$$

Se tiene, por lo tanto,

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{para toda} \quad n \ge K.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que (x_n) converge a x^*.

b) Si $Y = (y_n)$ es una sucesión decreciente acotada, entonces resulta claro que $X := -Y = (-y_n)$ es una sucesión creciente acotada. En el inciso a) se demostró que $\text{lím}\, X = \sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora bien, $\text{lím}\, X = -\text{lím}\, Y$ y, por el ejercicio 2.4.4b, se tiene también

$$\sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\} = -\text{ínf}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por lo tanto, $\text{lím}\, Y = -\text{lím}\, X = \text{ínf}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Q.E.D.

El teorema de convergencia monótona establece la existencia del límite de una sucesión monótona acotada. Ofrece asimismo una manera de calcular el límite de la sucesión *siempre que* pueda evaluarse el supremo en el caso a) o el ínfimo en el caso b). En ocasiones resulta difícil evaluar este supremo (o ínfimo), pero una vez que se sabe que existe, muchas veces es posible poder evaluar el límite por otros métodos.

3.3.3 Ejemplos **a)** $\text{lím}(1/\sqrt{n}) = 0$.

Esta sucesión puede abordarse aplicando el teorema 3.2.10; sin embargo, se usará el teorema de convergencia monótona. Es evidente que 0 es una cota inferior del conjunto $\{1/\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y no es difícil demostrar que 0 es el ínfimo del conjunto $\{1/\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$; en consecuencia, $0 = \text{lím}(1/\sqrt{n})$.

Por otra parte, una vez que se sabe que $X := (1/\sqrt{n})$ está acotada y es decreciente, se sabe que converge a algún número real x. Puesto que $X = (1/\sqrt{n})$ converge a x, del teorema 3.2.3 se sigue que $X \cdot X = (1/n)$ converge a x^2. Por tanto, $x^2 = 0$, de donde $x = 0$.

b) Sea $x_n := 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que $x_{n+1} = x_n + 1/(n+1) > x_n$, se observa que (x_n) es una sucesión creciente. Por el teorema de convergencia monótona 3.3.2, la cuestión de si la sucesión es convergente o no se reduce a determinar si la sucesión está acotada o no. Los intentos por usar cálculos numéricos directos para llegar a una conjetura respecto del posible carácter acotado de la sucesión (x_n) desembocan en una frustrante situa-

ción sin resultados concluyentes. Una computadora revelará los valores aproximados $x_n \approx 11.4$ para $n = 50\ 000$ y $x_n \approx 12.1$ para $n = 100\ 000$. Estos hechos numéricos podrían llevar al observador bisoño a concluir que la sucesión está acotada. Sin embargo, la sucesión es en realidad divergente, lo cual se establece al advertir que

$$\begin{aligned} x_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} \\ &= 1+\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Puesto que (x_n) no está acotada, el teorema 3.2.2 implica que es divergente.

Los términos x_n se incrementan con extrema lentitud. Por ejemplo, puede demostrarse que alcanzar un valor de $x_n > 50$ implicaría aproximadamente 5.2×10^{21} adiciones, y una computadora normal que realizara 400 millones de adiciones por segundo requeriría más de 400 000 años para poder realizar el cálculo (hay 31 536 000 segundos en un año). Incluso una supercomputadora que puede realizar más de un billón de adiciones por segundo requeriría más de 164 años para alcanzar esa modesta meta. □

Las sucesiones que están definidas inductivamente deben tratarse de manera diferente. Si se sabe que una sucesión converge, entonces el valor del límite puede determinarse en ocasiones utilizando la relación inductiva.

Por ejemplo, suponer que se ha establecido la convergencia de la sucesión (x_n) definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = 2+\frac{1}{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Así, si se hace $x = \lim(x_n)$, entonces se tiene también $x = \lim(x_{n+1})$, ya que la cola-1 (x_{n+1}) converge al mismo límite. Además, se observa que $x_n \geq 2$, de modo que $x \neq 0$ y $x_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, pueden aplicarse los teoremas de límites para sucesiones para obtener

$$x = \text{lím}(x_{n+1}) = 2+\frac{1}{\text{lím}(x_n)} = 2+\frac{1}{x}.$$

Así, el límite x es una solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 1 = 0$, y como x debe ser positiva, se encuentra que el límite de la sucesión es $x = 1 + \sqrt{2}$.

Desde luego, la cuestión de la convergencia no debe pasarse por alto o suponerse a la ligera. Por ejemplo, si se supusiera que la sucesión (y_n) definida por $y_1 := 1$, $y_{n+1} := 2y_n + 1$ es convergente con límite y, entonces se obtendría así $y = 2y + 1$, de modo que $y = -1$. Desde luego, esto es absurdo.

En los ejemplos siguientes se emplea este método para evaluar límites, pero sólo después de establecer con todo cuidado la convergencia mediante la aplicación del teorema de convergencia monótona. En la sección 3.5 se presentan ejemplos adicionales de este tipo.

3.3.4 Ejemplos **a)** Sea que $Y = (y_n)$ esté definida inductivamente por $y_1 := 1$, $y_{n+1} := \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ para $n \geq 1$. Se demostrará que lím $Y = 3/2$.

Realizando cálculos directos se establece que $y_2 = 5/4$. Se tiene en consecuencia $y_1 < y_2 < 2$. Se demuestra, por inducción matemática, que $y_n < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De hecho, esto se cumple para $n = 1, 2$. Si $y_k < 2$ se cumple para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(4+3) = \frac{7}{4} < 2,$$

de modo que $y_{k+1} < 2$. Por lo tanto, $y_n < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se demuestra ahora, por inducción matemática, que $y_n < y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se ha verificado que esta afirmación es verdadera para $n = 1$. Se supone ahora que $y_k < y_{k+1}$ para alguna k; entonces $2y_k + 3 < 2y_{k+1} + 3$, de donde se sigue que

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}(2y_k + 3) < \frac{1}{4}(2y_{k+1} + 3) = y_{k+2}.$$

En consecuencia, $y_k < y_{k+1}$ implica que $y_{k+1} < y_{k+2}$. Por lo tanto, $y_n < y_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se ha demostrado que la sucesión $Y = (y_n)$ es creciente y que está acotada superiormente por 2. Del teorema de convergencia monótona se sigue que Y converge a un límite que es a lo sumo 2. En este caso no es sencillo evaluar lím(y_n) calculando $\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sin embargo, hay otra manera de evaluar este límite. Puesto que $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo término de la cola-1 Y_1 de Y guarda una relación algebraica simple con el n-ésimo término de Y. Puesto que, por el teorema 3.1.9, se tiene $y :=$ lím $Y_1 =$ lím Y, del teorema 3.2.3 se sigue por lo tanto (¿por qué?) que

$$y = \frac{1}{4}(2y + 3),$$

de donde se sigue que $y = 3/2$.

b) Sea $Z = (z_n)$ la sucesión de números reales definida por $z_1 := 1$, $z_{n+1} := \sqrt{2z_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Se demostrará que lím$(z_n) = 2$.

Adviértase que $z_1 = 1$ y $z_2 = \sqrt{2}$; en consecuencia, $1 \leq z_1 < z_2 < 2$. Se afirma que la sucesión Z es creciente y que está acotada superiormente por 2. Para demostrar esto se probará, por inducción matemática, que $1 \leq z_n < z_{n+1} < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Este hecho se ha verificado para $n = 1$. Suponer que se cumple para $n = k$; entonces $2 \leq 2z_k < 2z_{k+1} < 4$, de donde se sigue (¿por qué?) que

$$1 < \sqrt{2} \leq z_{k+1} = \sqrt{2z_k} < z_{k+2} = \sqrt{2z_{k+1}} < \sqrt{4} = 2.$$

[En este último paso se usó el ejemplo 2.1.13a.] En consecuencia, la validez de la desigualdad $1 \leq z_k < z_{k+1} < 2$ implica la validez de $1 \leq z_{k+1} < z_{k+2} < 2$. Por lo tanto, $1 \leq z_n < z_{n+1} < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que $Z = (z_n)$ es una sucesión creciente acotada, del teorema de convergencia monótona se sigue que converge a un número $z := \sup\{z_n\}$. Es posible demostrar directamente que $\sup\{z_n\} = 2$, de donde $z = 2$. De manera alternativa, puede usarse el método empleado en el inciso a). La relación $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$ proporciona una relación entre el n-ésimo término de la cola-1 Z_1 de Z y el n-ésimo

término de Z. Por el teorema 3.1.9 se tiene $\lim Z_1 = z = \lim Z$. Además, por los teoremas 3.2.3 y 3.2.10, se sigue que el límite z debe satisfacer la relación

$$z = \sqrt{2z}.$$

En consecuencia, z debe satisfacer la ecuación $z^2 = 2z$ que tiene las raíces $z = 0$, 2. Puesto que todos los términos de $z = (z_n)$ satisfacen $1 \leq z_n \leq 2$, del teorema 3.2.6 se sigue que debe tenerse $1 \leq z \leq 2$. Por lo tanto, $z = 2$. □

Cálculo de raíces cuadradas

Se presenta a continuación una aplicación del teorema de convergencia monótona para calcular raíces cuadradas de números positivos.

3.3.5 Ejemplo Sea $a > 0$; se construirá una sucesión (s_n) de números reales que converge a $\sqrt{a}$.

Sea $s_1 > 0$ un número arbitrario y se define $s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + a/s_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Se demuestra ahora que la sucesión (s_n) converge a $\sqrt{a}$. (Este proceso para calcular raíces cuadradas se conocía ya en Mesopotamia antes de 1500 a. de C.)

Se demuestra primero que $s_n^2 \geq a$ para $n \geq 2$. Puesto que s_n satisface la ecuación cuadrática $s_n^2 - 2s_{n+1}s_n + a = 0$, esta ecuación tiene una raíz real. En consecuencia, el discriminante $4s_{n+1}^2 - 4a$ debe ser no negativo; es decir, $s_{n+1}^2 \geq a$ para $n \geq 1$.

Para ver que (s_n) es decreciente a la larga, se observa que para $n \geq 2$ se tiene

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geq 0.$$

En consecuencia, $s_{n+1} \leq s_n$ para toda $n \geq 2$. El teorema de convergencia monótona implica que $s := \lim(s_n)$ existe. Además, por el teorema 3.2.3, el límite s debe satisfacer la relación

$$s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right),$$

de donde se sigue (¿por qué?) que $s = a/s$ o $s^2 = a$. Por tanto, $s = \sqrt{a}$.

Para fines de cálculo, con frecuencia es importante contar con una estimación de la *rapidez con que* la sucesión (s_n) converge a $\sqrt{a}$. Como antes, se tiene $\sqrt{a} \leq s_n$ para toda $n \geq 2$, de donde se sigue que $a/s_n \leq \sqrt{a} \leq s_n$. Se tiene, por tanto,

$$0 \leq s_n - \sqrt{a} \leq s_n - a/s_n = (s_n^2 - a)/s_n \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Utilizando esta desigualdad puede calcularse $\sqrt{a}$ con cualquier grado de precisión deseado. □

El número de Euler

Esta sección se concluye con la presentación de una sucesión que converge a uno de los números "trascendentes" más importantes en las matemáticas, el segundo en importancia sólo después de π.

3.3.6 Ejemplo Sea $e_n := (1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Se demostrará ahora que la sucesión $E = (e_n)$ está acotada y que es creciente; en consecuencia, es convergente. El límite de esta sucesión es el famoso *número de Euler e*, cuyo valor aproximado es 2.718 281 828 459 045 $\cdots$, el cual se toma como la base de los logaritmos "naturales".

Si se aplica el teorema del binomio, se obtiene

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Si los numeradores de los coeficientes binomiales se dividen por las potencias de n, se obtiene

$$e_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Del mismo modo se tiene

$$e_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Adviértase que la expresión para e_n contiene $n + 1$ términos, en tanto que la correspondiente a e_{n+1} contiene $n + 2$ términos. Además, cada término que aparece en e_n es menor o igual que el término correspondiente de e_{n+1}, y e_{n+1} tiene un término positivo más. Se tiene por lo tanto $2 \le e_1 < e_2 < \cdots < e_n < e_{n+1} < \cdots$, de modo que los términos de E son crecientes.

Para demostrar que los términos de E están acotados superiormente, se observa que si $p = 1, 2, \cdots, n$, entonces $(1 - p/n) < 1$. Además, $2^{p-1} \le p!$ (véase 1.2.4e), de modo que $1/p! \le 1/2^{p-1}$. Por lo tanto, si $n > 1$, se tiene entonces

$$2 < e_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

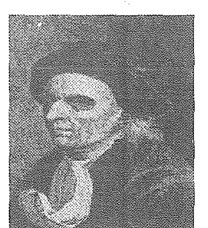
Puesto que puede verificarse que [véase 1.2.4f]

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

se deduce que $2 < e_n < 3$ para toda $n \in \mathbb{N}$. El teorema de convergencia monótona implica que la sucesión E converge a un número real que está entre 2 y 3. El número e se define como el límite de esta sucesión.

Al hacer más precisas las estimaciones, pueden obtenerse aproximaciones racionales más cercanas a e, pero no es posible evaluarlo *exactamente*, ya que e es un número irracional. Sin embargo, es posible calcular e con tantas cifras decimales como se desee. El lector debe usar una calculadora (o una computadora) para evaluar e_n para valores "grandes" de n. □

Leonhard Euler



Leonhard Euler (1707-1783) nació cerca de Basilea, Suiza. Su padre, un clérigo, esperaba que su hijo lo siguiera en su ministerio, pero cuando Euler ingresó en la Universidad de Basilea a los 14 años de edad su talento matemático fue advertido por Johann Bernoulli, quien se convirtió en su mentor. En 1727, Euler fue a Rusia para reunirse con el hijo de Johann, Daniel, en la nueva Academia de San Petersburgo. Ahí conoció y contrajo matrimonio con Katharina Gsell, la hija de un artista suizo. Durante su largo matrimonio tuvieron 13 hijos, pero sólo cinco sobrevivieron la infancia.

En 1741, Euler aceptó una oferta de Federico el Grande para incorporarse a la Academia de Berlín, donde permaneció 25 años. Durante este periodo escribió libros sobre cálculo que constituyeron hitos históricos, así como una serie continua de artículos. En respuesta a una solicitud de instrucción en ciencias del príncipe de Anhalt-Dessau, Euler escribió una obra en varios volúmenes que se hizo famosa con el título *Cartas a un príncipe alemán.*

En 1766 volvió a Rusia por invitación de Catalina la Grande. Su vista se había deteriorado con los años, y poco después de su regreso a Rusia quedó totalmente ciego. De manera increíble, su ceguera afectó en escasa medida su producción matemática, pues en este estado escribió varios libros y más de 400 artículos. Se mantuvo trabajando y activo hasta el día de su muerte.

La productividad de Euler fue notable: escribió libros de texto de física, álgebra, cálculo, análisis real y complejo, geometría analítica y diferencial, y cálculo de variaciones. También escribió cientos de artículos originales, muchos de los cuales recibieron premios. Una edición actual de sus obras escogidas consta de 74 volúmenes.

Ejercicios de la sección 3.3

1. Sea $x_1 := 8$ y $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 2$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) está acotada y es monótona. Encontrar el límite.

2. Sea $x_1 > 1$ y $x_{n+1} := 2 - 1/x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) está acotada y es monótona. Encontrar el límite.

3. Sea $x_1 \geq 2$ y $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) es decreciente y que está acotada inferiormente por 2. Encontrar el límite.

4. Sea $x_1 := 1$ y $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) converge y encontrar el límite.

5. Sea $y_1 := \sqrt{p}$, donde $p > 0$, y $y_{n+1} := \sqrt{p + y_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (y_n) converge y encontrar el límite. [*Sugerencia:* una cota superior es $1 + 2\sqrt{p}$.]

6. Sea $a > 0$ y $z_1 > 0$. Se define $z_{n+1} := \sqrt{a + z_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (z_n) converge y encontrar el límite.

7. Sea $x_1 := a > 0$ y $x_{n+1} := x_n + 1/x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Determinar si (x_n) converge o diverge.

8. Sea (a_n) una sucesión creciente, (b_n) una sucesión decreciente, y suponer que $a_n \le b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\lim(a_n) \le \lim(b_n)$, de donde se deduce la propiedad de los intervalos anidados 2.5.2 del teorema de convergencia monótona 3.3.2.

9. Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente y sea $u := \sup A$. Demostrar que existe una sucesión creciente (x_n) con $x_n \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $u = \lim(x_n)$.

10. Sea (x_n) una sucesión acotada y, para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n := \sup\{x_k : k \ge n\}$ y $t_n := \inf\{x_k : k \ge n\}$. Demostrar que (s_n) y (t_n) son monótonas y convergentes. Demostrar asimismo que si $\lim(s_n) = \lim(t_n)$, entonces (x_n) es convergente. [A $\lim(s_n)$ se le llama el **límite superior** de (x_n) y a $\lim(t_n)$ el **límite inferior** de (x_n).]

11. Establecer la convergencia o divergencia de la sucesión (y_n), donde

$$y_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. Sea $x_n := 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) es creciente y que está acotada y, por consiguiente, que converge. [*Sugerencia:* obsérvese que si $k \ge 2$, entonces $1/k^2 \le 1/k(k-1) = 1/(k-1) - 1/k$.]

13. Establecer la convergencia y encontrar los límites de las sucesiones siguientes.

a) $\left((1+1/n)^{n+1}\right)$, b) $\left((1+1/n)^{2n}\right)$,

c) $\left(\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right)$, d) $\left((1-1/n)^n\right)$.

14. Aplicar el método del ejemplo 3.3.5 para calcular $\sqrt{2}$ con cuatro cifras decimales de precisión.

15. Aplicar el método del ejemplo 3.3.5 para calcular $\sqrt{5}$ con cinco cifras decimales de precisión.

16. Calcular el número e_n del ejemplo 3.3.6 para $n = 2, 4, 8, 16$.

17. Usar una calculadora para encontrar el valor de e_n para $n = 50$, $n = 100$ y $n = 1000$.

SECCIÓN 3.4 Subsucesiones y el teorema de Bolzano-Weierstrass

En esta sección se introduce la noción de una subsucesión de una sucesión de números reales. De manera informal, una subsucesión de una sucesión es una selección de términos de una sucesión dada tal que los términos seleccionados

forman una nueva sucesión. Por lo general, la selección se hace para un propósito determinado. Por ejemplo, las subsucesiones con frecuencia resultan de utilidad para establecer la convergencia o divergencia de la sucesión original. Se presenta, asimismo, el importante teorema de existencia conocido como el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual se usará para establecer varios resultados importantes.

3.4.1 Definición Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales y sea $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Entonces a la sucesión $X' = (x_{n_k})$ dada por

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$$

se le llama una **subsucesión** de X.

Por ejemplo, si $X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$, entonces la selección de los términos con índice par produce la subsucesión

$$X' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k}, \ldots\right),$$

donde $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $\cdots$, $n_k = 2k$, $\cdots$. Otras subsucesiones de $X = (1/n)$ son las siguientes:

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2k-1}, \ldots\right), \qquad \left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{6!}, \ldots \frac{1}{(2k)!}, \ldots\right).$$

Las siguientes sucesiones *no* son subsucesiones de $X = (1/n)$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right), \qquad \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \ldots\right).$$

La cola de una sucesión (véase 3.1.8) es un caso especial de subsucesión. De hecho, la cola-m corresponde a la sucesión de índices

$$n_1 = m + 1, n_2 = m + 2, \cdots, n_k = m + k, \cdots.$$

Pero, evidentemente, no toda subsucesión de una sucesión dada es necesariamente una cola de la sucesión.

Las subsucesiones de sucesiones convergentes también convergen al mismo límite, como se establece a continuación.

3.4.2 Teorema *Si una sucesión* $X = (x_n)$ *de números reales converge a un número real* x*, entonces cualquier subsucesión* $X' = (x_{n_k})$ *de* X *también converge a* x.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ dada y $K(\varepsilon)$ tal que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$. Puesto que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ es una sucesión creciente de números naturales, resulta sencillo demostrar (por inducción matemática) que $n_k \geq k$. En consecuencia, si $k \geq K(\varepsilon)$, se tiene también $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$, de modo que $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Por lo tanto, la subsucesión (x_{n_k}) también converge a x. Q.E.D.

3.4.3 Ejemplos **a)** $\lim(b^n) = 0$ si $0 < b < 1$.

Se ha visto ya, en el ejemplo 3.1.11b, que si $0 < b < 1$ y si $x_n := b^n$, entonces de la desigualdad de Bernoulli se sigue que $\lim(x_n) = 0$. De manera alternativa, se observa que como $0 < b < 1$, entonces $x_{n+1} = b^{n+1} < b^n = x_n$, de modo que la sucesión (x_n) es decreciente. También es claro que $0 \leq x_n \leq 1$, por lo que del teorema de convergencia monótona 3.3.2 se sigue que la sucesión es convergente. Sea $x := \lim x_n$. Puesto que (x_{2n}) es una subsucesión de (x_n), del teorema 3.4.2 se sigue que $x = \lim(x_{2n})$. Además, de la relación $x_{2n} = b^{2n} = (b^n)^2 = x_n^2$ y del teorema 3.2.3 se sigue que

$$x = \lim(x_{2n}) = \left(\lim(x_n)^2\right) = x^2.$$

En consecuencia, debe tenerse o $x = 0$ o $x = 1$. Puesto que la sucesión (x_n) es decreciente y está acotada superiormente por $b < 1$, se infiere que $x = 0$.

b) $\lim(c^{1/n}) = 1$ para $c > 1$.

Este límite se obtuvo en el ejemplo 3.1.11c para $c > 0$, haciendo uso de un razonamiento bastante ingenioso. Se presenta aquí otro enfoque para el caso $c > 1$. Obsérvese que si $z_n := c^{1/n}$, entonces $z_n > 1$ y $z_{n+1} < z_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (¿Por qué?) Así, por el teorema de convergencia monótona, el límite $z := \lim(z_n)$ existe. Por el teorema 3.4.2 se sigue que $z = \lim(z_{2n})$. Además, de la relación

$$z_{2n} = c^{1/2n} = (c^{1/n})^{1/2} = z_n^{1/2}$$

y del teorema 3.2.10 se sigue que

$$z = \lim(z_{2n}) = \left(\lim(z_n)\right)^{1/2} = z^{1/2}.$$

Por lo tanto, se tiene $z^2 = z$, de donde se sigue que o $z = 0$ o $z = 1$. Puesto que $z_n > 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se infiere que $z = 1$.

Se deja como ejercicio para el lector considerar el caso $0 < c < 1$. □

El siguiente resultado se basa en una cuidadosa negación de la definición de $\lim(x_n) = x$. Lleva a una manera conveniente de establecer la divergencia de una sucesión.

3.4.4 Teorema *Sea* $X = (x_n)$ *una sucesión de números reales. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *La sucesión* $X = (x_n)$ *no converge a* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para cualquier* $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_k \geq k$ *y* $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(iii) *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *y una subsucesión* $X' = (x_{n_k})$ *de* X *tal que* $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si (x_n) no converge a x, entonces para alguna $\varepsilon_0 > 0$ es imposible encontrar un número natural k tal que para toda $n \geq k$ los términos x_n

satisfagan $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Es decir, para toda $k \in \mathbb{N}$ *no se cumple* que para *toda* $n \geq k$ la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon_0$ es válida. En otras palabras, para toda $k \in \mathbb{N}$ existe un número natural $n_k \geq k$ tal que $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea ε_0 como en (ii) y sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \geq 1$ y $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Ahora sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$; sea $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_2$ y $|x_{n_3} - x| \geq \varepsilon_0$. Se continúa de esta manera para obtener una subsucesión $X' = (x_{n_k})$ de X tal que $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Suponer que $X = (x_n)$ tiene una subsucesión $X' = (x_{n_k})$ que satisface la condición del inciso (iii). Entonces X no puede converger a x, porque si lo hiciera, por el teorema 3.4.2, la subsucesión X' convergería a x. Pero esto es imposible, ya que ninguno de los términos de X' pertenece a la vecindad-ε_0 de x.

Q.E.D.

Puesto que todas las subsucesiones de una sucesión convergente deben converger al mismo límite, se llega al inciso (i) del siguiente resultado. El inciso (ii) se sigue del hecho de que una sucesión convergente está acotada.

3.4.5 Criterios de divergencia *Si una sucesión* $X = (x_n)$ *de números reales tiene cualquiera de las propiedades siguientes, entonces* X *es divergente.*

(i) X *tiene dos subsucesiones convergentes* $X' = (x_{n_k})$ *y* $X'' = (x_{r_k})$ *cuyos límites no son iguales.*

(ii) X *no está acotada.*

3.4.6 Ejemplos **a)** La sucesión $X := ((-1^n))$ es divergente.

La subsucesión $X' := ((-1)^{2n}) = (1, 1, \cdots)$ converge a 1; asimismo, la subsucesión $X'' := ((-1)^{2n-1}) = (-1, -1, \cdots)$ converge a -1. Por lo tanto, por el teorema 3.4.5(i) se concluye que X es divergente.

b) La sucesión $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots)$ es divergente.

Se trata de la sucesión $Y = (y_n)$, donde $y_n = n$ si n es impar, y $y_n = 1/n$ si n es par. Es fácil ver que Y no está acotada. En consecuencia, por el teorema 3.4.5(ii), la sucesión es divergente.

c) La sucesión $S := (\text{sen}\, n)$ es divergente.

Esta sucesión no es tan fácil de abordar. Para examinarla debe, desde luego, hacerse uso de las propiedades elementales de la función seno. Se recuerda que $\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2} = \text{sen}(5\pi/6)$ y que $\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$ para x en el intervalo $I_1 := (\pi/6, 5\pi/6)$. Puesto que la longitud de I_1 es $5\pi/6 - \pi/6 = 2\pi/3 > 2$, hay al menos dos números naturales que están dentro de I_1; se hace que n_1 sea el primero de estos números. Del mismo modo, para toda $k \in \mathbb{N}$, $\text{sen}\, x > \frac{1}{2}$ para x en el intervalo

$$I_k := \big(\pi/6 + 2\pi(k-1), 5\pi/6 + 2\pi(k-1)\big).$$

Puesto que la longitud de I_k es mayor que 2, hay al menos dos números naturales que están dentro de I_k; se hace que n_k sea el primero de ellos. La subsucesión $S' := (\text{sen}\, n_k)$ de S obtenida de esta manera tiene la propiedad de que todos sus valores están en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

Del mismo modo, si $k \in \mathbb{N}$ y J_k es el intervalo

$$J_k := \big(7\pi/6 + 2\pi(k-1),\ 11\pi/6 + 2\pi(k-1)\big),$$

entonces se ve que sen $x < -\frac{1}{2}$ para toda $x \in J_k$ y que la longitud de J_k es mayor que 2. Sea m_k el primer número natural que está en J_k. Entonces la subsucesión $S'' :=$ (sen m_k) de S tiene la propiedad de que todos sus valores están en el intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

Dado cualquier número real c, se observa de inmediato que al menos una de las subsucesiones S' y S'' queda en su totalidad fuera de la vecindad-$\frac{1}{2}$ de c. Por lo tanto, c no puede ser el límite de S. Puesto que $c \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se infiere que S es divergente. □

La existencia de subsucesiones monótonas

Aun cuando no toda sucesión es monótona, se demuestra a continuación que toda sucesión tiene una subsucesión monótona.

3.4.7 Teorema de la subsucesión monótona *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión de números reales, entonces existe una subsucesión de* X *que es monótona.*

Demostración. Para los fines de esta demostración, se dirá que el m-ésimo término x_m es un "pico" si $x_m \geq x_n$ para toda n tal que $n \geq m$. (Es decir, x_m nunca es excedido por ningún término que lo precede en la sucesión.) Obsérvese que, en una sucesión decreciente, cualquier término es un pico, en tanto que en una sucesión creciente ningún término es un pico.

Se consideran dos casos, dependiendo de si X tiene un número infinito o finito de picos.

Caso 1: X tiene un número infinito de picos. En este caso, la enumeración de los picos se hace con subíndices crecientes: $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{mk}, \cdots$. Puesto que cada término es un pico, se tiene

$$x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{mk} \geq \cdots.$$

Por lo tanto, la subsucesión (x_{m_k}) de picos es una subsucesión decreciente de X.

Caso 2: X tiene un número finito (posiblemente cero) de picos. Sea que estos picos se enumeren con subíndices crecientes: $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_r}$. Sea $s_1 := m_r + 1$ el primer índice después del último pico. Puesto que x_{s_1} no es un pico, existe $s_2 > s_1$ tal que $x_{s_1} < x_{s_2}$. Puesto que x_{s_2} no es un pico, existe $s_3 > s_2$ tal que $x_{s_2} < x_{s_3}$. Al continuar de esta manera, se obtiene una subsucesión creciente (x_{s_k}) de X. Q.E.D.

No es difícil ver que una sucesión dada puede tener una subsucesión que es creciente y otra que es decreciente.

El teorema de Bolzano-Weierstrass

Se usa ahora el teorema de la subsucesión monótona para demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual establece que toda sucesión acotada tiene una subsu-

cesión convergente. Debido a la importancia de este teorema, se presenta también una segunda demostración del mismo basada en la propiedad de los intervalos anidados.

3.4.8 El teorema de Bolzano-Weierstrass *Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

Primera demostración. Del teorema de la subsucesión monótona se sigue que si $X = (x_n)$ es una sucesión acotada, entonces tiene una subsucesión $X' = (x_{n_k})$ que es monótona. Puesto que esta subsucesión también está acotada, del teorema de convergencia monótona 3.3.2 se sigue que la subsucesión es convergente. Q.E.D.

Segunda demostración. Puesto que el conjunto de valores $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado, este conjunto está contenido en un intervalo $I_1 := [a, b]$. Se toma $n_1 := 1$.

Se divide ahora I_1 en dos subintervalos iguales I_1' e I_1'', y se divide en dos partes el conjunto de índices $\{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$:

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1'\}, \qquad B_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1''\}.$$

Si A_1 es infinito, se toma $I_2 := I_1'$ y sea n_2 el menor número natural en A_1. (Véase 1.2.1.) Si A_1 es un conjunto finito, entonces B_1 debe ser infinito, y se toma $I_2 := I_1''$ y sea n_2 el menor número natural en B_1.

Se divide ahora I_2 en dos subintervalos iguales I_2' e I_2'', y se divide en dos partes el conjunto de índices $\{n \in \mathbb{N} : n > n_2\}$:

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_2, x_n \in I_2'\}, \qquad B_2 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_2, x_n \in I_2''\}.$$

Si A_2 es infinito, se toma $I_3 := I_2'$ y sea n_3 el menor número natural en A_2. Si A_2 es un conjunto finito, entonces B_2 debe ser infinito, y se toma $I_3 := I_2''$ y sea n_3 el menor número natural en B_2.

Se continúa de esta manera para obtener una sucesión de intervalos anidados $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ y una subsucesión (x_{n_k}) de X tal que $x_{n_k} \in I_k$ para $k \in \mathbb{N}$. Puesto que la longitud de I_k es igual a $(b-a)/2^{k-1}$, del teorema 2.5.3 se sigue que existe un punto común (único) $\xi \in I_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Además, puesto que tanto x_{n_k} como ξ pertenecen a I_k, se tiene

$$|x_{n_k} - \xi| \leq (b-a)/2^{k-1},$$

de donde se sigue que la subsucesión (x_{n_k}) de X converge a ξ. Q.E.D.

Al teorema 3.4.8 se le llama en ocasiones el teorema de Bolzano-Weierstrass *para sucesiones*, porque hay otra versión del mismo que trata de conjuntos acotados en $\mathbb{R}$ (véase el ejercicio 11.2.6).

Es evidente que una sucesión acotada puede tener varias subsucesiones que convergen a límites diferentes o que incluso divergen. Por ejemplo, la sucesión

$((-1)^n)$ tiene subsucesiones que convergen a -1, otras que convergen a $+1$, y tiene también subsucesiones que divergen.

Sea X una sucesión de números reales y sea X' una subsucesión de X. Entonces X' es una sucesión por derecho propio y, en consecuencia, tiene subsucesiones. Se observa que si X'' es una subsucesión de X', entonces también es una subsucesión de X.

3.4.9 Teorema *Sea* $X = (x_n)$ *una sucesión acotada de números reales y sea que* $x \in \mathbb{R}$ *tenga la propiedad de que toda subsucesión convergente de* X *converge a* x. *Entonces la sucesión* X *converge a* x.

Demostración. Suponer que $M > 0$ es una cota de la sucesión X, de tal modo que $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si X no converge a x, entonces el teorema 3.4.4 implica que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión $X' = (x_{n_k})$ de X tal que

$$|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0 \qquad \text{para toda} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Puesto que X' es una subsucesión de X, el número M es también una cota de X'. En consecuencia, el teorema de Bolzano-Weierstrass implica que X' tiene una subsucesión convergente X''. Puesto que X'' es también una subsucesión de X, converge a x por hipótesis. Por tanto, sus términos pertenecen a la larga a la vecindad-ε_0 de x, lo cual contradice (1). Q.E.D.

Ejercicios de la sección 3.4

1. Dar un ejemplo de una sucesión no acotada que tenga una subsucesión convergente.

2. Aplicar el método del ejemplo 3.4.3b para poder demostrar que si $0 < c < 1$, entonces $\lim(c^{1/n}) = 1$.

3. Sea (f_n) la sucesión de Fibonacci del ejemplo 3.1.2d y sea $x_n := f_{n+1}/f_n$. Dado que $\lim(x_n) = L$ existe, determinar el valor de L.

4. Demostrar que las siguientes sucesiones son divergentes.

a) $(1 - (-1)^n + 1/n)$, b) $(\operatorname{sen} n\pi/4)$.

5. Sean $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ sucesiones dadas, y sea la sucesión "barajada" $Z = (z_n)$ definida por $z_1 := x_1, z_2 := y_1, \cdots, z_{2n-1} := x_n, z_{2n} := y_n, \cdots$. Demostrar que Z es convergente si y sólo si tanto X como Y son convergentes y $\lim X = \lim Y$.

6. Sea $x_n := n^{1/n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que $x_{n+1} < x_n$ si y sólo si $(1 + 1/n)^n < n$, e inferir que la desigualdad es válida para $n \geq 3$. (Véase el ejemplo 3.3.6.) Concluir que (x_n) es decreciente a la larga y que $x := \lim(x_n)$ existe.

b) Usar el hecho de que la subsucesión (x_{2n}) también converge a x para concluir que $x = 1$.

7. Establecer la convergencia y encontrar los límites de las siguientes sucesiones:

a) $((1 + 1/n^2)^{n^2})$, b) $((1 + 1/2n)^n)$,
c) $((1 + 1/n^2)^{2n^2})$, d) $((1 + 2/n)^n)$.

8. Determinar los límites de las siguientes sucesiones.

a) $((3n)^{1/2n})$, b) $((1 + 1/2n)^{3n})$.

9. Suponer que toda subsucesión de $X = (x_n)$ tiene una subsucesión que converge a 0. Demostrar que $\lim X = 0$.

10. Sea (x_n) una sucesión acotada, y para toda $n \in \mathbb{N}$ sean $s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ y $S := \inf\{s_n\}$. Demostrar que existe una subsucesión de (x_n) que converge a S.

11. Suponer que $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim((-1)^n x_n)$ existe. Demostrar que (x_n) converge.

12. Demostrar que si (x_n) no está acotada, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\lim(1/x_{n_k}) = 0$.

13. Si $x_n := (-1)^n/n$, encontrar la subsucesión de (x_n) que se construyó en la segunda demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8, cuando se toma $I_1 := [-1, 1]$.

14. Sea (x_n) una sucesión acotada y sea $s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostrar que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay una subsucesión de (x_n) que converge a s.

15. Sea (I_n) una sucesión anidada de intervalos acotados cerrados. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea que $x_n \in I_n$. Usar el teorema de Bolzano-Weierstrass para dar una demostración de la propiedad de los intervalos anidados 2.5.2.

16. Dar un ejemplo que muestre que el teorema 3.4.9 no se cumple si se omite la hipótesis de que X es una sucesión acotada.

SECCIÓN 3.5 El criterio de Cauchy

El teorema de convergencia monótona es de extraordinaria utilidad e importancia, pero tiene la desventaja significativa de que sólo se aplica a sucesiones que son monótonas. Es importante contar con una condición que implique la convergencia de una sucesión que no requiera conocer de antemano el valor del límite y que no esté restringida a sucesiones monótonas. El criterio de Cauchy, el cual se establece en esta sección, es esta condición.

3.5.1 Definición Se afirma que una sucesión $X = (x_n)$ de números reales es una **sucesión de Cauchy** si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $H(\varepsilon)$ tal que para todos los números naturales $n, m \geq H(\varepsilon)$, los términos x_n, x_m satisfacen $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

La importancia del concepto de sucesión de Cauchy se encuentra plasmada en el teorema principal de esta sección, el cual afirma que una sucesión de números

reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy. Este resultado proporciona un método para demostrar que una sucesión converge sin necesidad de conocer su límite.

Sin embargo, antes se pone de relieve la definición de sucesión de Cauchy en los siguientes ejemplos.

3.5.2 Ejemplos **a)** La sucesión $(1/n)$ es una sucesión de Cauchy.

Si $\varepsilon > 0$ está dada, se elige un número natural $H = H(\varepsilon)$ tal que $H > 2/\varepsilon$. Entonces, si $m, n \geq H$, se tiene $1/n \leq 1/H < \varepsilon/2$; del mismo modo, $1/m < \varepsilon/2$. Por lo tanto, se sigue que si $m, n \geq H$, entonces

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $(1/n)$ es una sucesión de Cauchy.

b) La sucesión $(1 + (-1)^n)$ *no* es una sucesión de Cauchy.

La negación de la definición de sucesión de Cauchy es: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda H existe al menos una $n > H$ y al menos una $m > H$ tales que $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$. Para los términos $x_n := 1 + (-1)^n$, se observa que si n es par, entonces $x_n = 2$ y $x_{n+1} = 0$. Si se toma $\varepsilon_0 = 2$, entonces para cualquier H puede elegirse un número par $n > H$ y sea $m := n + 1$ para obtener

$$|x_n - x_{n+1}| = 2 = \varepsilon_0.$$

Se concluye que (x_n) no es una sucesión de Cauchy. □

Observación Se hace hincapié en que para demostrar que una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy no puede suponerse una relación entre m y n, ya que la desigualdad requerida $|x_n - x_m| < \varepsilon$ debe ser válida para *toda* $n, m \geq H(\varepsilon)$. Pero para demostrar que una sucesión *no* es una sucesión de Cauchy, puede especificarse una relación entre n y m siempre que puedan elegirse valores arbitrariamente grandes de n y m de tal modo que $|x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$.

El objetivo que se persigue es demostrar que las sucesiones de Cauchy son precisamente las sucesiones convergentes. Se prueba primero que una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

3.5.3 Lema *Si* $X = (x_n)$ *es una sucesión convergente de números reales, entonces* X *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Si $x := \lim X$, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\varepsilon/2)$ tal que si $n \geq K(\varepsilon/2)$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Por tanto, si $H(\varepsilon) := K(\varepsilon/2)$ y si $n, m \geq H(\varepsilon)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) + (x - x_m)| \\ &\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Q.E.D.

Para establecer que una sucesión de Cauchy es convergente se necesitará el siguiente resultado. (Véase el teorema 3.2.2.)

3.5.4 Lema *Una sucesión de Cauchy de números reales está acotada.*

Demostración. Sea $X := (x_n)$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon := 1$. Si $H := H(1)$ y $n \geq H$, entonces $|x_n - x_H| < 1$. En consecuencia, por la desigualdad del triángulo, se tiene $|x_n| \leq |x_H| + 1$ para toda $n \geq H$. Si se hace

$$M := \sup \{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\},$$

entonces se sigue que $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Se presenta ahora el importante criterio de convergencia de Cauchy.

3.5.5 Criterio de convergencia de Cauchy *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Se ha visto, en el lema 3.5.3, que una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, sea $X = (x_n)$ una sucesión de Cauchy; se demostrará ahora que X es convergente a algún número real. Primero se observa por el lema 3.5.4 que la sucesión X está acotada. Por lo tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8, existe una subsucesión $X' = (x_{nk})$ de X que converge a algún número real x^*. La demostración se completará probando que X converge a x^*.

Puesto que $X = (x_n)$ es una sucesión de Cauchy, dada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $H(\varepsilon/2)$ tal que si $n, m \geq H(\varepsilon/2)$, entonces

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Puesto que la subsucesión $X' = (x_{n_k})$ converge a x^*, existe un número natural $K \geq H(\varepsilon/2)$ que pertenece al conjunto $\{n_1, n_2, \cdots\}$ tal que

$$|x_K - x^*| < \varepsilon/2.$$

Puesto que $K \geq H(\varepsilon/2)$, de (1) con $m = K$ se sigue que

$$|x_n - x_K| < \varepsilon/2 \qquad \text{para} \quad n \geq H(\varepsilon/2).$$

Por lo tanto, si $n \geq H(\varepsilon/2)$, se tiene

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |(x_n - x_K) + (x_K - x^*)| \\ &\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que $\lim(x_n) = x^*$. Por lo tanto, la sucesión X es convergente. Q.E.D.

Se presentan a continuación algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de Cauchy.

3.5.6 Ejemplos **a)** Sea que $X = (x_n)$ esté definida por

$$x_1 := 1, \qquad x_2 := 2, \qquad \text{y} \qquad x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}), \qquad \text{para} \qquad n > 2.$$

Es posible demostrar por inducción matemática que $1 \leq x_n \leq 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (Hacerlo.) Algunos cálculos indican que la sucesión X no es monótona. Sin embargo, ya que los términos se forman sacando promedios, se observa de inmediato que

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Demostrar esta afirmación por inducción matemática.) Por tanto, si $m > n$, puede aplicarse la desigualdad del triángulo para obtener

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$, si se elige un valor de n tan grande que $1/2^n < \varepsilon/4$ y si $m \geq n$, entonces se sigue que $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Por lo tanto, X es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por el criterio de Cauchy 3.5.5 se infiere que la sucesión X converge a un número x.

Para evaluar el límite x, primero se podría "pasar al límite" en la regla de definición $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ para concluir que x debe satisfacer la relación $x = \frac{1}{2}(x + x)$, que es verdadera pero no informativa. Por consiguiente, debe intentarse algo más.

Puesto que X converge a x, la subsucesión X' con índices impares también lo hace. El lector puede establecer, por inducción matemática, que (véase 1.2.4f)

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right). \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue (¿cómo?) que $x = \text{lím } X = \text{lím } X' = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

b) Sea $Y = (y_n)$ la sucesión de números reales dada por

$$y_1 := \frac{1}{1!}, \quad y_2 := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}, \ldots, \quad y_n := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \ldots$$

Evidentemente, Y no es una sucesión monótona. Sin embargo, si $m > n$, entonces

$$y_m - y_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}.$$

Puesto que $2^{r-1} \leq r!$ (véase 1.2.4e), se sigue que si $m > n$, entonces (¿por qué?)

$$|y_m - y_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$
$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por lo tanto, se sigue que (y_n) es una sucesión de Cauchy. En consecuencia, converge a un límite y. Por el momento no es posible evaluar y directamente; sin embargo, pasando al límite (con respecto a m) en la desigualdad anterior, se obtiene

$$|y_n - y| \leq 1/2^{n-1}.$$

En consecuencia, y se puede determinar con cualquier grado de precisión deseado calculando los términos y_n para n suficientemente grande. Le corresponderá al lector hacerlo y demostrar que y es aproximadamente igual a 0.632 120 559. (El valor exacto de y es $1 - 1/e$.)

c) La sucesión $\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Sea $H := (h_n)$ la sucesión definida por

$$h_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

que se consideró en 3.3.3b. Si $m > n$, entonces

$$h_m - h_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Puesto que cada uno de estos $m - n$ términos excede a $1/m$, entonces $h_m - h_n > (m-n)/m = 1 - n/m$. En particular, si $m = 2n$ se tiene $h_{2n} - h_n > \frac{1}{2}$. Con esto se demuestra que H no es una sucesión de Cauchy (¿por qué?); por lo tanto, H *no* es una sucesión convergente. (En términos que se introducen en la sección 3.7, acaba de demostrarse que la "serie armónica" $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente.) □

3.5.7 Definición Se dice que una sucesión $X = (x_n)$ de números reales es **contractiva** si existe una constante C, $0 < C < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Al número C se le llama la **constante** de la sucesión contractiva.

3.5.8 Teorema *Toda sucesión contractiva es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, es convergente.*

Demostración. Si se aplica sucesivamente la condición que define una sucesión contractiva, se puede avanzar hacia atrás hasta llegar al principio de la sucesión de la siguiente manera:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n| \leq C^2|x_n - x_{n-1}|$$
$$\leq C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq C^n|x_2 - x_1|.$$

Para $m > n$, se estima $|x_m - x_n|$ aplicando primero la desigualdad del triángulo y usando después la fórmula para la suma de una progresión geométrica (véase 1.2.4f). Se obtiene así

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le (C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &= C^{n-1}\left(\frac{1-C^{m-n}}{1-C}\right)|x_2 - x_1| \\ &\le C^{n-1}\left(\frac{1}{1-C}\right)|x_2 - x_1|.\end{aligned}$$

Puesto que $0 < C < 1$, se sabe que $\lim(C^n) = 0$ (véase 3.1.11b). Por lo tanto, se infiere que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Entonces, por el criterio de convergencia de Cauchy 3.5.5 se sigue que (x_n) es una sucesión convergente. Q.E.D.

En el proceso de calcular el límite de una sucesión contractiva, con frecuencia es de suma importancia contar con una estimación del error en la n-ésima etapa. En el siguiente resultado se presentan dos de estas estimaciones: la primera incluye los dos primeros términos de la sucesión y n; la segunda incluye la diferencia $x_n - x_{n-1}$.

3.5.9 Corolario *Si* $X := (x_n)$ *es una sucesión contractiva con constante* C, $0 < C < 1$, *y si* $x^* := \lim X$, *entonces*

(i) $|x^* - x_n| \le \dfrac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|,$

(ii) $|x^* - x_n| \le \dfrac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|.$

Demostración. Por la demostración precedente, si $m > n$, entonces $|x_m - x_n| \le (C^{n-1}/(1-C))|x_2 - x_1|$. Si se hace que $m \to \infty$ en esta desigualdad, entonces se obtiene (i).

Para demostrar (ii), recuérdese que si $m > n$, entonces

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|.$$

Puesto que es inmediato, aplicando la inducción matemática, que

$$|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \le C^k|x_n - x_{n-1}|,$$

se infiere que

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\le (C^{m-n} + \cdots + C^2 + C)|x_n - x_{n-1}| \\ &\le \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|.\end{aligned}$$

Ahora se hace que $m \to \infty$ en esta desigualdad para obtener la afirmación (ii).

Q.E.D.

3.5.10 Ejemplo Se nos dice que la ecuación cúbica $x^3 - 7x + 2 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1 y queremos obtener una aproximación de dicha solución. Esto puede conseguirse por medio de un procedimiento de iteración de la siguiente manera. Primero la ecuación se reescribe como $x = (x^3 + 2)/7$ y se usa esta expresión para definir una sucesión. Se le asigna a x_1 un valor arbitrario entre 0 y 1 y después se define

$$x_{n+1} := \frac{1}{7}(x_n^3 + 2) \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < x_1 < 1$, se sigue que $0 < x_n < 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (¿Por qué?) Además, se tiene

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{7}(x_{n+1}^3 + 2) - \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)\right| = \frac{1}{7}|x_{n+1}^3 - x_n^3| \\ &= \frac{1}{7}|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2|\,|x_{n+1} - x_n| \le \frac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (x_n) es una sucesión contractiva y en consecuencia existe r tal que $\text{lím}(x_n) = r$. Si se pasa al límite en ambos miembros de la igualdad $x_{n+1} = (x_n^3 + 2)/7$, se obtiene $r = (r^3 + 2)/7$ y, en consecuencia, $r^3 - 7r + 2 = 0$. Por tanto, r es una solución de la ecuación.

Se puede obtener una aproximación de r eligiendo un valor para x_1 y calculando $x_2, x_3, \cdots$, sucesivamente. Por ejemplo, si se toma $x_1 = 0.5$, se obtiene (con nueve cifras decimales):

$$\begin{aligned} x_2 &= 0.303\,571\,429, & x_3 &= 0.289\,710\,830, \\ x_4 &= 0.289\,188\,016, & x_5 &= 0.289\,169\,244, \\ x_6 &= 0.289\,168\,571, & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Para estimar la precisión, se observa que $|x_2 - x_1| < 0.2$. Así, después de n pasos se sigue, por el corolario 3.5.9(i), que se tiene la seguridad de que $|x^* - x_n| \le 3^{n-1}/(7^{n-2} \cdot 20)$. Así, cuando $n = 6$, se tiene la seguridad de que

$$|x^* - x_6| \le 3^5/(7^4 \cdot 20) = 243/48\,020 < 0.0051.$$

En realidad la aproximación es sustancialmente mejor. De hecho, ya que $|x_6 - x_5| < 0.000\,0005$, de 3.5.9(ii) se sigue que $|x^* - x_6| \le \frac{3}{4}|x_6 - x_5| < 0.000\,0004$. Por consiguiente, las cinco primeras cifras decimales de x_6 son correctas. □

Ejercicios de la sección 3.5

1. Dar un ejemplo de una sucesión acotada que no sea una sucesión de Cauchy.

2. Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes son sucesiones de Cauchy.

a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, b) $\left(1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

3. Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy.

a) $((-1)^n)$, b) $\left(n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, (c) $(\ln n)$.

4. Demostrar directamente a partir de la definición que si (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy, entonces $(x_n + y_n)$ y $(x_n y_n)$ son sucesiones de Cauchy.

5. Si $x_n := \sqrt{n}$, demostrar que (x_n) satisface $\lim |x_{n+1} - x_n| = 0$, pero que no es una sucesión de Cauchy.

6. Sea p un número natural dado. Dar un ejemplo de una sucesión (x_n) que no sea una sucesión de Cauchy, pero que satisfaga $\lim |x_{n+p} - x_n| = 0$.

7. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy tal que x_n es un entero para toda $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (x_n) es constante a la larga.

8. Demostrar directamente que una sucesión creciente, monótona y acotada es una sucesión de Cauchy.

9. Si $0 < r < 1$ y $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, demostrar que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

10. Si $x_1 < x_2$ son números reales arbitrarios y $x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ para $n > 2$, demostrar que (x_n) es convergente. ¿Cuál es su límite?

11. Si $y_1 < y_2$ son números reales arbitrarios y $y_n := \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2}$ para $n > 2$, demostrar que (y_n) es convergente. ¿Cuál es su límite?

12. Si $x_1 > 0$ y $x_{n+1} := (2 + x_n)^{-1}$ para $n \geq 1$, demostrar que (x_n) es una sucesión contractiva. Encontrar el límite.

13. Si $x_1 := 2$ y $x_{n+1} := 2 + 1/x_n$ para $n \geq 1$, demostrar que (x_n) es una sucesión contractiva. ¿Cuál es su límite?

14. La ecuación polinómica $x^3 - 5x + 1 = 0$ tiene una raíz r con $0 < r < 1$. Usar una sucesión contractiva adecuada para calcular r con una precisión de 10^{-4}.

SECCIÓN 3.6 Sucesiones propiamente divergentes

Para ciertos fines, es conveniente definir lo que se entiende cuando se dice que una sucesión (x_n) de números reales "tiende a $\pm\infty$".

3.6.1 Definición Sea (x_n) una sucesión de números reales.

(i) Se dice que (x_n) **tiende a** $+\infty$, y se escribe $\lim(x_n) = +\infty$, si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un número natural $K(\alpha)$ tal que si $n \geq K(\alpha)$, entonces $x_n > \alpha$.

(ii) Se dice que (x_n) **tiende a** $-\infty$, y se escribe $\lim(x_n) = -\infty$, si para toda $\beta \in \mathbb{R}$ existe un número natural $K(\beta)$ tal que si $n \geq K(\beta)$, entonces $x_n < \beta$.

Se dice que (x_n) es **propiamente divergente** en caso que se tenga $\text{lím}(x_n) = +\infty$, o bien $\text{lím}(x_n) = -\infty$.

El lector deberá tener presente que los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se usan tan sólo como una *notación* conveniente en las expresiones anteriores. Los resultados que se han demostrado en secciones anteriores para límites ordinarios $\text{lím}(x_n) = L$ (para $L \in \mathbb{R}$) *quizá no* sigan siendo válidos cuando $\text{lím}(x_n) = \pm\infty$.

3.6.2 Ejemplos **a)** $\text{lím}(n) = +\infty$.

De hecho, si $a \in \mathbb{R}$ está dada, sea $K(\alpha)$ cualquier número natural tal que $K(\alpha) > \alpha$.

b) $\text{lím}(n^2) = +\infty$.

Si $K(\alpha)$ es un número natural tal que $K(\alpha) > \alpha$ y si $n \geq K(\alpha)$, entonces se tiene $n^2 \geq n > \alpha$.

c) Si $c > 1$, entonces $\text{lím}(c^n) = +\infty$.

Sea $c = 1 + b$, donde $b > 0$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ está dada, sea $K(\alpha)$ un número natural tal que $K(\alpha) > \alpha/b$. Si $n \geq K(\alpha)$, de la desigualdad de Bernoulli se sigue que

$$c^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > 1 + \alpha > \alpha.$$

Por lo tanto, $\text{lím}(c^n) = +\infty$. □

Las sucesiones monótonas son particularmente simples en lo que a su convergencia se refiere. En el teorema de convergencia monótona 3.3.2 se ha visto que una sucesión monótona es convergente si y sólo si está acotada. El siguiente resultado es una reformulación de este hecho.

3.6.3 Teorema *Una sucesión monótona de números reales es propiamente divergente si y sólo si no está acotada.*

a) *Si* (x_n) *es una sucesión creciente no acotada, entonces* $\text{lím}(x_n) = +\infty$.

b) *Si* (x_n) *es una sucesión decreciente no acotada, entonces* $\text{lím}(x_n) = -\infty$.

Demostración. a) Suponer que (x_n) es una sucesión creciente. Se sabe que si (x_n) está acotada, entonces es convergente. Si (x_n) no está acotada, entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_{n(\alpha)}$. Pero como (x_n) es creciente, se tiene $\alpha < x_n$ para toda $n \geq n(\alpha)$. Asimismo, puesto que α es arbitraria, se sigue que $\text{lím}(x_n) = +\infty$.

La demostración del inciso b) se hace de manera similar. Q.E.D.

El siguiente "teorema de comparación" se usa con frecuencia para demostrar que una sucesión es propiamente divergente. [De hecho, se usó de manera implícita en el ejemplo 3.6.2c.]

3.6.4 Teorema *Sean* (x_n) *y* (y_n) *dos sucesiones de números reales y suponer que*

$$x_n \leq y_n \qquad \textit{para toda} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

a) *Si* $\text{lím}(x_n) = +\infty$, *entonces* $\text{lím}(y_n) = +\infty$.

b) *Si* $\text{lím}(y_n) = -\infty$, *entonces* $\text{lím}(x_n) = -\infty$.

Demostración. a) Si $\text{lím}(x_n) = +\infty$ y si $\alpha \in \mathbb{R}$ está dada, entonces existe un número natural $K(\alpha)$ tal que si $n \geq K(\alpha)$, entonces $\alpha < x_n$. Con base en (1), se sigue que $\alpha < y_n$ para toda $n \geq K(\alpha)$. Puesto que a es arbitraria, se sigue que $\text{lím}(y_n) = +\infty$.

La demostración del inciso b) es similar. Q.E.D.

Observaciones **a)** El teorema 3.6.4 sigue siendo válido si la condición (1) se cumple a la larga; es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para toda $n \geq m$.
b) Si la condición (1) del teorema 3.6.4 se cumple y si $\text{lím}(y_n) = +\infty$, *no* se sigue que $\text{lím}(x_n) = +\infty$. Del mismo modo, si (1) se cumple y si $\text{lím}(x_n) = -\infty$, *no* se sigue que $\text{lím}(y_n) = -\infty$. Al usar el teorema 3.6.4 para demostrar que una sucesión tiende a $+\infty$ [o bien, a $-\infty$], es necesario demostrar que los términos de la sucesión a la larga son mayores [o bien, menores] o iguales que los términos correspondientes de una sucesión de la que se sabe que tiende a $+\infty$ [o bien, a $-\infty$].

Puesto que en ocasiones es difícil establecer una desigualdad como (1), con frecuencia la aplicación del siguiente "teorema de comparación de límites" resulta más conveniente que usar el teorema 3.6.4.

3.6.5 Teorema *Sean* (x_n) *y* (y_n) *dos sucesiones de números reales positivos y suponer que para alguna* $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, *se tiene*

$$\text{lím}(x_n/y_n) = L. \tag{2}$$

Entonces $\text{lím}(x_n) = +\infty$ *si y sólo si* $\text{lím}(y_n) = +\infty$.

Demostración. Si se cumple (2), existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\tfrac{1}{2}L < x_n/y_n < \tfrac{3}{2}L \qquad \text{para toda} \quad n \geq K.$$

Se tiene por tanto que $(\frac{1}{2}L)y_n < x_n < (\frac{3}{2}L)y_n$ para toda $n \geq K$. La conclusión se sigue ahora de una ligera modificación del teorema 3.6.4. Se le dejan los detalles al lector. Q.E.D.

El lector puede demostrar que la conclusión no se cumple necesariamente si $L = 0$ o $L = +\infty$. Sin embargo, hay algunos resultados parciales que pueden establecerse en estos casos, como se verá en los ejercicios.

Ejercicios de la sección 3.6

1. Demostrar que si (x_n) es una sucesión no acotada, entonces existe una subsucesión propiamente divergente.

2. Dar ejemplos de sucesiones propiamente divergentes (x_n) y (y_n) con $y_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tales que:

a) (x_n/y_n) es convergente, b) (x_n/y_n) es propiamente divergente.

3. Demostrar que si $x_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}(x_n) = 0$ si y sólo si $\text{lím}(1/x_n) = +\infty$.

4. Establecer que las siguientes sucesiones son propiamente divergentes.

   a) $(\sqrt{n})$, b) $(\sqrt{n+1})$,
   c) $(\sqrt{n-1})$, d) $(n/\sqrt{n+1})$.

5. ¿La sucesión (n sen n) es propiamente divergente?

6. Sea (x_n) propiamente divergente y sea (y_n) tal que $\text{lím}(x_n y_n)$ pertenece a $\mathbb{R}$. Demostrar que (y_n) converge a 0.

7. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones de números positivos tales que $\text{lím}(x_n/y_n) = 0$.

   a) Demostrar que si $\text{lím}(x_n) = +\infty$, entonces $\text{lím}(y_n) = +\infty$.
   b) Demostrar que si (y_n) está acotada, entonces $\text{lím}(x_n) = 0$.

8. Investigar la convergencia o la divergencia de las siguientes sucesiones:

   a) $(\sqrt{n^2+2})$, b) $(\sqrt{n}/(n^2+1))$,
   c) $(\sqrt{n^2+1}/\sqrt{n})$, d) $(\text{sen}\sqrt{n})$.

9. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones de números positivos tales que $\text{lím}(x_n/y_n) = +\infty$.

   a) Demostrar que si $\text{lím}(y_n) = +\infty$, entonces $\text{lím}(x_n) = +\infty$.
   b) Demostrar que si (x_n) está acotada, entonces $\text{lím}(y_n) = 0$.

10. Demostrar que si $\text{lím}(a_n/n) = L$, donde $L > 0$, entonces $\text{lím}(a_n) = +\infty$.

SECCIÓN 3.7 Introducción a las series infinitas

Se presenta ahora una breve introducción a las series infinitas de números reales. Es un tema que se discutirá con mayor detalle en el capítulo 9 pero, debido a su importancia, se establecerán aquí algunos resultados. Se verá que estos resultados son consecuencias inmediatas de los teoremas que se han visto en este capítulo.

En textos elementales, una serie infinita se "define" en ocasiones como "una expresión de la forma"

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots. \tag{1}$$

Sin embargo, esta "definición" carece de claridad, ya que no hay *a priori* ningún valor particular que pueda asociarse con este arreglo de símbolos, el cual requiere la realización de un número *infinito* de adiciones.

3.7.1 Definición Si $X := (x_n)$ es una sucesión en $\mathbb{R}$, entonces la **serie infinita** (o simplemente la **serie**) **generada por** X es la sucesión $S := (s_k)$ definida por

$$
\begin{aligned}
s_1 &:= x_1 \\
s_2 &:= s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2) \\
&\cdots \\
s_k &:= s_{k-1} + x_k \qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

A los números x_n se les llama los **términos** de la serie y a los números s_k se les llama las **sumas parciales** de la serie. Si lím S existe, se dice que la serie es **convergente** y a dicho límite se le llama la **suma** o el **valor** de la serie. Si este límite no existe, se dice que la serie S es **divergente**.

Es conveniente usar símbolos como

$$\sum (x_n) \quad \text{o} \quad \sum x_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{2}$$

para denotar tanto la serie infinita S generada por la sucesión $X = (x_n)$ como el valor lím S, en caso de que el límite exista. Así, los símbolos en (2) pueden considerarse tan sólo como una manera de presentar una serie infinita cuya convergencia o divergencia va a investigarse. En la práctica, este doble uso de las notaciones no lleva a confusión, siempre y cuando se sobreentienda que la convergencia (o divergencia) de la serie debe establecerse.

Como en el caso de una sucesión en la que pueden usarse los índices de tal modo que su primer elemento no sea x_1, sino x_0 o x_5 o x_{99}, las series que tienen estos números como su primer elemento se denotarán por los símbolos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=5}^{\infty} x_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=99}^{\infty} x_n .$$

Cabe hacer notar que cuando el primer término en la serie es x_N, entonces la primera suma parcial se denota por s_N.

Atención El lector deberá estar atento para no confundir los vocablos "sucesión" y "serie". En el lenguaje no matemático, estos dos términos son intercambiables; sin embargo, en matemáticas no son sinónimos. De hecho, una serie es una sucesión $S = (s_k)$ obtenida de una sucesión dada $X = (x_n)$ de acuerdo con el procedimiento especial dado en la definición 3.7.1.

3.7.2 Ejemplos **a)** Considerar la sucesión $X := (r^n)_{n=0}^{\infty}$, donde $r \in \mathbb{R}$, que genera la **serie geométrica**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots. \tag{3}$$

Se demostrará que si $|r| < 1$, entonces la serie converge a $1/(1-r)$. (Véase también el ejemplo 1.2.4f.) De hecho, si $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ para $n \geq 0$, y si se multiplica s_n por r y el resultado se resta de s_n, se obtiene (después de simplificar):

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Por lo tanto, se tiene

$$s_n - \frac{1}{1-r} = -\frac{r^{n+1}}{1-r},$$

de donde se sigue que

$$\left| s_n - \frac{1}{1-r} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Puesto que $|r|^{n+1} \to 0$ cuando $|r| < 1$, se sigue que la serie geométrica (3) converge a $1/(1-r)$ cuando $|r| < 1$.

b) Considerar la serie generada por $((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$; es decir, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (+1) + (-1) + (+1) + (-1) + \cdots. \tag{4}$$

Es fácil ver (por inducción matemática) que $s_n = 1$ si $n \geq 0$ es par y $s_n = 0$ si n es impar; por lo tanto, la sucesión de sumas parciales es $(1, 0, 1, 0, \cdots)$. Puesto que esta sucesión no es convergente, la serie (4) es divergente.

c) Considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots. \tag{5}$$

Por un golpe de perspicacia, se observa que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

En consecuencia, al sumar estos términos de $k = 1$ a $k = n$ y advirtiendo el proceso telescópico que tiene lugar, se obtiene

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1},$$

de donde se sigue que $s_n \to 1$. Por lo tanto, la serie (5) converge a 1. □

Se presenta ahora una condición *necesaria* de gran utilidad y simplicidad para la convergencia de una serie, la cual, sin embargo, se encuentra muy lejos de ser suficiente.

3.7.3 El criterio del n-ésimo término *Si la serie* $\sum x_n$ *converge, entonces* $\lim(x_n) = 0$.

Demostración. Por la definición 3.7.1, la convergencia de $\sum x_n$ requiere que $\lim(s_k)$ exista. Así, puesto que $x_n = s_n - s_{n-1}$, entonces $\lim(x_n) = \lim(s_n) - \lim(s_{n-1}) = 0$. Q.E.D.

Puesto que el criterio de Cauchy que se presenta a continuación es tan sólo una reformulación del teorema 3.5.5, se omite la demostración.

3.7.4 Criterio de Cauchy para series *La serie* $\sum x_n$ *converge si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m > n \geq M(\varepsilon)$, *entonces*

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon. \tag{6}$$

El siguiente resultado, aunque de alcance limitado, es de gran importancia y utilidad.

3.7.5 Teorema *Sea* (x_n) *una sucesión de números reales no negativos. Entonces la serie* $\sum x_n$ *converge si y sólo si la sucesión* $S = (s_k)$ *de sumas parciales está acotada. En este caso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \text{lím}(s_k) = \sup\{s_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Puesto que $x_n > 0$, la sucesión S de sumas parciales es monótona creciente:

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots.$$

Por el teorema de convergencia monótona 3.3.2, la sucesión $S = (s_k)$ converge si y sólo si está acotada, en cuyo caso su límite es igual a $\sup\{s_k\}$. Q.E.D.

3.7.6 Ejemplos **a)** La serie geométrica (3) diverge si $|r| \geq 1$.

Esto se sigue del hecho de que los términos r^n no tienden a 0 cuando $|r| \geq 1$.

b) **La serie armónica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Puesto que los términos $1/n \to 0$, no puede usarse el criterio del n-ésimo término 3.7.3 para establecer esta divergencia. Sin embargo, en los ejemplos 3.3.3b y 3.5.6c se vio que la sucesión (s_n) de sumas parciales no está acotada. Por lo tanto, del teorema 3.7.5 se sigue que la serie armónica es divergente.

c) La **serie** $2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Puesto que las sumas parciales son monótonas, basta (¿por qué?) demostrar que alguna subsucesión de (s_k) está acotada. Si $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, entonces $s_{k_1} = 1$. Si $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, entonces

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2},$$

y si $k_3 := 2^3 - 1 = 7$, entonces se tiene

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.$$

Por inducción matemática se encuentra que si $k_j := 2^j - 1$, entonces

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.$$

Puesto que el término de la derecha es una suma parcial de una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$, está dominada por $1/(1 - \frac{1}{2}) = 2$, y el teorema 3.7.5 implica que la serie 2 converge.

d) La **serie** p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge cuando $p > 1$.

Puesto que el razonamiento es muy similar al caso especial considerado en el inciso c), se le dejan al lector algunos de los detalles. Como antes, si $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, entonces $s_{k_1} = 1$. Si $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, entonces, ya que $2^p < 3^p$, se tiene

$$s_{k_2} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Además, si $k_3 := 2^3 - 1$, entonces (¿cómo?) se observa que

$$s_{k_3} < s_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}.$$

Por último, se hace $r := 1/2^{p-1}$; como $p > 1$, se tiene $0 < r < 1$. Aplicando la inducción matemática, se demuestra que si $k_j := 2^j - 1$, entonces

$$0 < s_{k_j} < 1 + r + r^2 + \cdots + r^{j-1} < \frac{1}{1 - r}.$$

Por lo tanto, el teorema 3.7.5 implica que la serie p converge cuando $p > 1$.

e) La **serie** p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge cuando $0 < p \leq 1$.

Se usa la desigualdad elemental $n^p \leq n$ cuando $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p \leq 1$. Se sigue que

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que las sumas parciales de la serie armónica no están acotadas, con esta desigualdad se demuestra que las sumas parciales de la serie p no están acotadas cuando $0 < p \leq 1$. Por consiguiente, la serie p diverge para estos valores de p.

f) La **serie armónica alternada**, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \tag{7}$$

es convergente.

El lector deberá comparar esta serie con la serie armónica del inciso b), que es divergente. Por tanto, la sustracción de algunos de los términos en (7) es esencial si esta serie tiene que converger. Puesto que se tiene

$$s_{2n} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

es claro que la subsucesión "par" (s_{2n}) es creciente. Del mismo modo, la subsucesión "impar" (s_{2n+1}) es decreciente ya que

$$s_{2n+1} = \frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Puesto que $0 < s_{2n} < s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1} \leq 1$, estas dos subsucesiones están acotadas inferiormente por 0 y superiormente por 1. Por lo tanto, ambas son convergentes y al mismo valor. Así, la sucesión (s_n) de sumas parciales converge, con lo que se demuestra que la serie armónica alternada (7) converge. (Se encuentra lejos de ser evidente que el límite de esta serie es igual a ln 2.) □

Criterios de comparación

El primer criterio indica que si los términos de una serie no negativa están dominados por los términos correspondientes de una *serie convergente*, entonces la primera serie es convergente.

3.7.7 Criterio de comparación *Sean* $X := (x_n)$ *y* $Y := (y_n)$ *sucesiones reales y suponer que para alguna* $K \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$0 \leq x_n \leq y_n \qquad para \quad n \geq K. \tag{8}$$

a) *Entonces la convergencia de* $\sum y_n$ *implica la convergencia de* $\sum x_n$.

b) *La divergencia de* $\sum x_n$ *implica la divergencia de* $\sum y_n$.

Demostración. a) Suponer que $\sum y_n$ converge y, dada $\varepsilon > 0$, sea $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq M(\varepsilon)$, entonces

$$y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon.$$

Si $m > \sup\{K, M(\varepsilon)\}$, entonces se sigue que

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon,$$

de donde se sigue la convergencia de $\sum x_n$.

b) Este enunciado es el contrapositivo de a). Q.E.D.

Puesto que en ocasiones es difícil establecer las desigualdades (8), el siguiente resultado suele ser de gran utilidad.

3.7.8 Criterio de comparación de límites *Suponer que* X := (x_n) *y* Y := (y_n) *son sucesiones estrictamente positivas y suponer que el siguiente límite existe en* $\mathbb{R}$:

$$r := \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right). \tag{9}$$

a) *Si* $r \neq 0$, *entonces* $\sum x_n$ *es convergente si y sólo si* $\sum y_n$ *es convergente.*

b) *Si* $r = 0$ *y si* $\sum y_n$ *es convergente, entonces* $\sum x_n$ *es convergente.*

Demostración. a) De (9) y del ejercicio 3.1.17 se sigue que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}r \leq x_n/y_n \leq 2r$ para $n \geq K$, de donde

$$\left(\frac{1}{2}r\right)y_n \leq x_n \leq (2r)y_n \qquad \text{para} \quad n \geq K.$$

Si se aplica dos veces el criterio de comparación 3.7.7, se obtiene la afirmación de a).

b) Si $r = 0$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < x_n \leq y_n \qquad \text{para} \quad n \geq K,$$

en cuyo caso se aplica el teorema 3.7.7a. Q.E.D.

Observación Los criterios de comparación 3.7.7 y 3.7.8 dependen de contar con un acervo de series cuya convergencia (o divergencia) se conozca. El lector encontrará que la serie p suele ser de utilidad para este fin.

3.7.9 Ejemplos **a)** La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ converge.

Es evidente que la desigualdad

$$0 < \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}$$

es válida. Puesto que la serie $\sum 1/n^2$ es convergente (por el ejemplo 3.7.6c), puede aplicarse el criterio de comparación 3.7.7 para obtener la convergencia de la serie dada.

b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ es convergente.

Si la desigualdad

$$\frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{n^2} \tag{10}$$

fuera verdadera, sería posible usar un razonamiento como el del inciso a). Sin embargo, (10) es *falsa* para toda $n \in \mathbb{N}$. Es probable que el lector pueda demostrar que la desigualdad

$$0<\frac{1}{n^2-n+1}\leq\frac{2}{n^2}$$

es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, y esta desigualdad funcionará igual de bien. Sin embargo, podría tomar algo de experimentación pensar en una desigualdad así y luego establecerla.

Si en vez de ello se toma $x_n := 1/(n^2 - n + 1)$ y $y_n := 1/n^2$, entonces se tiene

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{n^2}{n^2-n+1}=\frac{1}{1-(1/n)+(1/n^2)}\to 1.$$

Por lo tanto, la convergencia de la serie dada se sigue del criterio de comparación de límites 3.7.8a.

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ es divergente.

Esta serie se parece mucho a la serie $\sum 1/\sqrt{n}$, que es una serie p con $p = \frac{1}{2}$; por el ejemplo 3.7.6e, es divergente. Si se hace $x_n := 1/\sqrt{n+1}$ y $y_n := 1/\sqrt{n}$, entonces se tiene

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}\to 1.$$

Por consiguiente, puede aplicarse el teorema de comparación de límites 3.7.8a.

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ es convergente.

Sería posible establecer esta convergencia demostrando (por inducción matemática) que $n^2 < n!$ para $n \geq 4$, de donde se sigue que

$$0<\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}\qquad \text{para}\quad n\geq 4.$$

De manera alternativa, si se hace $x := 1/n!$ y $y_n := 1/n^2$, entonces (cuando $n \geq 4$) se tiene

$$0\leq\frac{x_n}{y_n}=\frac{n^2}{n!}=\frac{n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}<\frac{1}{n-2}\to 0.$$

Por tanto, puede aplicarse el teorema de comparación de límites 3.7.8b. (Adviértase que la aplicación de este teorema resultó un tanto complicada porque no se conoce de inmediato la convergencia de cualesquiera series para las que el límite de x_n/y_n es realmente fácil de determinar.) □

Ejercicios de la sección 3.7

1. Sea $\sum a_n$ una serie dada y sea $\sum b_n$ la serie en que los términos son los mismos y en el mismo orden que en $\sum a_n$, excepto porque los términos para los que $a_n = 0$ se han omitido. Demostrar que $\sum a_n$ converge a A si y sólo si $\sum b_n$ converge a A.

2. Demostrar que la convergencia de una serie no resulta afectada si se cambia un número *finito* de sus términos. (Desde luego, el valor de la suma puede cambiar.)

3. Utilizando fracciones parciales, demostrar que

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1,$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} > 0$, si $\alpha > 0$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$

4. Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son convergentes, demostrar que $\sum(x_n + y_n)$ es convergente.

5. ¿Puede citar un ejemplo de una serie convergente $\sum x_n$ y una serie divergente $\sum y_n$ tales que $\sum(x_n + y_n)$ sea convergente? Explique su respuesta.

6. a) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ es divergente.

b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n)/n^2$ es convergente.

7. Utilizar un razonamiento similar al del ejemplo 3.7.6f para poder demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es convergente.

8. Si $\sum a_n$ con $a_n > 0$ es convergente, entonces ¿$\sum a_n^2$ es convergente siempre? Demostrarlo o dar un contraejemplo.

9. Si $\sum a_n$ con $a_n > 0$ es convergente, entonces ¿$\sum \sqrt{a_n}$ es convergente siempre? Demostrarlo o dar un contraejemplo.

10. Si $\sum a_n$ con $a_n > 0$ es convergente, entonces ¿$\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ es convergente siempre? Demostrarlo o dar un contraejemplo.

11. Si $\sum a_n$ con $a_n > 0$ es convergente y si $b_n := (a_1 + \cdots + a_n)/n$ para $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\sum b_n$ es divergente siempre.

12. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ tal que $(a(n))$ es una sucesión decreciente de números estrictamente positivos. Si $s(n)$ denota la n-ésima suma parcial, demostrar (agrupando los términos en $s(2^n)$ de dos maneras diferentes) que $\frac{1}{2}(a(1) + 2a(2) + \cdots + 2^n a(2^n)) \leq s(2^n) \leq (a(1) + 2a(2) + \cdots + 2^{n-1}a(2^{n-1})) + a(2^n)$. Usar estas desigualdades para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a(2^n)$ converge. Con frecuencia se hace referencia a este resultado como el **criterio de condensación de Cauchy**; es muy poderoso.

13. Utilizar el criterio de condensación de Cauchy para discutir la serie $p \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$ para $p > 0$.

14. Usar el criterio de condensación de Cauchy para establecer la divergencia de las series:

a) $\sum \frac{1}{n \ln n}$, b) $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$,

c) $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)(\ln \ln \ln n)}$.

15. Demostrar que si $c > 1$, entonces las siguientes series son convergentes:

a) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^c}$, b) $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^c}$.

Capítulo 4

LÍMITES

Generalmente, por "análisis matemático" se entiende la rama de las matemáticas en la que se hace uso sistemático de varios conceptos de límites. En el capítulo precedente se estudió uno de estos conceptos: el límite de una sucesión de números reales. En este capítulo se trata la noción del límite de una función.

La noción rudimentaria de un proceso de límite surgió en los años 1680, cuando Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) se enfrascaron en la creación del cálculo infinitesimal. Aunque en un principio ninguno de los dos conocía el trabajo del otro y sus enfoques creativos eran muy diferentes, ambos se percataron de la necesidad de formular la noción de función, así como de la idea de cantidades que estaban "cerca" una de otra. Newton usó la palabra "fluente" para denotar una relación entre variables y en 1687, en su obra principal *Principia,* examinó los límites "a los cuales se aproximan más cerca que cualquier diferencia dada, pero nunca ni van más allá ni en efecto los alcanzan hasta que las cantidades disminuyan *in infinitum*". Leibniz introdujo el término "función" para indicar una cantidad que dependía de una variable e inventó números "infinitesimalmente pequeños" como una forma de manejar el concepto de límite. El término "función" pronto se convirtió en la terminología convencional y Leibniz también introdujo el término "cálculo" para este nuevo método.

En 1748, Leonhard Euler (1707-1783) publicó su tratado en dos volúmenes *Introductio in Analysin Infinitorum*, donde examina las series de potencias, las funciones exponencial y logarítmica, las funciones trigonométricas y muchos temas relacionados. Fue seguido por *Institutiones Calculi Differentialis* en 1755 y por los tres volúmenes de *Institutiones Calculi Integralis* en 1768-1770. Estas obras se mantuvieron como los libros de texto obligados durante muchos años. Pero el concepto de límite era muy intuitivo y su vaguedad desembocó en varios problemas. Descripciones verbales del concepto de límite fueron propuestas por otros matemáticos de la época, pero ninguna de ellas era adecuada para proporcionar las bases de demostraciones rigurosas.

En 1821, Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) publicó sus cátedras sobre análisis en su *Cours d'Analyse*, el cual estableció la norma del discurso matemático durante muchos años. Cauchy estaba comprometido con el rigor y elevó en muchas formas el nivel de precisión del discurso matemático. Formuló definiciones y presentó razonamientos con mayor solicitud que sus predecesores, pero el concepto de límite seguía sin dejarse atrapar. En un escrito temprano dio la siguiente definición:

> Si los valores sucesivos atribuidos a la misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal modo que al final difieren de él por una

cantidad tan pequeña como se desee, a este último se le llama el límite de todos los demás.

Los pasos finales para formular una definición precisa de límite le correspondieron a Karl Weierstrass (1815-1897). Weierstrass insistía en un lenguaje preciso y en demostraciones rigurosas, y su definición de límite es la que se usa hoy en día.

Gottfried Leibniz



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig, Alemania. Tenía seis años de edad cuando su padre, profesor de filosofía, murió, dejándole a su hijo la llave de su biblioteca y una vida de libros y aprendizaje. Leibniz ingresó a la Universidad de Leipzig a los 15 años de edad, se graduó a los 17 y recibió su doctorado en derecho por la Universidad de Altdorf cuatro años más tarde. Escribió sobre cuestiones legales, pero tenía mayor interés en la filosofía. También desarrolló teorías originales sobre el lenguaje y la naturaleza del universo. En 1672 estuvo en París como diplomático durante cuatro años. Mientras estuvo ahí empezó a estudiar matemáticas con el matemático holandés Christian Huygens. Sus viajes a Londres para visitar la Academia Real estimularon aún más su interés en las matemáticas. Sus antecedentes en filosofía lo llevaron a resultados muy originales, aun cuando no siempre rigurosos.

Sin conocer el trabajo inédito de Newton, en los años 1680 Leibniz publicó artículos que presentaban un método para encontrar áreas que hoy se conoce como el teorema fundamental del cálculo. Acuñó el término "cálculo" e inventó las notaciones dy/dx y la "S" alargada que se usan en la actualidad. Desafortunadamente, algunos seguidores de Newton acusaron a Leibniz de plagio, situación que redundó en una disputa que se prolongó hasta la muerte de Leibniz. Las formas en que abordaron el cálculo fueron muy diferentes y hoy es evidente que sus descubrimientos se hicieron de manera independiente. Leibniz es reconocido hoy por su trabajo en filosofía, pero su fama como matemático descansa en su creación del cálculo.

SECCIÓN 4.1 Límites de funciones

En esta sección se introduce la importante noción de límite de una función. La idea intuitiva de que la función f tiene un límite L en el punto c consiste en que los valores $f(x)$ están cerca de L cuando x está cerca (pero es diferente) de c. Sin embargo, es necesario contar con una forma técnica para trabajar con la idea de "cerca de", lo cual se consigue con la definición ε-δ que se presenta a continuación.

Para que la idea del límite de una función f en un punto c tenga sentido, es necesario que f esté definida en puntos cercanos a c. No necesita estar definida en el punto c, pero debe estar definida en un número suficiente de puntos cerca de c para hacer de interés el estudio. Ésta es la razón de la siguiente definición.

4.1.1 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $c \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación** de A si para toda $\delta > 0$ existe al menos un punto $x \in A$, $x \neq c$, tal que $|x - c| < \delta$.

Esta definición se reformula en el lenguaje de vecindades como sigue: un punto c es un punto de acumulación del conjunto A si toda vecindad-δ $V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ de c contiene al menos un punto de A distinto de c.

Nota El punto c puede o no ser miembro de A, pero incluso si está en A, se ignora cuándo se decide si es o no un punto de acumulación de A, ya que se requiere explícitamente que haya puntos en $V_\delta(c) \cap A$ distintos de c para que c sea un punto de acumulación de A.

Por ejemplo, si $A := \{1, 2\}$, entonces el punto 1 no es un punto de acumulación de A, ya que si se elige $\delta := \frac{1}{2}$ se obtiene una vecindad de 1 que no contiene puntos de A distintos de 1. Lo mismo se cumple para el punto 2, por lo que se ve que A no tiene puntos de acumulación.

4.1.2 Teorema *Un número* $c \in \mathbb{R}$ *es un punto de acumulación de un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *si y sólo si existe una sucesión* (a_n) *en* A *tal que* $\lim(a_n) = c$ *y* $a_n \neq c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si c es un punto de acumulación de A, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ la vecindad-$(1/n)$ $V_{1/n}(c)$ contiene al menos un punto a_n en A distinto de c. Entonces $a_n \in A$, $a_n \neq c$, y $|a_n - c| < 1/n$ implica que $\lim(a_n) = c$.

Recíprocamente, si existe una sucesión (a_n) en $A \setminus \{c\}$ con $\lim(a_n) = c$, entonces para cualquier $\delta > 0$ existe K tal que si $n \geq K$, entonces $a_n \in V_\delta(c)$. Por lo tanto, la vecindad-δ $V_\delta(c)$ de c contiene los puntos a_n, para $n \geq K$, que pertenecen a A y son distintos de c. Q.E.D.

En los siguientes ejemplos se hace hincapié en que el punto de acumulación de un conjunto puede pertenecer o no al conjunto.

4.1.3 Ejemplos **a)** Para el intervalo abierto $A_1 := (0, 1)$, todo punto del intervalo cerrado $[0, 1]$ es un punto de acumulación de A_1. Adviértase que los puntos 0, 1 son puntos de acumulación de A_1, pero no pertenecen a A_1. Todos los puntos de A_1 son puntos de acumulación de A_1.

b) Un conjunto finito no tiene puntos de acumulación.

c) El conjunto infinito $\mathbb{N}$ no tiene puntos de acumulación.

d) El conjunto $A_4 := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ sólo tiene al punto 0 como punto de acumulación. Ninguno de los puntos en A_4 es un punto de acumulación de A_4.

e) Si $I := [0, 1]$, entonces el conjunto $A_5 := I \cap \mathbb{Q}$ consiste en todos los números racionales en I. Del teorema de densidad 2.4.8 se sigue que todo punto en I es un punto de acumulación de A_5. □

Habiéndose hecho esta breve digresión, se vuelve ahora al concepto de límite de una función en un punto de acumulación de su dominio.

Definición de límite

Se enuncia a continuación la definición precisa de límite de una función f en un punto c. Es importante advertir que en esta definición resulta inmaterial si f está

definida o no en c. De cualquier modo, c se excluye de consideración en la determinación del límite.

4.1.4 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A. Para una función $f: A \to \mathbb{R}$, se dice que un número real L es el **límite de f en c** si, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observaciones **a)** Puesto que el valor de δ por lo general depende de ε, en ocasiones se escribirá $\delta(\varepsilon)$ en vez de δ para enfatizar esta dependencia.
b) La desigualdad $0 < |x - c|$ es equivalente a decir $x \neq c$.

Si L es el límite de f en c, entonces se dice también que f **converge a L en c**. Con frecuencia se escribe

$$L = \lim_{x \to c} f(x) \quad \text{o} \quad L = \lim_{x \to c} f.$$

Asimismo, se dice que "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a c". (Pero debe tenerse presente que los puntos en realidad no se mueven a ningún lado.) También se usa en ocasiones la simbología

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to c$$

para expresar el hecho de que f tiene el límite L en c.

Si no existe el límite de f en c, se dice que f **diverge** en c.

Nuestro primer resultado es que el valor L del límite se encuentra determinado de manera única. Esta unicidad no es parte de la definición de límite, sino que debe deducirse.

4.1.5 Teorema *Si* f : A $\to \mathbb{R}$ *y si* c *es un punto de acumulación de* A, *entonces* f *puede tener un solo límite en* c.

Demostración. Suponer que los números L y L' satisfacen la definición 4.1.4. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon/2) > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon/2)$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. También existe ahí $\delta'(\varepsilon/2)$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta'(\varepsilon/2)$, entonces $|f(x) - L'| < \varepsilon/2$. Sea ahora $\delta := \inf\{\delta(\varepsilon/2), \delta'(\varepsilon/2)\}$. Entonces si $x \in A$ y $0 < |x - c| < \delta$, la desigualdad del triángulo implica que

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $L - L' = 0$, de donde $L = L'$.

Q.E.D.

La definición de límite puede describirse muy bien en términos de vecindades. (Véase la figura 4.1.1.) Se observa que como

$$V_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) = \{x : |x - c| < \delta\}.$$

la desigualdad $0 < |x - c| < \delta$ es equivalente a decir que $x \neq c$ y que x pertenece a la vecindad-δ $V_\delta(c)$ de c. Del mismo modo, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente a decir que $f(x)$ pertenece a la vecindad-ε $V_\varepsilon(L)$ de L. De este modo, se obtiene el siguiente resultado. El lector debe desarrollar el razonamiento detallado para establecer el teorema.

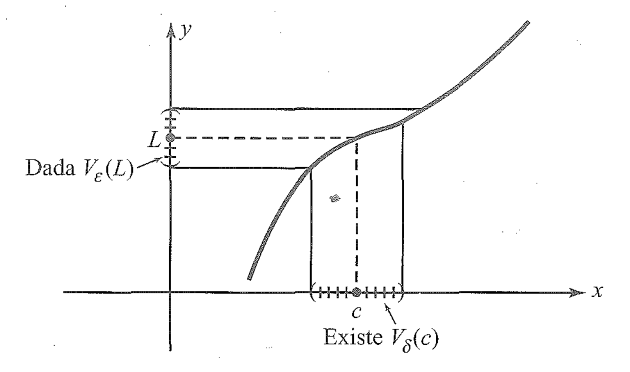


Figura 4.1.1 El límite de f en c es L.

4.1.6 Teorema *Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* c *un punto de acumulación de* A. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

(ii) *Dada cualquier vecindad-*ε $V_\varepsilon(L)$ *de* L, *existe una vecindad-*δ $V_\delta(c)$ *de* c *tal que si* $x \neq c$ *es cualquier punto en* $V_\delta(c) \cap A$, *entonces* $f(x)$ *pertenece a* $V_\varepsilon(L)$.

Se presentan ahora algunos ejemplos que ilustran cómo se aplica la definición de límite.

4.1.7 Ejemplos **a)** $\lim_{x \to c} b = b$.

Para ser más explícitos, sea $f(x) := b$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Quiere demostrarse que $\lim_{x \to c} f(x) = b$. Si $\varepsilon > 0$ está dada, se hace $\delta := 1$. (De hecho, cualquier δ estrictamente positiva servirá a este fin.) Entonces si $0 < |x - c| < 1$, se tiene $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, de la definición 4.1.4 se concluye que $\lim_{x \to c} f(x) = b$.

b) $\lim_{x \to c} x = c$.

Sea $g(x) := x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$, se elige $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$. Entonces si $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, se tiene $|g(x) - c| = |x - c| < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se deduce que $\lim_{x \to c} g = c$.

c) $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

Sea $h(x) := x^2$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Se quiere hacer la diferencia

$$\left|h(x) - c^2\right| = \left|x^2 - c^2\right|$$

menor que una $\varepsilon > 0$ preasignada tomando x lo suficientemente cerca de c. Para ello, se observa que $x^2 - c^2 = (x + c)(x - c)$. Además, si $|x - c| < 1$, entonces

$$|x| \leq |c| + 1 \qquad \text{de donde} \qquad |x + c| \leq |x| + |c| \leq 2|c| + 1.$$

Por lo tanto, si $|x - c| < 1$, se tiene

$$\left|x^2 - c^2\right| = |x + c||x - c| \leq (2|c| + 1)|x - c|, \tag{1}$$

Además, este último término será menor que ε siempre que se tome $|x - c| < \varepsilon/(2|c| + 1)$. Por consiguiente, si se elige

$$\delta(\varepsilon) := \text{ínf}\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|c| + 1}\right\},$$

entonces si $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, se inferirá primero que $|x - c| < 1$, por lo que (1) es válida y, por lo tanto, ya que $|x - c| < \varepsilon/(2|c| + 1)$, que

$$\left|x^2 - c^2\right| \leq (2|c| + 1)|x - c| < \varepsilon.$$

Puesto que se cuenta con una manera de elegir $\delta(\varepsilon) > 0$ para una elección arbitraria de $\varepsilon > 0$, se infiere que $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} x^2 = c^2$.

d) $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ si $c > 0$.

Sea $\varphi(x) := 1/x$ para $x > 0$ y sea $c > 0$. Para demostrar que $\lim_{x \to c} \varphi = 1/c$, quiere hacerse la diferencia

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right|$$

menor que una $\varepsilon > 0$ preasignada tomando x lo suficientemente cerca de $c > 0$. Se observa primero que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{cx}(c - x)\right| = \frac{1}{cx}|x - c|$$

para $x > 0$. Resulta conveniente obtener una cota superior para el término $1/(cx)$ que sea válida en alguna vecindad de c. En particular, si $|x - c| < \frac{1}{2}c$, entonces $\frac{1}{2}c < x < \frac{3}{2}c$ (¿por qué?), de modo que

$$0 < \frac{1}{cx} < \frac{1}{c^2} \quad \text{para} \quad |x - c| < \tfrac{1}{2}c.$$

Por lo tanto, para estos valores de x se tiene

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{c}\right| \leq \frac{2}{c^2}|x - c|. \tag{2}$$

A fin de hacer este último término menor que ε basta tomar $|x - c| < \frac{1}{2}c^2\varepsilon$. Por consiguiente, si se elige

$$\delta(\varepsilon) := \text{ínf}\left\{\tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}c^2\varepsilon\right\}.$$

entonces, si $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, se seguirá primero que $|x - c| < \frac{1}{2}c$, por lo que (2) es válida y, en consecuencia, ya que $|x - c| < (\frac{1}{2}c^2)\varepsilon$, que

$$\left|\varphi(x) - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon.$$

Puesto que se cuenta con una forma de escoger $\delta(\varepsilon) > 0$ para una elección arbitraria de $\varepsilon > 0$, se infiere que $\lim_{x\to c} \varphi = 1/c$.

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$.

Sea $\psi(x) := (x^3 - 4)/(x^2 + 1)$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces, después de algo de álgebra, se obtiene

$$\left|\psi(x) - \frac{4}{5}\right| = \frac{|5x^3 - 4x^2 - 24|}{5(x^2+1)}$$
$$= \frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2+1)} \cdot |x - 2|.$$

A fin de obtener una cota para el coeficiente $|x - 2|$, se restringe x mediante la condición $1 < x < 3$. Para x en este intervalo, se tiene $5x^2 + 6x + 12 \le 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 12 = 75$ y $5(x^2 + 1) \ge 5(1 + 1) = 10$, de donde

$$\left|\psi(x) - \frac{4}{5}\right| \le \frac{75}{10}|x - 2| = \frac{15}{2}|x - 2|.$$

Ahora, para $\varepsilon > 0$ dada, se elige

$$\delta(\varepsilon) := \inf\left\{1, \tfrac{2}{15}\varepsilon\right\}.$$

Entonces si $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon)$, se tiene $|\psi(x) - (4/5)| \le (15/2)|x - 2| < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, la afirmación está demostrada. □

Criterio de sucesiones para límites

La siguiente importante formulación del límite de una función se hace en términos de límites de sucesiones. Esta caracterización permite aplicar la teoría del capítulo 3 al estudio de límites de funciones.

4.1.8 Teorema *(Criterio de sucesiones) Sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *y sea* c *un punto de acumulación de* A. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(i) $\lim_{x\to c} f = L$.

(ii) *Para toda sucesión* (x_n) *en* A *que converge a* c *tal que* $x_n \neq c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge a* L.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponer que f tiene el límite L en c y suponer que (x_n) es una sucesión en A con $\lim(x_n) = c$ y $x_n \neq c$ para toda n. Debe demostrarse que la sucesión $(f(x_n))$ converge a L. Sea $\varepsilon > 0$ que está dada. Entonces, por la definición 4.1.4, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ satisface $0 < |x - c| < \delta$, entonces $f(x)$ satisface $|f(x) - L| < \varepsilon$. Se aplica ahora la definición de sucesión convergente para la δ dada a fin de obtener un número natural $K(\delta)$ tal que si $n > K(\delta)$ entonces

$|x_n - c| < \delta$. Pero para cada una de estas x_n se tiene $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Por tanto, si $n > K(\delta)$, entonces $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Por lo tanto, la sucesión $(f(x_n))$ converge a L.

(ii) $\Rightarrow$ (i). [La demostración es un razonamiento del contrapositivo.] Si (i) no es verdadera, entonces existe una vecindad-ε_0 $V_{\varepsilon_0}(L)$ tal que, sin importar cuál sea la vecindad-δ de c que se elija, habrá al menos un número x_δ en $A \cap V_\delta(c)$ con $x_\delta \neq c$ tal que $f(x_\delta) \notin V_{\varepsilon_0}(L)$. Así, para toda $n \in \mathbb{N}$, la vecindad-$(1/n)$ de c contiene un número x_n tal que

$$0 < |x_n - c| < 1/n \qquad \text{y} \qquad x_n \in A,$$

pero tal que

$$|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0 \qquad \text{para toda} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Se concluye que la sucesión (x_n) en $A \backslash \{c\}$ converge a c, pero la sucesión $(f(x_n))$ no converge a L. Por lo tanto, se ha demostrado que si (i) no es verdadera, entonces (ii) no es verdadera. Se concluye que (ii) implica (i). Q.E.D.

En la siguiente sección se verá que muchas de las propiedades básicas de los límites de funciones pueden establecerse utilizando las propiedades correspondientes de las sucesiones convergentes. Por ejemplo, se sabe por el trabajo previo con sucesiones que si (x_n) es cualquier sucesión que converge a un número c, entonces (x_n^2) converge a c^2. Por lo tanto, por el criterio de sucesiones, puede concluirse que la función $h(x) := x^2$ tiene el límite $\lim_{x \to c} h(x) = c^2$.

Criterios de divergencia

Con frecuencia es importante poder demostrar: (i) que cierto número *no* es el límite de una función en un punto, o (ii) que la función *no tiene* un límite en un punto. El siguiente resultado es una consecuencia (de la demostración) del teorema 4.1.8. Se dejan los detalles de su demostración como importante ejercicio.

4.1.9 Criterios de divergencia *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A.

a) *Si* $L \in \mathbb{R}$, *entonces* f ***no*** *tiene el límite* L *en* c *si y sólo si existe una sucesión* (x_n) *en* A *con* $x_n \neq c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *tal que la sucesión* (x_n) *converge a* c *pero la sucesión* $(f(x_n))$ ***no*** *converge a* L.

b) *La función* f ***no*** *tiene límite en* c *si y sólo si existe una sucesión* (x_n) *en* A *con* $x_n \neq c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *tal que la sucesión* (x_n) *converge a* c *pero la sucesión* $(f(x_n))$ ***no*** *converge a* $\mathbb{R}$.

Se presentan ahora algunas aplicaciones de este resultado para mostrar cómo puede usarse.

4.1.10 Ejemplos **a)** $\lim_{x \to 0} (1/x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Como en el ejemplo 4.1.7d, sea $\varphi(x) := 1/x$ para $x > 0$. Sin embargo, aquí se considera $c = 0$. El razonamiento usado en el ejemplo 4.1.7d deja de ser válido si $c = 0$, ya que no puede obtenerse una cota como la de la expresión (2) de ese

ejemplo. De hecho, si se toma la sucesión (x_n) con $x_n := 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim(x_n) = 0$, pero $\varphi(x_n) = 1/(1/n) = n$. Como se sabe, la sucesión $(\varphi(x_n)) = (n)$ no es convergente en $\mathbb{R}$, ya que no está acotada. En consecuencia, por el teorema 4.1.9b, $\lim_{x\to 0} (1/x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe.

Sea que la **función signo** sgn esté definida por

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ -1 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

Obsérvese que $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 4.1.2.) Se demostrará que sgn no tiene límite en $x = 0$. A este fin, se probará que existe una sucesión (x_n) tal que $\lim(x_n) = 0$, pero tal que $(\operatorname{sgn}(x_n))$ no converge.

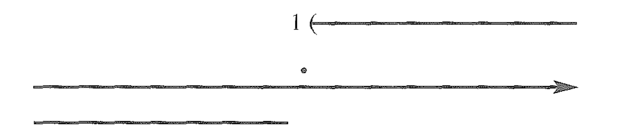


Figura 4.1.2 La función signo.

De hecho, sea $x_n := (-1)^n/n$ para $n \in \mathbb{N}$ de tal modo que $\lim(x_n) = 0$. Sin embargo, ya que

$$\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n \qquad \text{para} \qquad n \in \mathbb{N},$$

del ejemplo 3.4.6a se sigue que $(\operatorname{sgn}(x_n))$ no converge. Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe.

c)* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Sea $g(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 4.1.3.) Se demostrará que g no tiene límite en $c = 0$ presentando dos sucesiones (x_n) y (y_n) con $x_n \neq 0$ y $y_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tales que $\lim(x_n) = 0$ y $\lim(y_n) = 0$, pero tales que $\lim(g(x_n)) \neq \lim(g(y_n))$. Con base en el teorema 4.1.9, esto implica que $\lim_{x\to 0} g$ no puede existir. (Explicar por qué.)

De hecho, se recuerda del cálculo que sen $t = 0$ si $t = n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$ y que sen $t = +1$ si $t = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n$ para $n \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, sea $x_n := 1/n\pi$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces $\lim(x_n) = 0$ y $g(x_n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de donde $\lim(g(x_n)) = 0$. Por otra parte, sea $y_n := (\frac{1}{2}\pi + 2\pi n)^{-1}$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces $\lim(y_n) = 0$ y $g(y_n) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de tal modo que $\lim(g(y_n)) = 1$. Se concluye que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe. □

*A fin de contar con algunas aplicaciones interesantes en este ejemplo y en otros posteriores, se hará uso de propiedades muy conocidas de las funciones trigonométricas y exponenciales que se establecerán en el capítulo 8.

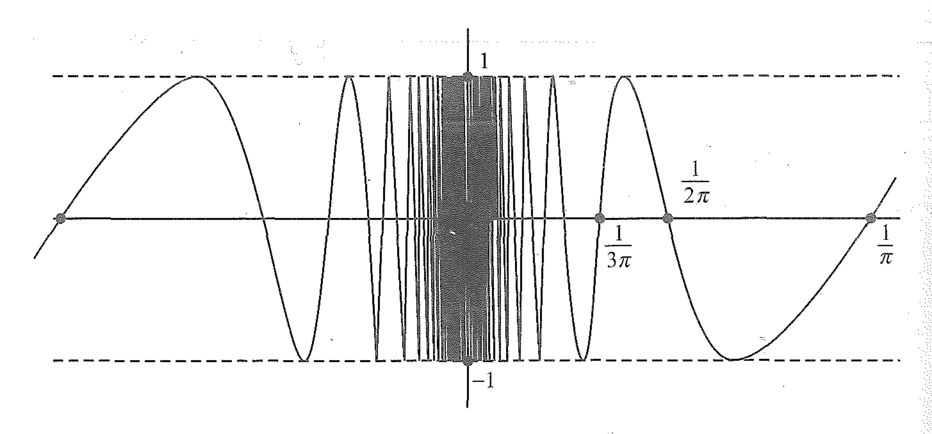


Figura 4.1.3 La función $g(x) = \text{sen}(1/x)$ $(x \neq 0)$.

Ejercicios de la sección 4.1

1. Determinar una condición sobre $|x - 1|$ que asegure que:

   a) $|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$, b) $|x^2 - 1| < 1/10^{-3}$.
   c) $|x^2 - 1| < 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ dada, b) $|x^3 - 1| < 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ dada.

2. Determinar una condición sobre $|x - 4|$ que asegure que:

   a) $|\sqrt{x} - 2| < \frac{1}{2}$, b) $|\sqrt{x} - 2| < 10^{-2}$.

3. Sea c un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$.

4. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to c} f(x + c) = L$.

5. Sea $I := (0, a)$, donde $a > 0$, y sea $g(x) := x^2$ para $x \in I$. Para cualesquier puntos $x, c \in I$, demostrar que $|g(x) - c^2| \leq 2a\,|x - c|$. Usar esta desigualdad para demostrar que $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$ para cualquier $c \in I$.

6. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$, sea $f: I \to \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Suponer que existen las constantes K y L tales que $|f(x) - L| \leq K\,|x - c|$ para $x \in I$. Demostrar que $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

7. Demostrar que $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

8. Demostrar que $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ para cualquier $c > 0$.

9. Utilizar la definición ε-δ de límite o el criterio de sucesiones para límites a fin de establecer los siguientes límites:

   a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{1 - x} = -1$, b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{1 + x} = \dfrac{1}{2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|} = 0$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

10. Usar la definición de límite para demostrar que

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 4x) = 12$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{2x+3} = 4$.

11. Demostrar que los siguientes límites *no* existen.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} (x + \operatorname{sgn}(x))$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$.

12. Suponer que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene límite L en 0 y sea $a > 0$. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) := f(ax)$ para $x \in \mathbb{R}$, demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L$.

13. Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to c} (f(x))^2 = L$.

a) Demostrar que si $L = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$.

b) Demostrar con un ejemplo que si $L \neq 0$, entonces es posible que f no tenga límite en c.

14. Sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida haciendo $f(x) := x$ si x es racional y haciendo $f(x) := 0$ si x es irracional.

a) Demostrar que f tiene límite en $x = 0$.

b) Usar un razonamiento de sucesiones para demostrar que si $c \neq 0$, entonces f no tiene límite en c.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sea I un intervalo *abierto* en $\mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Si f_1 es la restricción de f a I, demostrar que f_1 tiene límite en c si y sólo si f tiene límite en c y que los límites son iguales.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sea J un intervalo *cerrado* en $\mathbb{R}$ y sea $c \in J$. Si f_2 es la restricción de f a J, demostrar que si f tiene límite en c entonces f_2 tiene límite en c. Demostrar con un ejemplo que *no* se sigue que si f_2 tiene límite en c entonces f tiene límite en c.

SECCIÓN 4.2 Teoremas sobre límites

Se obtienen a continuación resultados que son de utilidad para calcular límites de funciones. Estos resultados son paralelos a los teoremas sobre límites para sucesiones establecidos en la sección 3.2. De hecho, en la mayoría de los casos estos resultados pueden demostrarse usando el teorema 4.1.8 y los resultados de la sección 3.2. De manera alternativa, los resultados de esta sección pueden probarse usando razonamientos ε-δ que son muy similares a los que se emplearon en la sección 3.2.

4.2.1 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Se dice que f está **acotada en una vecindad de** c si existe una vecindad-δ $V_\delta(c)$ de c y una constante $M > 0$ tales que se tiene $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in A \cap V_\delta(c)$.

4.2.2 Teorema *Si* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *tiene límite en* $c \in \mathbb{R}$, *entonces* f *está acotada en alguna vecindad de* c.

Demostración. Si $L := \lim_{x \to c} f$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < 1$; en consecuencia (por el corolario 2.2.4a),

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x)| - L < 1.$$

Por lo tanto, si $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \neq c$, entonces $|f(x)| \leq |L| + 1$. Si $c \notin A$, se toma $M = |L| + 1$, mientras que si $c \in A$ se toma $M := \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$. Se sigue que si $x \in A \cap V_\delta(c)$, entonces $|f(x)| \leq M$. Con esto se demuestra que f está acotada en la vecindad $V_\delta(c)$ de c. Q.E.D.

La siguiente definición es similar a las que se dieron en la sección 3.2 para sumas, diferencias, productos y cocientes de sucesiones.

4.2.3 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean f y g funciones definidas de A a $\mathbb{R}$. Se define la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$ y el **producto** fg de A a $\mathbb{R}$ como las funciones dadas por

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) := f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

para toda $x \in A$. Además, si $b \in \mathbb{R}$, se define el **múltiplo** bf como la función dada por

$$(bf)(x) := bf(x) \qquad \text{para toda} \qquad x \in A.$$

Por último, si $h(x) \neq 0$ para $x \in A$, se define el **cociente** f/h como la función dada por

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) := \frac{f(x)}{h(x)} \qquad \text{para toda} \qquad x \in A.$$

4.2.4 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* f *y* g *funciones de* A *a* $\mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A. *Además, sea* $b \in \mathbb{R}$.

a) *Si* $\lim_{x \to c} f = L$ *y* $\lim_{x \to c} g = M$, *entonces:*

$$\lim_{x \to c} (f + g) = L + M, \qquad \lim_{x \to c} (f - g) = L - M,$$
$$\lim_{x \to c} (fg) = LM, \qquad \lim_{x \to c} (bf) = bL.$$

b) *Si* $h : A \to \mathbb{R}$, *si* $h(x) \neq 0$ *para toda* $x \in A$ *y si* $\lim_{x \to c} h = H \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}.$$

Demostración. Una demostración de este teorema es exactamente similar a la del teorema 3.2.3. De manera alternativa, puede demostrarse haciendo uso de los

teoremas 3.2.3 y 4.1.8. Por ejemplo, sea (x_n) cualquier sucesión en A tal que $x_n \neq c$ para $n \in \mathbb{N}$ y $c = \text{lím}(x_n)$. Del teorema 4.1.8 se sigue que

$$\text{lím}(f(x_n)) = L, \qquad \text{lím}(g(x_n)) = M.$$

Por otra parte, la definición 4.2.3 implica que

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, al aplicarse el teorema 3.2.3 se obtiene

$$\begin{aligned} \text{lím}((fg)(x_n)) &= \text{lím}(f(x_n)g(x_n)) \\ &= [\text{lím}(f(x_n))][\text{lím}(g(x_n))] = LM. \end{aligned}$$

Por consiguiente, del teorema 4.1.8 se sigue que

$$\lim_{x \to c}(fg) = \text{lím}((fg)(x_n)) = LM.$$

Las otras partes del teorema se prueban de manera similar. Se le dejan los detalles al lector. Q.E.D.

Observaciones **1)** Se hace notar que, en el inciso b), se establece el supuesto adicional de que $H = \lim_{x \to c} h \neq 0$. Si este supuesto no se satisface, entonces el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{h(x)}$$

puede o no existir. Pero incluso si este límite existe, *no puede* usarse el teorema 4.2.4b para evaluarlo.

2) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f_1, f_2, \cdots, f_n$ funciones de A a $\mathbb{R}$, y sea c un punto de acumulación de A. Si

$$L_k := \lim_{x \to c} f_k \quad \text{para} \quad k = 1, \cdots, n,$$

entonces del teorema 4.2.4, por un razonamiento de inducción matemática, se sigue que

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \lim_{x \to c}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n),$$

y

$$L_1 \cdot L_2 \cdots L_n = \text{lím}(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n),$$

En particular, se deduce que si $L = \lim_{x \to c} f$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$L^n = \lim_{x \to c}(f(n))^n.$$

4.2.5 Ejemplos **a)** Algunos de los límites que se establecieron en la sección 4.1 pueden demostrarse usando el teorema 4.2.4. Por ejemplo, de este resultado se sigue que como $\lim_{x\to c} x = c$, entonces $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$, y que si $c > 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to c} x} = \frac{1}{c}.$$

b) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)(x^3 - 4) = 20.$

Del teorema 4.2.4 se sigue que

$$\lim_{x\to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) = \left(\lim_{x\to 2} (x^2 + 1)\right)\left(\lim_{x\to 2} (x^3 - 4)\right)$$
$$= 5 \cdot 4 = 20.$$

c) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}\right) = \frac{4}{5}.$

Si se aplica el teorema 4.2.4b, se tiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x\to 2} (x^3 - 4)}{\lim_{x\to 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}.$$

Adviértase que como el límite en el denominador [es decir, $\lim_{x\to 2}(x^2 + 1) = 5$] no es igual a 0, entonces el teorema 4.2.4b es aplicable.

d) $\lim_{x\to 2} = \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \frac{4}{3}.$

Si se hace $f(x) := x^2 - 4$ y $h(x) := 3x - 6$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces *no puede* usarse el teorema 4.2.4b para evaluar $\lim_{x\to 2}(f(x)/h(x))$ porque

$$H = \lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} (3x - 6)$$
$$= 3 \lim_{x\to 2} x - 6 = 3 \cdot 2 - 6 = 0.$$

Sin embargo, si $x \neq 2$, entonces se sigue que

$$\frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{3(x - 2)} = \frac{1}{3}(x + 2).$$

Se tiene, por tanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{3}(x+2) = \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 2} x + 2\right) = \frac{4}{3}.$$

Adviértase que la función $g(x) = (x^2 - 4)/(3x - 6)$ tiene límite en $x = 2$ *aunque no esté definida ahí.*

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe en $\mathbb{R}$.

Desde luego, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ y $H := \lim_{x\to 0} x = 0$. Sin embargo, ya que $H = 0$, *no puede* usarse el teorema 4.2.4b para evaluar $\lim_{x\to 0} (1/x)$. De hecho, como se vio en el ejemplo 4.1.10a, la función $\varphi(x) = 1/x$ no tiene límite en $x = 0$. Esta conclusión también puede seguirse del teorema 4.2.2, ya que la función $\varphi(x) = 1/x$ no está acotada en una vecindad de $x = 0$. (¿Por qué?)

f) Si p es una función polinómica, entonces $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

Sea p una función polinómica en $\mathbb{R}$ tal que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Del teorema 4.2.4 y del hecho de que $\lim_{x\to c} x^k = c^k$ se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} p(x) &= \lim_{x\to c} [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] \\ &= \lim_{x\to c} (a_n x^n) + \lim_{x\to c} (a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to c} (a_1 x) + \lim_{x\to c} a_0 \\ &= a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \\ &= p(c).\end{aligned}$$

En consecuencia, $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$ para cualquier función polinómica p.

g) Si p y q son funciones polinómicas en $\mathbb{R}$ y si $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

Puesto que $q(x)$ es una función polinómica, de un teorema de álgebra se sigue que hay a lo sumo un número finito de números reales $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ [los ceros reales de $q(x)$] tales que $q(\alpha_j) = 0$ y tales que si $x \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, entonces $q(x) \neq 0$. Por consiguiente, si $x \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, puede definirse

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Si c no es un cero de $q(x)$, entonces $q(c) \neq 0$ y del inciso f) se sigue que $\lim_{x\to c} q(x) = q(c) \neq 0$. Por tanto, puede aplicarse el teorema 4.2.4b para concluir que

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}. \qquad \square$$

El siguiente resultado es el análogo directo del teorema 3.2.6.

4.2.6 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A. *Si*

$$a \leq f(x) \leq b \qquad \textit{para toda} \qquad x \in A, \neq c,$$

y si $\lim_{x\to c} f$ *existe, entonces* $a \leq \lim_{x\to c} f \leq b$.

Demostración. De hecho, si $L = \lim_{x\to c} f$, entonces del teorema 4.1.8 se sigue que si (x_n) es cualquier sucesión de números reales tal que $c \neq x_n \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y si la sucesión (x_n) converge a c, entonces la sucesión $(f(x_n))$ converge a L. Puesto que $a \leq f(x_n) \leq b$ para toda $n \in \mathbb{N}$, del teorema 3.2.6 se sigue que $a \leq L \leq b$.

Q.E.D.

Se enuncia ahora el análogo del teorema de compresión 3.2.7. La demostración se le deja al lector.

4.2.7 Teorema de compresión *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A. *Si*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \textit{para toda} \qquad x \in A, x \neq c,$$

y si $\lim_{x\to c} f = L = \lim_{x\to c} h$, *entonces* $\lim_{x\to c} g = L$.

4.2.8 Ejemplos **a)** $\lim_{x\to 0} x^{3/2} = 0 \ (x > 0)$.

Sea $f(x) := x^{3/2}$ para $x > 0$. Puesto que la desigualdad $x < x^{1/2} \leq 1$ se cumple para $0 < x \leq 1$ (¿por qué?), se sigue que $x^2 \leq f(x) = x^{3/2} \leq x$ para $0 < x \leq 1$. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

del teorema de compresión 4.2.7 se sigue que $\lim_{x\to 0} x^{3/2} = 0$.

b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Más adelante se demuestra (véase el teorema 8.4.8) que

$$-x \leq \operatorname{sen} x \leq x \qquad \text{para toda} \qquad x \geq 0.$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} (\pm x) = 0$, del teorema de compresión se sigue que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

c) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Más adelante se demuestra (véase el teorema 8.4.8) que

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1 \qquad \text{para toda} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} (1 - \frac{1}{2}x^2) = 1$, del teorema de compresión se sigue que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

d) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{x} \right) = 0$.

No puede usarse el teorema 4.2.4b para evaluar este límite. (¿Por qué no?) Sin embargo, de la desigualdad (1) del inciso c) se sigue que

$$-\tfrac{1}{2}x \le (\cos x - 1)/x \le 0 \qquad \text{para} \qquad x > 0$$

y que

$$0 \le (\cos x - 1)/x \le -\tfrac{1}{2}x \qquad \text{para} \qquad x < 0.$$

Ahora sea $f(x) := -x/2$ para $x \ge 0$ y sea $f(x) := 0$ para $x < 0$, y sea $h(x) := 0$ para $x \ge 0$, y sea $h(x) := -x/2$ para $x < 0$. Se tiene entonces

$$f(x) \le (\cos x - 1)/x \le h(x) \qquad \text{para} \qquad x \ne 0.$$

Puesto que se observa de inmediato que $\lim_{x\to 0} f = 0 = \lim_{x\to 0} h$, del teorema de compresión se sigue que $\lim_{x\to 0} (\cos x - 1)/x = 0$.

e) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1$.

De nueva cuenta, no puede usarse el teorema 4.2.4b para evaluar este límite. Sin embargo, más adelante se demuestra (véase el teorema 8.4.8) que

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 \le \operatorname{sen} x \le x \qquad \text{para} \qquad x \ge 0.$$

y que

$$x \le \operatorname{sen} x \le x - \tfrac{1}{6}x^3 \qquad \text{para} \qquad x \le 0.$$

Por lo tanto, se sigue (¿por qué?) que

$$1 - \tfrac{1}{6}x^2 \le (\operatorname{sen} x)/x \le 1 \qquad \text{para toda} \qquad x \ne 0.$$

Pero como $\lim_{x \to 0}(1 - \frac{1}{6}x^2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \to 0} x^2 = 1$, del teorema de compresión se infiere que $\lim_{x \to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$.

f) $\lim_{x \to 0} (x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$.

Sea $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \ne 0$. Puesto que $-1 \le \operatorname{sen} z \le 1$ para toda $z \in \mathbb{R}$, se tiene la desigualdad

$$-|x| \le f(x) = x \operatorname{sen}(1/x) \le |x|$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, $x \ne 0$. Puesto que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, del teorema de compresión se sigue que $\lim_{x \to 0} f = 0$. Para una gráfica, véase la figura 5.1.3. □

Hay resultados que son paralelos a los teoremas 3.2.9 y 3.2.10; sin embargo, se dejarán como ejercicios. Se concluye esta sección con un resultado que es, en cierto sentido, el recíproco parcial del teorema 4.2.6.

4.2.9 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A. *Si*

$$\lim_{x \to c} f > 0 \qquad \left[\textit{o bien}, \lim_{x \to c} f < 0 \right],$$

entonces existe una vecindad $V_\delta(c)$ *de* c *tal que* $f(x) > 0$ [*o bien,* $f(x) < 0$] *para toda* $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$.

Demostración. Sea $L := \lim_{x \to c} f$ y suponer que $L > 0$. Se toma $\varepsilon = \frac{1}{2}L > 0$ en la definición 4.1.4 y se obtiene un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$. Por tanto (¿por qué?), se sigue que si $x \in A \cap V_\delta(c)$, $x \ne c$, entonces $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$.

Si $L < 0$ se sigue un razonamiento similar. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 4.2

1. Aplicar el teorema 4.2.4 para determinar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} (x+1)(2x+3) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+2}{x^2-2} \quad (x > 0)$,

c) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x} \right) \quad (x > 0)$,

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2+2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

2. Determinar los límites siguientes e indicar los teoremas que se usan en cada caso. (Quizá el lector desee hacer uso del ejercicio 14 siguiente.)

a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$ $(x > 0)$,   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2}$ $(x > 0)$,

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$ $(x > 0)$,   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(x > 0)$.

3. Encontrar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3}}{x+2x^2}$, donde $x > 0$.

4. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ no existe pero que $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.

5. Sea que f, g estén definidas de $A \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A. Suponer que f está acotada en una vecindad de c y que $\lim\limits_{x\to c} g = 0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to c} fg = 0$.

6. Usar la definición de límite para demostrar el primer enunciado del teorema 4.2.4a.

7. Utilizar la formulación en términos de sucesiones del límite para demostrar el teorema 4.2.4b.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Deducir la desigualdad $-x^2 \leq x^n \leq x^2$ para $-1 < x < 1$. Usar después el hecho de que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ para demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$.

9. Sea que f, g estén definidas de A a $\mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A.

   a) Demostrar que si tanto $\lim\limits_{x\to c} f$ como $\lim\limits_{x\to c}(f+g)$ existen, entonces $\lim\limits_{x\to c} g$ existe.

   b) Si $\lim\limits_{x\to c} f$ y $\lim\limits_{x\to c} fg$ existen, ¿se sigue que $\lim\limits_{x\to c} g$ existe?

10. Dar ejemplos de funciones f y g tales que f y g no tengan límite en un punto c, pero tales que tanto $f + g$ como fg tengan límites en c.

11. Determinar si los siguientes límites existen en $\mathbb{R}$.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$,   b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$,

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} \operatorname{sen}(1/x)$ $(x \neq 0)$,   d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x > 0)$.

12. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para toda x, y en $\mathbb{R}$. Suponer que $\lim\limits_{x\to 0} f = L$ existe. Demostrar que $L = 0$ y probar después que f tiene límite en todo punto $c \in \mathbb{R}$. [*Sugerencia:* adviértase primero que $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Adviértase asimismo que $f(x) = f(x-c) + f(c)$ para x, c en $\mathbb{R}$.]

13. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Si $\lim\limits_{x \to c} f$ existe y si $|f|$ denota la función definida para $x \in A$ por $|f|(x) := |f(x)|$, entonces demostrar que $\lim\limits_{x \to c} |f| = |\lim\limits_{x \to c} f|$.

14. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Suponer además que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in A$, y sea $\sqrt{f}$ la función definida para $x \in A$ por $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$. Si $\lim\limits_{x \to c} f$ existe, demostrar que $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f}$.

SECCIÓN 4.3 Algunas ampliaciones del concepto de límite*

En esta sección se examinan tres tipos de ampliación de la noción de límite de una función que ocurren con frecuencia. Puesto que todas las ideas presentadas son estrechos paralelos de las que ya se han tratado, esta sección se puede leer con facilidad.

Límites por un lado

Hay ocasiones en que una función f puede carecer de límite en un punto c y, no obstante, el límite existe cuando la función se restringe a un intervalo a uno de los lados del punto de acumulación c.

Por ejemplo, la función signo considerada en el ejemplo 4.1.10b, e ilustrada en la figura 4.1.2, no tiene límite en $c = 0$. Sin embargo, si la función signo se restringe al intervalo $(0, \infty)$, la función resultante tiene el límite 1 en $c = 0$. Del mismo modo, si la función signo se restringe al intervalo $(-\infty, 0)$, la función resultante tiene el límite -1 en $c = 0$. Los anteriores son ejemplos elementales de límite por la derecha y por la izquierda en $c = 0$.

4.3.1 Definición Sea $A \in \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$.

(i) Si $c \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, entonces se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el **límite por la derecha de f en** c y se escribe

$$\lim_{x \to c+} f = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to c+} f(x) = L$$

si dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda $x \in A$ con $0 < x - c < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(ii) Si $c \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A : x < c\}$, entonces se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el **límite por la izquierda de f en** c y se escribe

$$\lim_{x \to c-} f = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to c-} f(x) = L$$

*Gran parte de esta sección puede omitirse en una primera lectura de este capítulo.

si dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in A$ con $0 < c - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Notas 1) Los límites $\lim_{x \to c+} f$ y $\lim_{x \to c-} f$ se llaman **límites de f por un lado en** c. Es posible que ninguno de los dos límites por un lado exista. Asimismo, uno de ellos puede existir sin que el otro exista. Del mismo modo, como es el caso de $f(x) := \text{sgn}(x)$ en $c = 0$, ambos pueden existir y ser diferentes.

2) Si A es un intervalo con punto terminal izquierdo c, entonces se observa de inmediato que $f : A \to \mathbb{R}$ tiene límite en c si y sólo si tiene límite por la derecha en c. Además, en este caso el límite $\lim_{x \to c} f$ y el límite por la derecha $\lim_{x \to c+} f$ son iguales. (Una situación similar ocurre para el límite por la izquierda cuando A es un intervalo con punto terminal derecho c.)

El lector puede demostrar que f sólo puede tener un límite por la derecha (o bien, por la izquierda) en un punto. Estos resultados son análogos a los que se establecieron en las secciones 4.1 y 4.2 para límites por los dos lados. En particular, la existencia de límites por un lado puede reducirse a consideraciones en términos de sucesiones.

4.3.2 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* $A \cap (c, \infty)$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\lim_{x \to c+} f = L$.

(ii) *Para cualquier sucesión* (x_n) *que converge a* c *tal que* $x_n \in A$ *y* $x_n > c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge a* L.

Se le deja al lector la demostración de este resultado (y la formulación y demostración del resultado análogo para límites por la izquierda). No se ocupará espacio para repetir las formulaciones de la versión para un lado de los demás resultados de las secciones 4.1 y 4.2.

El siguiente resultado relaciona el concepto de límite de una función con los límites por un lado. La demostración se deja como ejercicio.

4.3.3 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación tanto de* $A \cap (c, \infty)$ *como de* $A \cap (-\infty, c)$. *Entonces* $\lim_{x \to c} f = L$ *si y sólo si* $\lim_{x \to c+} f = L = \lim_{x \to c-} f$.

4.3.4 Ejemplos **a)** Sea $f(x) := \text{sgn}(x)$.

En el ejemplo 4.1.10b se vio que la función signo no tiene límite en 0. Es claro que $\lim_{x \to 0+} \text{sgn}(x) = +1$ y que $\lim_{x \to 0-} \text{sgn}(x) = -1$. Puesto que estos límites por un lado son diferentes, del teorema 4.3.3 también se sigue que $\text{sgn}(x)$ no tiene límite en 0.

b) Sea $g(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 4.3.1.)

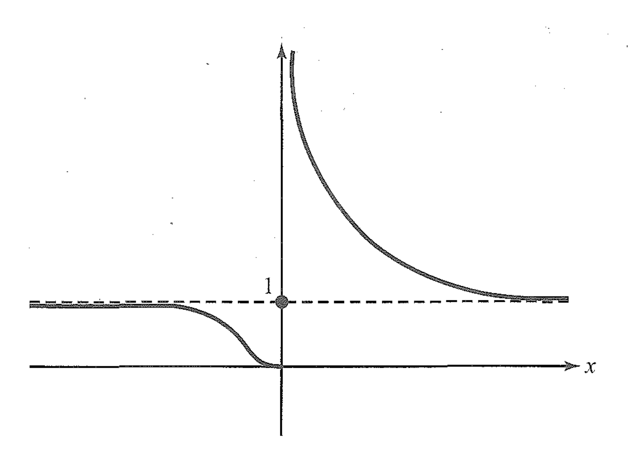


Figura 4.3.1 Gráfica de $g(x) = e^{1/x}$ $(x \neq 0)$.

Se demuestra primero que g no tiene límite por la derecha finito en $c = 0$ ya que no está acotada en ninguna vecindad $(0, \delta)$ a la derecha de 0. Se hará uso de la desigualdad

$$0 < t < e^t \qquad \text{para} \qquad t > 0, \tag{1}$$

que se establecerá más adelante (véase el corolario 8.3.3). De (1) se sigue que si $x > 0$, entonces $0 < 1/x < e^{1/x}$. Por consiguiente, si se toma $x_n = 1/n$, entonces $g(x_n) > n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0+} e^{1/x}$ no existe en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, $\lim\limits_{x \to 0-} e^{1/x} = 0$. De hecho, si $x < 0$ y se toma $t = -1/x$ en (1), se obtiene $0 < -1/x < e^{-1/x}$. Puesto que $x < 0$, esto implica que $0 < e^{1/x} < -x$ para toda $x < 0$. De esta desigualdad se sigue que $\lim\limits_{x \to 0-} e^{1/x} = 0$.

c) Sea $h(x) := 1/(e^{1/x} + 1)$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 4.3.2.)

En el inciso b) se vio que $0 < 1/x < e^{1/x}$ para $x > 0$, de donde

$$0 < \frac{1}{e^{1/x} + 1} < \frac{1}{e^{1/x}} < x,$$

lo cual implica que $\lim\limits_{x \to 0+} h = 0$.

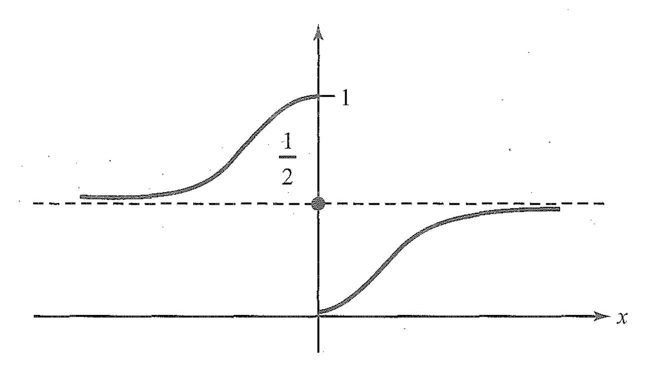


Figura 4.3.2 Gráfica de $h(x) = 1/(e^{1/x} + 1)(x \neq 0)$.

Puesto que en el inciso b) se vio que $\lim_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$, del análogo del teorema 4.2.4b para límites por la izquierda se sigue que

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{e^{1/x}+1}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to 0-} e^{1/x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Obsérvese que para esta función existen ambos límites por un lado en $\mathbb{R}$, pero son diferentes. □

Límites infinitos

La función $f(x) := 1/x^2$ para $x \neq 0$ (véase la figura 4.3.3) no está acotada en una vecindad de 0, por lo que no tiene límite en el sentido de la definición 4.1.4. Aun cuando los símbolos ∞ $(= +\infty)$ y $-\infty$ no representan números reales, en ocasiones es útil poder decir que "$f(x) = 1/x^2$ tiende a ∞ cuando $x \to 0$". Este uso de $\pm\infty$ no causará ninguna dificultad, siempre que se tenga cuidado de no interpretar *nunca* ∞ o $-\infty$ como números reales.

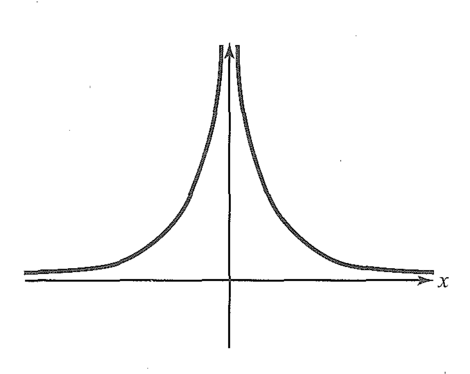


Figura 4.3.3 Gráfica de $f(x) = 1/x^2$ $(x \neq 0)$.

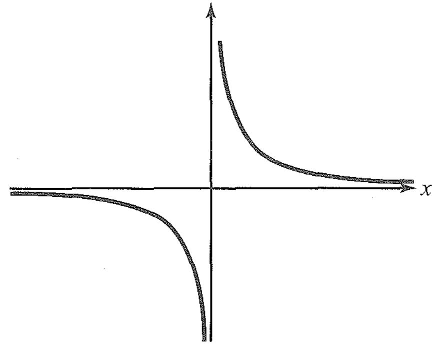


Figura 4.3.4 Gráfica de $g(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$.

4.3.5 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A.

(i) Se dice que f **tiende a** ∞ **cuando** $x \to c$ y se escribe

$$\lim_{x \to c} f = \infty,$$

si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\alpha) > 0$ tal que para toda $x \in A$ con $0 < |x - c| < \delta$, entonces $f(x) > \alpha$.

(ii) Se dice que f **tiende a** $-\infty$ **cuando** $x \to c$, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f = -\infty,$$

si para toda $\beta \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\beta) > 0$ tal que para toda $x \in A$ con $0 < |x - c| < \delta$, entonces $f(x) < \beta$.

4.3.6 Ejemplos **a)** $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$.

Ahora bien, si $\alpha > 0$ está dada, sea $\delta := 1/\sqrt{\alpha}$. Se sigue que si $0 < |x| < \delta$, entonces $x^2 < 1/\alpha$, de donde $1/x^2 > \alpha$.

b) Sea $g(x) := 1/x$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 4.3.4.)

La función g *no* tiende ni a ∞ ni a $-\infty$ cuando $x \to 0$. Esto es, si $\alpha \geq 0$, entonces $g(x) < \alpha$ para toda $x < 0$, por lo que g no tiende a ∞ cuando $x \to 0$. Del mismo modo, si $\beta < 0$, entonces $g(x) > \beta$ para toda $x > 0$, por lo que g no tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0$.

Aun cuando muchos de los resultados de las secciones 4.1 y 4.2 tienen ampliaciones de acuerdo con este concepto de límite, no es el caso para todas ellas, ya que $\pm\infty$ no son números reales. El resultado siguiente es el análogo del teorema de compresión 4.2.7. (Véase también el teorema 3.6.4.)

4.3.7 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* $f, g: A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A. *Suponer que* $f(x) \leq g(x)$ *para toda* $x \in A$, $x \neq c$.

a) *Si* $\lim_{x \to c} f = \infty$, *entonces* $\lim_{x \to c} g = \infty$.

b) *Si* $\lim_{x \to c} g = -\infty$, *entonces* $\lim_{x \to c} f = -\infty$.

Demostración. **a)** Si $\lim_{x \to c} f = \infty$ y $a \in \mathbb{R}$ está dada, entonces existe $\delta(\alpha) > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ y $x \in A$, entonces $f(x) > a$. Pero como $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in A$, $x \neq c$, se sigue que si $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ y $x \in A$, entonces $g(x) > \alpha$. Por lo tanto, $\lim_{x \to c} g = \infty$.

La demostración del inciso b) es similar. Q.E.D.

La función $g(x) = 1/x$ considerada en el ejemplo 4.3.6b sugiere que podría resultar conveniente considerar límites infinitos por un lado. Se definen tan sólo los límites infinitos por la derecha.

4.3.8 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. Si $c \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, entonces se dice que f **tiende a** ∞ [o bien a $-\infty$] **cuando** $x \to c+$ y se escribe

$$\lim_{x \to c+} f = \infty \quad \left[\text{o bien, } \lim_{x \to c+} f = -\infty\right],$$

si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\alpha) > 0$ tal que para toda $x \in A$ con $0 < x - c < \delta$, entonces $f(x) > \alpha$ [o bien, $f(x) < \alpha$].

4.3.9 Ejemplos **a)** Sea $g(x) := 1/x$ para $x \neq 0$. En el ejemplo 4.3.6b se estableció que $\lim_{x \to 0} g$ no existe. Sin embargo, es un ejercicio sencillo demostrar que

$$\lim_{x \to 0+} (1/x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0-} (1/x) = -\infty.$$

b) En el ejemplo 4.3.4b se vio que la función $g(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$ no está acotada en ningún intervalo $(0, \delta)$, $\delta > 0$. En consecuencia, el límite por la derecha de $e^{1/x}$ cuando $x \to 0+$ no existe en el sentido de la definición 4.3.1(i). Sin embargo, puesto que

$$1/x < e^{1/x} \quad \text{para} \quad x > 0,$$

se observa de inmediato que $\lim_{x \to 0+} e^{1/x} = \infty$ en el sentido de la definición 4.3.8. □

Límites en el infinito

También es deseable definir la noción del límite de una función cuando $x \to \infty$. La definición cuando $x \to -\infty$ es similar.

4.3.10 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. Suponer que $(a, \infty) \subseteq A$ para alguna $a \in \mathbb{R}$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es **límite de** f **cuando** $x \to \infty$ y se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

si dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon) > a$ tal que para cualquier $x > K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

El lector debe advertir la estrecha semejanza entre 4.3.10 y la definición de límite de una sucesión.

Se le deja al lector demostrar que los límites de f cuando $x \to \pm\infty$ son únicos siempre que existen. También se cuenta con criterios en términos de sucesiones para estos límites; sólo se enuncia el criterio cuando $x \to \infty$. Para ello se usa ahí la noción de límite de una sucesión propiamente divergente (véase la definición 3.6.1).

4.3.11 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *y suponer que* $(a, \infty) \subseteq A$ *para alguna* $a \in \mathbb{R}$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $L = \lim_{x \to \infty} f$.

(ii) *Para cualquier sucesión* (x_n) *en* $A \cap (a, \infty)$ *tal que* $\lim(x_n) = \infty$, *la sucesión* $(f(x_n))$ *converge a* L.

Se le deja al lector la demostración de este teorema y la formulación y demostración del resultado correspondiente para el límite cuando $x \to -\infty$.

4.3.12 Ejemplos **a)** Sea $g(x) := 1/x$ para $x \neq 0$.

Es un ejercicio elemental demostrar que $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} (1/x)$. (Véase la figura 4.3.4.)

b) Sea $f(x) := 1/x^2$ para $x \neq 0$.

El lector puede demostrar que $\lim_{x \to \infty} (1/x^2) = 0 = \lim_{x \to -\infty} (1/x^2)$. (Véase la figura 4.3.3.) Una manera de hacerlo es probar que si $x \geq 1$, entonces $0 \leq 1/x^2 \leq 1/x$. Con base en el inciso a), esto implica que $\lim_{x \to \infty} (1/x^2) = 0$. □

Así como resulta conveniente poder decir que $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to c$ para $c \in \mathbb{R}$, también lo es contar con la noción correspondiente cuando $x \to \pm\infty$. Se aborda el caso en que $x \to \infty$.

4.3.13 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. Suponer que $(a, \infty) \subseteq A$ para alguna $a \in A$. Se dice que f **tiende a** ∞ [o bien, a $-\infty$] **cuando** $x \to \infty$ y se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f = \infty \qquad \left[\text{o bien, } \lim_{x \to \infty} f = -\infty\right],$$

si dada cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $K = K(\alpha) > a$ tal que para cualquier $x > K$, entonces $f(x) > \alpha$ [o bien, $f(x) < \alpha$].

Como antes, hay un criterio en términos de sucesiones para este límite.

4.3.14 Teorema *Sea* $A \in \mathbb{R}$, *sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *y suponer que* $(a, \infty) \subseteq A$ *para alguna* $a \in \mathbb{R}$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\lim_{x \to \infty} f = \infty$ [*o bien,* $\lim_{x \to \infty} f = -\infty$].

(ii) *Para toda sucesión* (x_n) *en* (a, ∞) *tal que* $\lim(x_n) = \infty$, *entonces* $\lim(f(x_n)) = \infty$ [*o bien,* $\lim(f(x_n)) = -\infty$].

El siguiente resultado es el análogo del teorema 3.6.5.

4.3.15 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *y suponer que* $(a, \infty) \subseteq A$ *para alguna* $a \in \mathbb{R}$. *Suponer además que* $g(x) > 0$ *para toda* $x > a$ *y que para alguna* $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, *se tiene*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(i) *Si* $L > 0$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ *si y sólo si* $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

(ii) *Si* $L < 0$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$ *si y sólo si* $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

Demostración. (i) Puesto que $L > 0$, la hipótesis implica que existe $a_1 > a$ tal que

$$0 < \frac{1}{2}L \leq \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L \qquad \text{para} \qquad x > a_1,$$

Por lo tanto, se tiene $(\frac{1}{2}L)g(x) < f(x) < (\frac{3}{2}L)g(x)$ para toda $x > a_1$, de donde se sigue de inmediato la conclusión.

La demostración de (ii) es similar. Q.E.D.

Se le deja al lector formular el resultado análogo cuando $x \to -\infty$.

4.3.16 Ejemplos **a)** $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ para $n \in \mathbb{N}$.

Sea $g(x) := x^n$ para $x \in (0, \infty)$. Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $K := \sup\{1, \alpha\}$. Entonces para toda $x > K$, se tiene $g(x) = x^n \geq x > \alpha$. Puesto que $\alpha \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se sigue que $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

b) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ para $n \in \mathbb{N}$, n par, y $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ para $n \in \mathbb{N}$, n impar.

Se trata el caso en que n es impar, por ejemplo, $n = 2k + 1$ con $k = 0, 1, \cdots$. Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $K := \inf\{\alpha, -1\}$. Para cualquier $x < K$, entonces como $(x^2)^k \geq 1$, se tiene que $x^n = (x^2)^k x \leq x < \alpha$. Puesto que $\alpha \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se sigue que $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

c) Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función polinómica

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Entonces $\lim_{x\to\infty} p = \infty$ si $a_n > 0$ y $\lim_{x\to\infty} p = -\infty$ si $a_n < 0$.

De hecho, sea $g(x) := x^n$ y se aplica el teorema 4.3.15. Puesto que

$$\frac{p(x)}{g(x)} := a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) + a_0\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

se sigue que $\lim_{x\to\infty} (p(x)/g(x)) = a_n$. Puesto que $\lim_{x\to\infty} g = \infty$, la afirmación se sigue del teorema 4.3.15.

d) Sea p la función polinómica del inciso c). Entonces $\lim_{x\to-\infty} p = \infty$ [o bien, $-\infty$] si n es par [o bien, impar] y $a_n > 0$.

Se le dejan los detalles al lector. □

Ejercicios de la sección 4.3

1. Demostrar el teorema 4.3.2.

2. Dar un ejemplo de una función que tenga límite por la derecha pero no por la izquierda en un punto.

3. Sea $f(x) := |x|^{-1/2}$ para $x \neq 0$. Demostrar que $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$.

4. Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea que f esté definida para $x \in (c, \infty)$ y $f(x) > 0$ para toda $x \in (c, \infty)$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to c} 1/f = 0$.

5. Evaluar los siguientes límites o demostrar que no existen.

   a) $\lim_{x\to 1+} \dfrac{x}{x-1} \quad (x \neq 1)$,
   b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} \quad (x \neq 1)$,
   c) $\lim_{x\to 0+} (x+2)/\sqrt{x} \quad (x > 0)$,
   d) $\lim_{x\to \infty} (x+2)/\sqrt{x} \quad (x > 0)$,
   e) $\lim_{x\to 0} (\sqrt{x+1})/x \quad (x > -1)$,
   f) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x+1})/x \quad (x > 0)$,
   g) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} \quad (x > 0)$,
   h) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x} \quad (x > 0)$.

6. Demostrar el teorema 4.3.11.

7. Suponer que f y g tienen límites en $\mathbb{R}$ cuando $x \to \infty$ y que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in (a, \infty)$. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f \leq \lim_{x\to\infty} g$.

8. Sea que f esté definida de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$. Demostrar entonces que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to 0+} f(1/x) = L$.

9. Demostrar que si $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim_{x\to\infty} x f(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

10. Demostrar el teorema 4.3.14.

11. Suponer que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y suponer que $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$. Si $L = 0$, demostrar con un ejemplo que esta conclusión puede fallar.

12. Encontrar las funciones f y g definidas en $(0, \infty)$ tales que $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g = \infty$, y $\lim_{x\to\infty} (f - g) = 0$. ¿Puede el lector encontrar funciones que cumplan con estas condiciones, y con $g(x) > 0$ para toda $x \in (0, \infty)$, tales que $\lim_{x\to\infty} f/g = 0$?

13. Sea que f y g estén definidas en (a, ∞) y suponer que $\lim_{x\to\infty} f = L$ y $\lim_{x\to\infty} g = \infty$. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} f \circ g = L$.

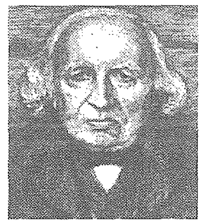
Capítulo 5

FUNCIONES CONTINUAS

Se inicia ahora el estudio de la clase más importante de funciones que surge en el análisis real: la clase de las funciones continuas. El término "continua" se ha usado desde la época de Newton para referirse al movimiento de un cuerpo o para describir una curva sin interrupciones, pero no se hizo preciso sino hasta el siglo XIX. Los trabajos de Bernhard Bolzano en 1817 y de Augustin-Louis Cauchy en 1821 identificaron la continuidad como una propiedad muy importante de las funciones y propusieron definiciones, pero como el concepto está vinculado con el de límite, fue el meticuloso trabajo de Karl Weierstrass en los años 1870 el que aportó la comprensión apropiada de la idea de continuidad.

Se definen primero las nociones de continuidad en un punto y de continuidad en un conjunto, para después establecer que varias combinaciones de funciones continuas dan lugar a funciones continuas. Después, en la sección 5.3, se establecen las propiedades fundamentales que hacen tan importantes las funciones continuas. Por ejemplo, se demuestra que una función continua en un intervalo acotado cerrado debe alcanzar un valor máximo y un valor mínimo. Se demuestra asimismo que una función continua debe asumir todos y cada uno de los valores intermedios entre cualesquiera dos valores que alcance. Las funciones en general no poseen estas y otras propiedades, como se ilustra con varios ejemplos, y en consecuencia son esas propiedades las que distinguen a las funciones continuas como una clase muy especial de funciones.

Karl Weierstrass



Karl Weierstrass (también Weierstraβ) (1815-1897) nació en Westfalia, Alemania. Su padre, agente aduanal en una salina, insistía en que estudiara derecho y finanzas públicas en la Universidad de Bonn, pero Weierstrass tenía más interés en la bebida y la esgrima, y dejó Bonn sin recibir un diploma. Posteriormente se inscribió en la Academia de Münster, donde estudió matemáticas con Christoph Gudermann. De 1841 a 1854 impartió clases en varios gimnasios en Prusia. A pesar de no haber tenido contacto con el mundo matemático durante este periodo, trabajó con ahínco en la investigación matemática y pudo publicar algunos artículos, uno de los cuales atrajo considerable atención. De hecho, la Universidad de Königsberg le otorgó el doctorado honorario por este trabajo en 1855. Al año siguiente, Weierstrass obtuvo puestos en el Instituto Industrial de Berlín y en la Universidad de Berlín. Permaneció en esta última ciudad hasta su muerte.

(continúa)

Estudioso metódico y concienzudo, Weierstrass desconfiaba de la intuición y trabajaba para colocar todo sobre bases lógicas y firmes. Realizó trabajos cardinales sobre los fundamentos de la aritmética y el análisis, el cálculo de variaciones y la geometría algebraica. Debido a la meticulosidad con que preparaba sus presentaciones, fue un conferencista en extremo popular; no era raro que disertara sobre temas de matemáticas avanzadas frente a auditorios de más de 250 asistentes. Entre quienes lo escucharon se encuentran Georg Cantor, Sonya Kovalevsky, Gösta Mittag-Leffler, Max Planck, Otto Hölder, David Hilbert y Oskar Bolza (quien tuvo muchos alumnos de doctorado estadounidenses). A través de sus escritos y conferencias, Weierstrass ejerció una profunda influencia sobre las matemáticas contemporáneas.

En la sección 5.4 se introduce la noción de capital importancia de continuidad uniforme. La distinción entre continuidad y continuidad uniforme es un tanto sutil y no fue apreciada del todo hasta el trabajo de Weierstrass y los matemáticos de su época, pero resultó ser de gran importancia en las aplicaciones. Se presenta una aplicación de la idea de aproximar funciones continuas mediante funciones más elementales (tales como polinomios).

En la sección 5.5 se introduce la noción de "medida" y se utiliza como un método alternativo para demostrar las propiedades fundamentales de las funciones continuas. El significado principal de este concepto se encuentra, sin embargo, en el área de la teoría de integración, donde las medidas son esenciales para definir la integral de Riemann generalizada. El tema se examina en el capítulo 10.

Las funciones monótonas son una clase importante de funciones con sólidas propiedades de continuidad y se estudian en la sección 5.6.

SECCIÓN 5.1 Funciones continuas

En esta sección, que es muy similar a la sección 4.1, se define lo que se entiende al decir que una función es continua en un punto, o en un conjunto. Ésta noción de continuidad constituye uno de los conceptos centrales del análisis matemático y se usa prácticamente en todo el resto del material de este libro. Por consiguiente, es esencial que el lector lo domine.

5.1.1 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $c \in A$. Se dice que f es **continua en** c si, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x es cualquier punto de A que satisface $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Si f no es continua en c, entonces se dice que f es **discontinua en** c.

Como en el caso de la definición de límite, la definición de continuidad en un punto puede formularse muy bien en términos de vecindades. Esto se hace en el siguiente resultado. Se le deja al lector la verificación como un importante ejercicio. Véase la figura 5.1.1.

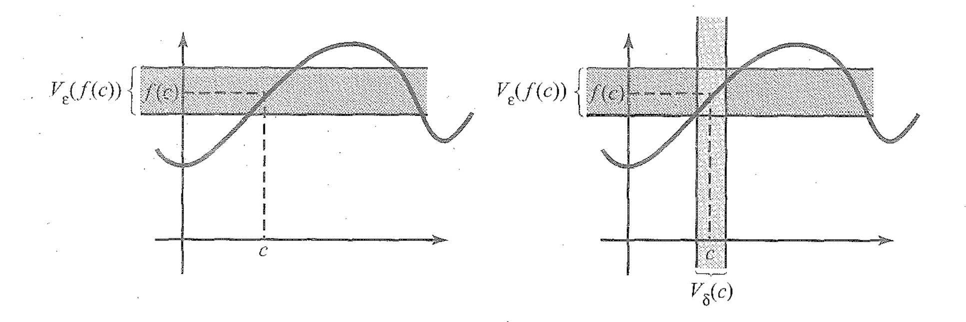


Figura 5.1.1 Dada $V_\varepsilon(f(c))$, debe determinarse una vecindad $V_\delta(c)$.

5.1.2 Teorema *Una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en un punto* $c \in A$ *si y sólo si dada cualquier vecindad-*ε $V_\varepsilon(f(c))$ *de* $f(c)$ *existe una vecindad-*δ $V_\delta(c)$ *de* c *tal que si* x *es cualquier punto de* $A \cap V_\delta(c)$, *entonces* $f(x)$ *pertenece a* $V_\varepsilon(f(c))$, *es decir,*

$$f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\varepsilon(f(c)).$$

Observaciones **1)** Si $c \in A$ es un punto de acumulación de A, entonces la comparación de las definiciones 4.1.4 y 5.1.1 indica que f es continua en c si y sólo si

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x). \tag{1}$$

Por tanto, si c es un punto de acumulación de A, entonces deben cumplirse tres condiciones para que f sea continua en c:

(i) f debe estar definida en c (para que $f(c)$ tenga sentido),
(ii) el límite de f en c debe existir en $\mathbb{R}$ (para que $\lim_{x \to c} f(x)$ tenga sentido), y
(iii) estos dos valores deben ser iguales.

2) Si $c \in A$ no es un punto de acumulación de A, entonces existe una vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que $A \cap V_\delta(c) = \{c\}$. Se concluye por tanto que una función f es continua automáticamente en un punto $c \in A$ que no es un punto de acumulación de A. Tales puntos suelen denominarse "puntos aislados" de A. Son de escaso interés práctico aquí, ya que no tienen relación con los procesos de límites. Puesto que la continuidad es automática en tales puntos, por lo general sólo se investiga la continuidad en puntos de acumulación. Así, la condición (1) se considera característica de la continuidad en c.

Una ligera modificación de la demostración del teorema 4.1.8 para límites da lugar a la siguiente versión en términos de sucesiones de la continuidad en un punto.

5.1.3 Criterio de sucesiones para la continuidad *Una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en el punto* $c \in A$ *si y sólo si para toda sucesión* (x_n) *en* A *que converge a* c*, la sucesión* $(f(x_n))$ *converge a* $f(c)$.

El siguiente criterio de discontinuidad es una consecuencia del teorema anterior. Deberá compararse con el criterio de divergencia 4.1.9a con $L = f(c)$. Le corresponde al lector desarrollar la demostración en detalle.

5.1.4 Criterio de discontinuidad *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$*, sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in A$*. Entonces* f *es discontinua en* c *si y sólo si existe una sucesión* (x_n) *en* A *tal que* (x_n) *converge a* c*, pero la sucesión* $(f(x_n))$ *no converge a* $f(c)$.

Hasta ahora se ha examinado la continuidad en un *punto*. Para tratar la continuidad de una función en un *conjunto*, tan sólo se plantea el requisito de que la función sea continua en cada punto del conjunto. Lo anterior se enuncia formalmente en la siguiente definición.

5.1.5 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Si B es un subconjunto de A, se dice que f es **continua en el conjunto** B si f es continua en cada punto de B.

5.1.6 Ejemplos **a)** La función constante $f(x) := b$ es continua en $\mathbb{R}$.

En el ejemplo 4.1.7a se vio que si $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene $\lim_{x \to c} f(x) = b$. Puesto que $f(c) = b$, se tiene $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ y, por consiguiente, f es continua en cada punto $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) $g(x) := x$ es continua en $\mathbb{R}$.

En el ejemplo 4.1.7b se vio que si $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene $\lim_{x \to c} g = c$. Puesto que $g(c) = c$, entonces g es continua en cada punto $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, g es continua en $\mathbb{R}$.

c) $h(x) := x^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

En el ejemplo 4.1.7c se vio que si $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene $\lim_{x \to c} h = c^2$. Puesto que $h(c) = c^2$, entonces h es continua en cada punto $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, h es continua en $\mathbb{R}$.

d) $\varphi(x) := 1/x$ es continua en $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

En el ejemplo 4.1.7d se vio que si $c \in A$, entonces se tiene $\lim_{x \to c} \varphi = 1/c$. Puesto que $\varphi(c) = 1/c$, con esto se demuestra que φ es continua en cada punto $c \in A$. Por lo tanto, φ es continua en A.

e) $\varphi(x) := 1/x$ no es continua en $x = 0$.

De hecho, si $\varphi(x) = 1/x$ para $x > 0$, entonces φ no está definida en $x = 0$, por lo que no puede ser continua ahí. De manera alternativa, en el ejemplo 4.1.10a se vio que $\lim_{x \to 0} \varphi$ no existe en $\mathbb{R}$, de modo que φ no puede ser continua en $x = 0$.

f) La función signo sgn no es continua en 0.

La función signo se definió en el ejemplo 4.1.10b, donde también se estableció que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, sgn no es continua en $x = 0$ (aun cuando sgn 0 sí está definida).

Éste es un ejercicio que demuestra que sgn es continua en cada punto $c \neq 0$.

g) Sea $A := \mathbb{R}$ y sea f la "función discontinua" de Dirichlet definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Se afirma que f es *no continua en cualquier punto de* $\mathbb{R}$. (Esta función fue introducida en 1829 por P. G. L. Dirichlet.)

De hecho, si c es un número racional, sea (x_n) una sucesión de números irracionales que converge a c. (El corolario 2.4.9 del teorema de densidad 2.4.8 asegura la existencia de esta sucesión.) Puesto que $f(x_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\text{lím}\,(f(x_n)) = 0$, mientras que $f(c) = 1$. Por lo tanto, f es no continua en el número racional c.

Por otra parte, si b es un número irracional, sea (y_n) una sucesión de números racionales que converge a b. (El teorema de densidad 2.4.8 asegura la existencia de esta sucesión.) Puesto que $f(y_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\text{lím}\,(f(y_n)) = 1$, mientras que $f(b) = 0$. Por lo tanto, f es no continua en el número irracional b.

Puesto que cualquier número real es racional, o bien irracional, se deduce que f es no continua en todo punto de $\mathbb{R}$.

h) Sea $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para cualquier número irracional $x > 0$ se define $h(x) = 0$. Para un número racional en A de la forma m/n, con los números naturales m, n sin factores comunes excepto 1, se define $h(m/n) := 1/n$. (Véase la figura 5.1.2.)

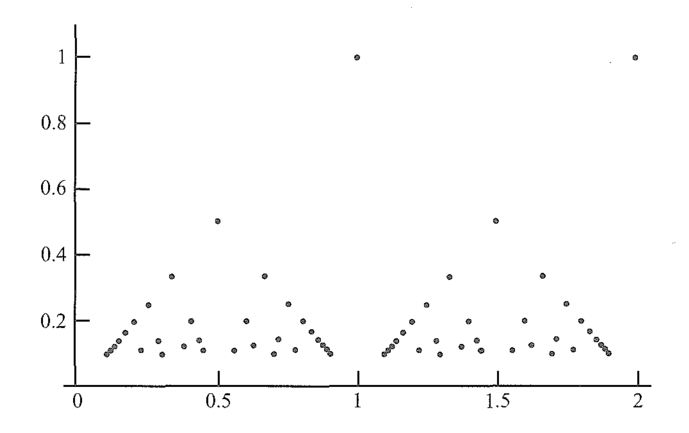


Figura 5.1.2 Función de Thomae.

Se afirma que *h es continua en cualquier número irracional en* A *y que es discontinua en cualquier número racional en* A. (Esta función fue introducida en 1875 por K. J. Thomae.)

De hecho, si $a > 0$ es racional, sea (x_n) una sucesión de números irracionales en A que converge a a. Entonces $\text{lím}\,(h(x_n)) = 0$, mientras que $h(a) > 0$. En consecuencia, h es discontinua en a.

Por otro lado, si b es un número irracional y $\varepsilon > 0$, entonces (por la propiedad de Arquímedes) existe un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Sólo existe un número finito de racionales con denominador menor que n_0 en el intervalo $(b - 1, b + 1)$. (¿Por qué?) En consecuencia, puede elegirse $\delta > 0$ tan pequeña que la vecindad

$(b-\delta, b+\delta)$ no contenga números racionales con un denominador menor que n_0. Se sigue entonces que para $|x-b| < \delta$, $x \in A$, se tiene $|h(x)-h(b)| = |h(x)| \le 1/n_0 < \varepsilon$. Por tanto, h es continua en el número irracional b.

Por consiguiente, se deduce que la función de Thomae h es continua precisamente en los puntos irracionales de A. □

5.1.7 Observaciones **a)** En ocasiones una función $f: A \to \mathbb{R}$ es no continua en un punto c porque no está definida en ese punto. Sin embargo, si la función f tiene límite L en el punto c y si se define F en $A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) := \begin{cases} L & \text{para} \quad x = c, \\ f(x) & \text{para} \quad x \in A, \end{cases}$$

entonces F es continua en c. Para ver por qué, es necesario verificar que $\lim\limits_{x\to c} F = L$, pero este hecho se infiere (¿por qué?), ya que $\lim\limits_{x\to c} f = L$.

b) Si una función $g: A \to \mathbb{R}$ no tiene límite en c, entonces no hay forma de obtener una función $G: A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ que sea continua en c definiendo

$$G(x) := \begin{cases} C & \text{para} \quad x = c, \\ g(x) & \text{para} \quad x \in A. \end{cases}$$

Para ver por qué, obsérvese que si $\lim\limits_{x\to c} G$ existe y es igual a C, entonces $\lim\limits_{x\to c} g$ también debe existir y ser igual a C.

5.1.8 Ejemplos **a)** La función $g(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ (véase la figura 4.1.3) no tiene límite en $x = 0$ (véase el ejemplo 4.1.10c). En consecuencia, no hay ningún valor que pueda asignarse a $x = 0$ a fin de obtener una extensión continua de g en $x = 0$.

b) Sea $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 5.1.3.) Puesto que f no está definida en $x = 0$, la función f no puede ser continua en este punto. Sin embargo, en el ejemplo 4.2.8f se vio que $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$. Por lo tanto, de la observación 5.1.7a se sigue que si se define $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ x \operatorname{sen}(1/x) & \text{para} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

entonces F es continua en $x = 0$. □

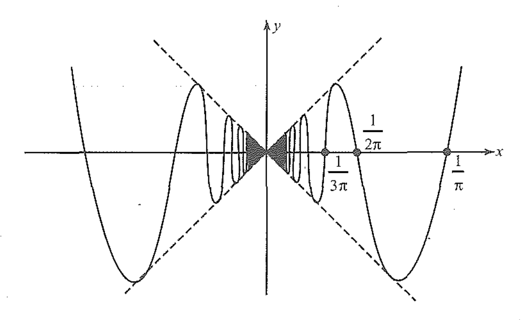


Figura 5.1.3 Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ $(x \neq 0)$.

Ejercicios de la sección 5.1

1. Demostrar el criterio de sucesiones 5.1.3.

2. Establecer el criterio de discontinuidad 5.1.4.

3. Sea $a < b < c$. Suponer que f es continua en $[a, b]$, que g es continua en $[b, c]$ y que $f(b) = g(b)$. Definir h en $[a, c]$ por $h(x) := f(x)$ para $x \in [a, b]$ y $h(x) := g(x)$ para $x \in (b, c]$. Demostrar que h es continua en $[a, c]$.

4. Si $x \in \mathbb{R}$, se define $[\![x]\!]$ como el entero mayor $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x$. (Así, por ejemplo, $[\![8.3]\!] = 8$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![-\pi]\!] = -4$.) La función $x \mapsto [\![x]\!]$ se llama la **función del entero mayor**. Determinar los puntos de continuidad de las funciones siguientes:

   a) $f(x) := [\![x]\!]$,
   b) $g(x) := x[\![x]\!]$,
   c) $h(x) := [\![\operatorname{sen} x]\!]$,
   d) $k(x) := [\![1/x]\!] \quad (x \neq 0)$.

5. Sea que f esté definida para toda $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, por $f(x) = (x^2 + x - 6)/(x - 2)$. ¿Es posible definir f en $x = 2$ de tal modo que f sea continua en este punto?

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $c \in A$. Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que si $x, y \in A \cap V_\delta(c)$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en c y sea $f(c) > 0$. Demostrar que existe una vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que si $x \in V_\delta(c)$, entonces $f(x) > 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y sea $S := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ el "conjunto cero" de f. Si (x_n) está en S y $x = \text{lím}\,(x_n)$, demostrar que $x \in S$.

9. Sea $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : B \to \mathbb{R}$ y sea g la restricción de f a A (es decir, $g(x) = f(x)$ para $x \in A$).

   a) Si f es continua en $c \in A$, demostrar que g es continua en c.
   b) Demostrar con un ejemplo que si g es continua en c, no se sigue necesariamente que f es continua en c.

10. Demostrar que la función valor absoluto $f(x) := |x|$ es continua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

11. Sea $K > 0$ y sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaga la condición $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

12. Suponer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y que $f(r) = 0$ para todo número racional r. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

13. Definir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) := 2x$ para x racional y $g(x) := x + 3$ para x irracional. Encontrar todos los puntos en los que g es continua.

14. Sea $A := (0, \infty)$ y sea que $k : A \to \mathbb{R}$ esté definida como sigue. Para $x \in A$, x irracional, se define $k(x) = 0$; para $x \in A$ racional y de la forma $x = m/n$ con los números naturales m, n sin factores comunes excepto 1, se define $k(x) := n$. Demostrar que k no está acotada en todo intervalo abierto en A. Concluir que k no es continua en ningún punto de A. (Véase el ejemplo 5.1.6h.)

15. Sea que $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ esté acotada pero tal que $\lim\limits_{x \to 0} f$ no existe. Demostrar que existen dos sucesiones (x_n) y (y_n) en $(0, 1)$ con $\text{lím}\,(x_n) = 0 = \text{lím}\,(y_n)$, pero tales que $\text{lím}\,(f(x_n))$ y $\text{lím}\,(f(y_n))$ existen pero no son iguales.

SECCIÓN 5.2 Combinaciones de funciones continuas

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean f y g funciones que están definidas de A a $\mathbb{R}$, y sea $b \in \mathbb{R}$. En la definición 4.2.3 se definieron las funciones suma, diferencia, producto y múltiplo denotadas por $f + g$, $f - g$, fg, bf. Además, si $h : A \to \mathbb{R}$ es tal que $h(x) \neq 0$ para toda $x \in A$, entonces se definió la función cociente denotada por f/h.

El siguiente resultado es similar al teorema 4.2.4, del cual se deriva.

5.2.1 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* f *y* g *funciones de* A *a* $\mathbb{R}$, *y sea* $b \in \mathbb{R}$. *Suponer que* $c \in A$ *y que* f *y* g *son continuas en* c.

a) *Entonces* $f + g$, $f - g$, fg *y* bf *son continuas en* c.

b) *Si* $h : A \to \mathbb{R}$ *es continua en* $c \in A$ *y si* $h(x) \neq 0$ *para toda* $x \in A$, *entonces el cociente* f/h *es continuo en* c.

Demostración. Si $c \in A$ no es un punto de acumulación de A, entonces la conclusión es automática. En consecuencia, se supone que c es un punto de acumulación de A.

a) Puesto que f y g son continuas en c, entonces

$$f(c) = \lim_{x \to c} f \qquad \text{y} \qquad g(c) = \lim_{x \to c} g.$$

Por consiguiente, del teorema 4.2.4a se sigue que

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c) = \lim_{x \to c} (f + g).$$

Por lo tanto, $f + g$ es continua en c. Las demás afirmaciones del inciso a) se demuestran de manera similar.

b) Puesto que $c \in A$, entonces $h(c) \neq 0$. Pero como $h(c) = \lim_{x \to c} h$, del teorema 4.2.4b se sigue que

$$\frac{f}{h}(c) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{\lim_{x \to c} f}{\lim_{x \to c} h} = \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h} \right).$$

Por lo tanto, f/h es continua en c. Q.E.D.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema 5.2.1, aplicada a cualquier punto de A. Sin embargo, puesto que se trata de un resultado de extrema importancia se enuncia formalmente.

5.2.2 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sean* f *y* g *continuas de* A *a* $\mathbb{R}$ *y sea* $b \in \mathbb{R}$.

a) *Las funciones* $f + g$, $f - g$, fg *y* bf *son continuas en* A.

b) *Si* $h : A \to \mathbb{R}$ *es continua en* A *y* $h(x) \neq 0$ *para* $x \in A$, *entonces el cociente* f/h *es continuo en* A.

Observación Para definir cocientes, en ocasiones es más conveniente proceder como sigue. Si $\varphi : A \to \mathbb{R}$, sea $A_1 := \{x \in A : \varphi(x) \neq 0\}$, puede definirse el cociente f/φ en el conjunto A_1 por

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)(x) := \frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad \text{para} \qquad x \in A_1. \tag{1}$$

Si φ es continua en un punto $c \in A_1$, es claro que la restricción φ_1 de φ a A_1 también es continua en c. Por lo tanto, del teorema 5.2.1b aplicado a φ_1 se sigue que f/φ_1 es continua en $c \in A$. Puesto que $(f/\varphi)(x) = (f/\varphi_1)(x)$ para $x \in A_1$, se sigue que f/φ es continua en $c \in A_1$. Del mismo modo, si f y φ son continuas en A, entonces la función f/φ, definida en A_1 por (1), es continua en A_1.

5.2.3 Ejemplos **a)** Funciones polinómicas.

Si p es una función polinómica, de tal modo que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces del ejemplo 4.2.5f se sigue que $p(c) = \lim_{x\to c} p$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Por tanto, *una función polinómica es continua en* $\mathbb{R}$.

b) Funciones racionales.

Si p y q son funciones polinómicas en $\mathbb{R}$, entonces hay a lo sumo un número finito $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ de raíces reales de q. Si $x \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, entonces $q(x) \neq 0$, por lo que puede definirse la función racional r por

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{para} \qquad x \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}.$$

En el ejemplo 4.2.5g se vio que si $q(c) \neq 0$, entonces

$$r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} = \lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to c} r(x).$$

En otras palabras, r es continua en c. Puesto que c es cualquier número real que no es una raíz de q, se infiere que *una función racional es continua en todo número real en el que está definida.*

c) Se demuestra a continuación que la función seno sen es continua en $\mathbb{R}$.

Para ello, se hace uso de las siguientes propiedades de las funciones seno y coseno. (Véase la sección 8.4.) Para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$|\operatorname{sen} z| \leq |z|, \qquad |\cos z| \leq 1,$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(x-y)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x+y)\right].$$

En consecuencia, si $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| \leq 2 \cdot \frac{1}{2}|x-c| \cdot 1 = |x-c|.$$

Por lo tanto, sen es continua en c. Puesto que $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se sigue que sen es continua en $\mathbb{R}$.

d) La función coseno es continua en $\mathbb{R}$.

Se hace uso de las siguientes propiedades de las funciones seno y coseno. Para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$|\operatorname{sen} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{sen} z| \leq 1,$$
$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(x-y)\right].$$

En consecuencia, si $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene

$$|\cos x - \cos c| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}|c - x| = |x - c|.$$

Por lo tanto, cos es continua en c. Puesto que $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se sigue que cos es continua en $\mathbb{R}$. [De manera alternativa, podría haberse utilizado la relación $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$.]

e) Las funciones tan, cot, sec, csc son continuas donde están definidas.

Por ejemplo, la función cotangente está definida por

$$\cot x := \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

siempre que $\operatorname{sen} x \neq 0$ (es decir, siempre que $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$). Puesto que sen y cos son continuas en $\mathbb{R}$, se sigue (véase la observación antes del ejemplo 5.2.3) que la función cot es continua en su dominio. Las demás funciones trigonométricas se abordan del mismo modo. □

5.2.4 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea que* $|f|$ *esté definida por* $|f|(x) := |f(x)|$ *para* $x \in A$.

a) *Si* f *es continua en un punto* $c \in A$, *entonces* $|f|$ *es continua en* c.

b) *Si* f *es continua en* A, *entonces* $|f|$ *es continua en* A.

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del ejercicio 4.2.13. Q.E.D.

5.2.5 Teorema *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $f(x) \geq 0$ *para toda* $x \in A$. *Se hace que* $\sqrt{f}$ *esté definida para* $x \in A$ *por* $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$.

a) *Si* f *es continua en un punto* $c \in A$, *entonces* $\sqrt{f}$ *es continua en* c.

b) *Si* f *es continua en* A, *entonces* $\sqrt{f}$ *es continua en* A.

Demostración. Este resultado en sí es una consecuencia inmediata del ejercicio 4.2.14. Q.E.D.

Composición de funciones continuas

Se demuestra ahora que si la función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un punto c y que si $g : B \to \mathbb{R}$ es continua en $b = f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en c. A fin de tener la seguridad de que $g \circ f$ está definida en la totalidad de A, es necesario suponer también que $f(A) \subseteq B$.

5.2.6 Teorema *Sean* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *y sean* $f: A \to \mathbb{R}$ *y* $g: B \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* $f(A) \subseteq B$. *Si* f *es continua en un punto* $c \in A$ *y* g *es continua en* $b = f(c) \in B$, *entonces la composición* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en* c.

Demostración. Sea W una vecindad-ε de $g(b)$. Puesto que g es continua en b, existe una vecindad-δ V de $b = f(c)$ tal que si $y \in B \cap V$, entonces $g(y) \in W$. Puesto que f es continua en c, existe una vecindad-γ U de c tal que si $x \in A \cap U$, entonces $f(x) \in V$. (Véase la figura 5.2.1.) Puesto que $f(A) \subseteq B$, se sigue que si $x \in A \cap U$, entonces $f(x) \in B \cap V$, de donde $g \circ f(x) = g(f(x)) \in W$. Pero como W es una vecindad-ε arbitraria de $g(b)$, esto implica que $g \circ f$ es continua en c. Q.E.D.

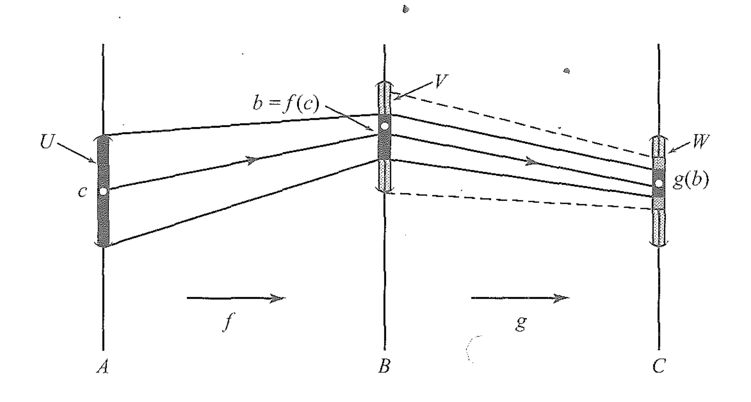


Figura 5.2.1 La composición de f y g.

5.2.7 Teorema *Sean* $A, B \subseteq \mathbb{R}$, *sea* $f: A \to \mathbb{R}$ *continua en* A *y sea* $g: B \to \mathbb{R}$ *continua en* B. *Si* $f(A) \subseteq B$, *entonces la función compuesta* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en* A.

Demostración. El teorema se sigue de inmediato del resultado precedente si f y g son continuas en todo punto de A y B, respectivamente. Q.E.D.

Los teoremas 5.2.6 y 5.2.7 son de gran utilidad para establecer que ciertas funciones son continuas. Pueden usarse en muchas situaciones en las que sería difícil aplicar directamente la definición de continuidad.

5.2.8 Ejemplos **a)** Sea $g_1(x) := |x|$ para $x \in \mathbb{R}$. De la desigualdad del triángulo se sigue que

$$|g_1(x) - g_1(c)| \leq |x - c|$$

para toda $x, c \in \mathbb{R}$. En consecuencia, g_1 es continua en $c \in \mathbb{R}$. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es cualquier función que sea continua en A, entonces el teorema 5.2.7 implica que $g_1 \circ f = |f|$ es continua en A. Este resultado proporciona otra definición del teorema 5.2.4.

b) Sea $g_2(x) := \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. De los teoremas 3.2.10 y 5.1.3 se sigue que g_2 es continua en cualquier número $c \geq 0$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A y si $f(x) \geq 0$ para toda $x \in A$, entonces del teorema 5.2.7 se sigue que $g_2 \circ f = \sqrt{f}$ es continua en A. Este resultado proporciona otra definición del teorema 5.2.5.

c) Sea $g_3(x) :=$ sen x para $x \in \mathbb{R}$. En el ejemplo 5.2.3c se vio que g_3 es continua en $\mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en A, entonces del teorema 5.2.7 se sigue que $g_3 \circ f$ es continua en A.

En particular, si $f(x) := 1/x$ para $x \neq 0$, entonces la función $g(x) :=$ sen$(1/x)$ es continua en todo punto $c \neq 0$. [Se ha visto ya, en el ejemplo 5.1.8a, que g no puede definirse en 0 a fin de convertirla en una función continua en ese punto.] □

Ejercicios de la sección 5.2

1. Determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones e indicar los teoremas que se usan en cada caso.

a) $f(x) := \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$, b) $g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$,

c) $h(x) := \dfrac{\sqrt{1 + |\text{sen}\, x|}}{x}$ $(x \neq 0)$, d) $k(x) := \cos\sqrt{1 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Demostrar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $A \subseteq \mathbb{R}$ y si $n \in \mathbb{N}$, entonces la función f^n definida por $f^n(x) = (f(x))^n$ para $x \in A$ es continua en A.

3. Dar un ejemplo de funciones f y g que sean ambas discontinuas en un punto c en $\mathbb{R}$ y tales que: a) la suma $f + g$ sea continua en c, b) el producto fg sea continuo en c.

4. Sea que $x \mapsto [\![x]\!]$ denote la función del entero mayor (véase el ejercicio 5.1.4). Determinar los puntos de continuidad de la función $f(x) := x - [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Sea que g esté definida en $\mathbb{R}$ por $g(1) := 0$ y $g(x) := 2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x) := x + 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \to 0} g \circ f \neq (g \circ f)(0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema 5.2.6?

6. Sea que f, g estén definidas en $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Suponer que $\lim_{x \to c} f = b$ y que g es continua en b. Demostrar que $\lim_{x \to c} g \circ f = g(b)$. (Comparar este resultado con el teorema 5.2.7 y con el ejercicio precedente.)

7. Dar un ejemplo de una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea discontinua en todo punto de $[0, 1]$ pero tal que $|f|$ sea continuo en $[0, 1]$.

8. Sean f, g continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y suponer que $f(r) = g(r)$ para todos los números racionales r. ¿Se cumple que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$?

9. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ que satisface $h(m/2^n) = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $h(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y sea $P := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$. Si $c \in P$, demostrar que existe una vecindad $V_\delta(c) \subseteq P$.

11. Si f y g son continuas en $\mathbb{R}$, sea $S := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq g(x)\}$. Si $(s_n) \subseteq S$ y lím $(s_n) = s$, demostrar que $s \in S$.

12. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **aditiva** si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para toda x, y en $\mathbb{R}$. Demostrar que si f es continua en algún punto x_0, entonces es continua en todo punto de $\mathbb{R}$. (Véase el ejercicio 4.2.12.)

13. Suponer que f es una función continua aditiva en $\mathbb{R}$. Si $c := f(1)$, demostrar que se tiene $f(x) = cx$ para toda $x \in \mathbb{R}$. [*Sugerencia:* probar primero que si r es un número racional, entonces $f(r) = cr$.]

14. Sea que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaga la relación $g(x + y) = g(x)g(y)$ para toda x, y en $\mathbb{R}$. Demostrar que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en todo punto de $\mathbb{R}$. Asimismo, si se tiene $g(a) = 0$ para alguna $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en un punto c y sea $h(x) := \sup\{f(x), g(x)\}$ para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $h(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x)\big) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Usar este resultado para demostrar que h es continua en c.

SECCIÓN 5.3 Funciones continuas en intervalos

Las funciones que son continuas en intervalos tienen varias propiedades muy importantes que las funciones continuas en general no poseen. En esta sección se establecen algunos resultados profundos que son de gran importancia y que se aplican más adelante. En la sección 5.5 se presentan demostraciones alternativas de estos resultados.

5.3.1 Definición Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ está **acotada en** A si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in A$.

En otras palabras, una función está acotada en un conjunto si su codominio es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. Decir que una función *no* está acotada en un conjunto dado significa que ningún número particular puede servir como cota para su codominio. En lenguaje preciso, una función f no está acotada en el conjunto A si dada cualquier $M > 0$ existe un punto $x_M \in A$ tal que $|f(x_M)| > M$. Por lo que se dice que f **no está acotada** en A en este caso.

Por ejemplo, la función f definida en el intervalo $A := (0, \infty)$ por $f(x) := 1/x$ no está acotada en A porque para cualquier $M > 0$ puede tomarse el punto $x_M := 1/(M + 1)$ en A para obtener $f(x_M) = 1/x_M = M + 1 > M$. Este ejemplo indica que no es necesario que las funciones continuas estén acotadas. Sin embargo, en el siguiente teorema se establece que las funciones continuas en cierto tipo de intervalo necesariamente están acotadas.

5.3.2 Teorema de acotabilidad* *Sea* $\mathrm{I} := [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *un intervalo acotado cerrado y sea* $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Entonces* f *está acotada en* I.

---

*Este teorema, así como el 5.3.4, es verdadero para un conjunto acotado cerrado arbitrario. Para estos desarrollos, véanse las secciones 11.2 y 11.3.

Demostración. Suponer que f no está acotada en I. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un número $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| > n$. Puesto que I está acotado, la sucesión $X := (x_n)$ está acotada. Por lo tanto, el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8 implica que existe una subsucesión X' (x_{n_r}) de X que converge a un número x. Puesto que I es cerrado y los elementos de X' pertenecen a I, por el teorema 3.2.6 se sigue que $x \in I$. Entonces f es continua en x, por lo que $(f(x_{n_r}))$ converge a $f(x)$. Se concluye entonces por el teorema 3.2.2 que la sucesión convergente $(f(x_{n_r}))$ debe estar acotada. Pero esto es una contradicción, ya que

$$|f(x_{n_r})| > n_r \geq r \quad \text{para toda} \quad r \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, la suposición de que la función continua f no está acotada en el intervalo acotado cerrado I lleva a una contradicción. Q.E.D.

A fin de demostrar que cada una de las hipótesis del teorema de acotabilidad es necesaria, pueden construirse ejemplos donde la conclusión falla si cualquiera de las hipótesis se relaja.

(i) El intervalo debe estar acotado. La función $f(x) := x$ para x en el intervalo cerrado no acotado $A := [0, \infty)$ es continua pero no está acotada en A.

(ii) El intervalo debe ser cerrado. La función $g(x) := 1/x$ para x en el intervalo semiabierto $B := (0, 1]$ es continua pero no está acotada en B.

(iii) La función debe ser continua. La función h definida en el intervalo cerrado $C := [0, 1]$ por $h(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $h(0) := 1$ es discontinua y no está acotada en C.

Teorema del máximo-mínimo

5.3.3 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f **tiene un máximo absoluto** en A si existe un punto $x^* \in A$ tal que

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \text{para toda} \quad x \in A.$$

Se dice que f **tiene un mínimo absoluto** en A si existe un punto $x_* \in A$ tal que

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \text{para toda} \quad x \in A.$$

Se dice que x^* es un **punto máximo absoluto** de f en A, y que x_* es un **punto mínimo absoluto** de f en A, si existen.

Cabe señalar que una función continua en un conjunto A no necesariamente tiene un máximo o un mínimo absoluto en el conjunto. Por ejemplo, $f(x) := 1/x$ no tiene ni un máximo absoluto ni un mínimo absoluto en el conjunto $A := (0, \infty)$. (Véase la figura 5.3.1.) No puede haber ningún máximo absoluto de f en A porque f no está acotada por arriba en A y no hay ningún punto donde f alcance el valor $0 = \inf\{f(x) : x \in A\}$. La misma función tampoco tiene un máximo absoluto ni un mínimo absoluto cuando se restringe al conjunto $(0, 1)$, mientras que tiene *tanto* un máximo absoluto *como* un mínimo absoluto cuando se restringe al conjunto

[1, 2]. Además, $f(x) = 1/x$ tiene un máximo absoluto pero no un mínimo absoluto cuando se restringe al conjunto $[1, \infty)$, pero no tiene ni máximo absoluto ni mínimo absoluto cuando se restringe al conjunto $(1, \infty)$.

Se ve de inmediato que si una función tiene un punto máximo absoluto, entonces este punto no necesariamente se encuentra determinado de manera única. Por ejemplo, la función $g(x) := x^2$ definida para $x \in A := [-1, +1]$ tiene los dos puntos $x = \pm 1$ que producen un máximo absoluto en A y el punto único $x = 0$ que produce su mínimo absoluto en A. (Véase la figura 5.3.2.) Para citar un ejemplo extremo, la función constante $h(x) := 1$ para $x \in \mathbb{R}$ es tal que *todo punto* de $\mathbb{R}$ es a la vez un punto máximo absoluto y un punto mínimo absoluto de h.

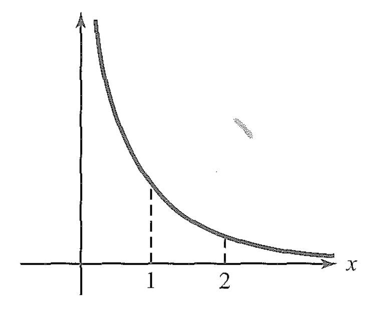


Figura 5.3.1 La función $f(x) = 1/x$ $(x > 0)$.

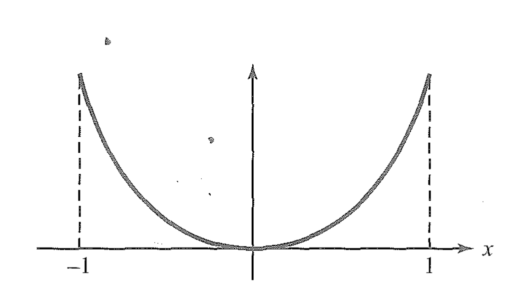


Figura 5.3.2 La función $g(x) = x^2$ $(|x| \leq 1)$.

5.3.4 Teorema del máximo-mínimo *Sea* $\mathrm{I} := [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *un intervalo acotado cerrado y sea* $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Entonces* f *tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en* I.

Demostración. Considerar el conjunto no vacío $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ de los valores de f en I. En el teorema 5.3.2 se estableció que $f(I)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Sea $s^* := \sup f(I)$ y $s_* := \inf f(I)$. Se afirma que existen los puntos x^* y x_* en I tales que $s^* = f(x^*)$ y $s_* = f(x_*)$. Se establecerá la existencia del punto x^*, dejándole al lector la demostración de la existencia de x_*.

Puesto que $s^* = \sup f(I)$, si $n \in \mathbb{N}$, entonces el número $s^* - 1/n$ no es una cota superior del conjunto $f(I)$. Por consiguiente, existe un número $x_n \in I$ tal que

$$s^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s^* \qquad \text{para toda} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Puesto que I está acotado, la sucesión $X := (x_n)$ está acotada. Por lo tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8, existe una subsucesión $X' = (x_{n_r})$ de X que converge a algún número x^*. Puesto que los elementos de X' pertenecen a $I = [a, b]$, por el teorema 3.2.6 se sigue que $x^* \in I$. Por lo tanto, f es continua en x^* de tal modo que $\lim(f(x_{n_r})) = f(x^*)$. Puesto que de (1) se sigue que

$$s^* - \frac{1}{n_r} < f(x_{n_r}) \leq s^* \qquad \text{para toda} \qquad r \in \mathbb{N},$$

por el teorema de compresión 3.2.7 se concluye que lím $(f(x_{n_r})) = s^*$. Por lo tanto, se tiene

$$f(x^*) = \text{lím}(f(x_{n_r})) = s^* = \sup f(I).$$

Se concluye que x^* es un punto máximo absoluto de f en I. Q.E.D.

El siguiente resultado es la base teórica para localizar las raíces de una función continua por medio de los cambios de signo de la función. La demostración proporciona también un algoritmo, conocido como el **método de bisección**, para calcular las raíces con un grado especificado de precisión y cuya programación en una computadora es sencilla. Es una herramienta convencional para encontrar las soluciones de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, donde f es una función continua. Una demostración alternativa del teorema se indica en el ejercicio 11.

5.3.5 Teorema de localización de raíces *Sea* $I = [a, b]$ *y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $f(a) < 0 < f(b)$, *o si* $f(a) > 0 > f(b)$, *entonces existe un número* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demostración. Se supone que $f(a) < 0 < f(b)$. Se generará una sucesión de intervalos por bisecciones sucesivas. Sea $I_1 := [a_1, b_1]$, donde $a_1 := a$, $b_1 := b$, y sea p_1 el punto medio $p_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Si $f(p_1) = 0$, se toma $c := p_1$ y se termina la demostración. Si $f(p_1) \neq 0$, entonces o $f(p_1) > 0$ o $f(p_1) < 0$. Si $f(p_1) > 0$, entonces se hace $a_2 := a_1$, $b_2 := p_1$, mientras que si $f(p_1) < 0$, entonces se hace $a_2 := p_1$, $b_2 := b_1$. En cualquiera de los dos casos, se hace $I_2 := [a_2, b_2]$; entonces se tiene $I_2 \subset I_1$ y $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$.

Se continúa el proceso de bisección. Suponer que los intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_k$ se han obtenido por bisección sucesiva de la misma manera. Entonces se tiene $f(a_k) < 0$ y $f(b_k) > 0$, y se hace $p_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Si $f(p_k) = 0$, se toma $c := p_k$ y se termina la demostración. Si $f(p_k) > 0$, se hace $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := p_k$, mientras que si $f(p_k) < 0$, se hace $a_{k+1} := p_k$, $b_{k+1} := b_k$. En cualquiera de los dos casos, se hace $I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}]$; entonces $I_{k+1} \subset I_k$ y $f(a_{k+1}) < 0, f(b_{k+1}) > 0$.

Si el proceso concluye con la localización de un punto p_n tal que $f(p_n) = 0$, entonces se ha terminado. Si el proceso no concluye, entonces se obtiene una sucesión anidada de intervalos cerrados acotados $I_n := [a_n, b_n]$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f(a_n) < 0 \quad \text{y} \quad f(b_n) > 0.$$

Además, puesto que los intervalos se obtienen por bisección repetida, la longitud de I_n es igual a $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$. De la propiedad de los intervalos anidados 2.5.2 se sigue que existe un punto c que pertenece a I_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $a_n \leq c \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene entonces $0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$ y $0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$. En consecuencia, se sigue que lím $(a_n) = c =$ lím (b_n). Puesto que f es continua en c, se tiene

$$\text{lím}(f(a_n)) = f(c) = \text{lím}(f(b_n)).$$

El hecho de que $f(a_n) < 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ implica que $f(c) = \lim(f(a_n)) \leq 0$. Asimismo, también el hecho de que $f(b_n) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ implica que $f(c) = \lim(f(b_n)) \geq 0$. En consecuencia, se concluye que $f(c) = 0$. Por consiguiente, c es una raíz de f. Q.E.D.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se aplica el método de bisección de manera sistemática para encontrar raíces.

5.3.6 Ejemplo La ecuación $f(x) = xe^x - 2 = 0$ tiene una raíz c en el intervalo $[0, 1]$ porque f es continua en este intervalo y $f(0) = -2 < 0$ y $f(1) = e - 2 > 0$. Se construye la siguiente tabla, donde el signo de $f(p_n)$ determina el intervalo en el paso siguiente. La columna de la extrema derecha es una cota superior del error cuando p_n se usa para aproximar la raíz c, debido a que se tiene

$$|p_n - c| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 1/2^n.$$

Se encontrará una aproximación p_n con un error menor que 10^{-2}.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{1}{2}(b_n - a_n)$
1	0	1	.5	−1.176	.5
2	.5	1	.75	− .412	.25
3	.75	1	.875	+ .099	.125
4	.75	.875	.8125	− .169	.0625
5	.8125	.875	.84375	− .0382	.03125
6	.84375	.875	.859375	+ .0296	.015625
7	.84375	.859375	.8515625	−	.0078125

El proceso se ha detenido en $n = 7$, obteniéndose $c \approx p_7 = 0.8515625$ con un error menor que 0.0078125. Éste es el primer paso en que el error es menor que 10^{-2}. Los valores de las cifras decimales de p_7 después de la segunda no pueden tomarse seriamente, pero puede concluirse que $0.843 < c < 0.860$. □

Teorema de Bolzano

El siguiente resultado es una generalización del teorema de localización de raíces. Éste asegura que una función continua en un intervalo asume (al menos una vez) cualquier número que esté entre dos de sus valores.

5.3.7 Teorema del valor intermedio de Bolzano *Sea* I *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $a, b \in I$ *y si* $k \in \mathbb{R}$ *satisface* $f(a) < k < f(b)$, *entonces existe un punto* $c \in I$ *entre* a *y* b *tal que* $f(c) = k$.

Demostración. Suponer que $a < b$ y sea $g(x) := f(x) - k$; entonces $g(a) < 0 < g(b)$. Por el teorema de localización de raíces 5.3.5, se tiene que existe un punto c con $a < c < b$ tal que $0 = g(c) = f(c) - k$. Por lo tanto, $f(c) = k$.

Si $b < a$, sea $h(x) := k - f(x)$ de tal modo que $h(b) < 0 < h(a)$. Por lo tanto, existe un punto c con $b < c < a$ tal que $0 = h(c) = k - f(c)$, de donde $f(c) = k$. Q.E.D.

5.3.8 Corolario *Sea* $I = [a, b]$ *un intervalo acotado cerrado y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $k \in \mathbb{R}$ *es cualquier número que satisface*

$$\inf f(I) \le k \le \sup f(I),$$

entonces existe un número $c \in I$ *tal que* $f(c) = k$.

Demostración. Del teorema del máximo-mínimo 5.3.4 se sigue que existen los puntos c_* y c^* en I tales que

$$\inf f(I) = f(c_*) \le k \le f(c^*) = \sup f(I).$$

La conclusión se sigue ahora del teorema de Bolzano 5.3.7. Q.E.D.

El siguiente teorema resume los principales resultados de esta sección. Establece que la imagen de un intervalo acotado cerrado bajo una función continua también es un intervalo acotado cerrado. Los puntos terminales del **intervalo de la imagen** son los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de la función, y la enunciación de que todos los valores entre el mínimo absoluto y el máximo absoluto pertenecen a la imagen es una forma de describir el teorema del valor intermedio de Bolzano.

5.3.9 Teorema *Sea* I *un intervalo acotado cerrado y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Entonces el conjunto* $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ *es un intervalo acotado cerrado.*

Demostración. Si se hace $m := \inf f(I)$ y $M := \sup f(I)$, entonces por el teorema del máximo-mínimo 5.3.4 se sabe que m y M pertenecen a $f(I)$. Además, se tiene $f(I) \subseteq [m, M]$. Si k es cualquier elemento de $[m, M]$, entonces del corolario precedente se sigue que existe un punto $c \in I$ tal que $k = f(c)$. En consecuencia, $k \in f(I)$ y se concluye que $[m, M] \subseteq f(I)$. Por lo tanto, $f(I)$ es el intervalo $[m, M]$.
Q.E.D.

Atención Si $I := [a, b]$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I, se ha demostrado que $f(I)$ es el intervalo $[m, M]$. *No* se ha demostrado (y no siempre se cumple) que $f(I)$ es el intervalo $[f(a), f(b)]$. (Véase la figura 5.3.3.)

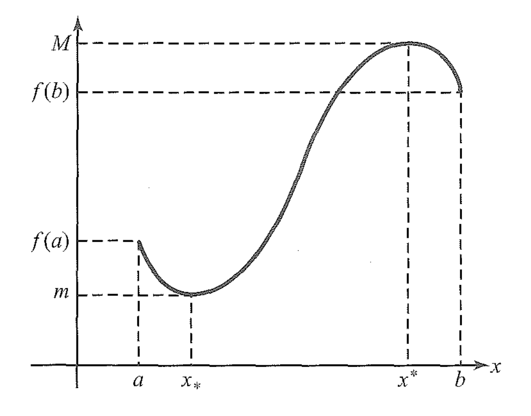


Figura 5.3.3 $f(I) = [m, M]$.

El resultado precedente es un teorema de "preservación" en el sentido de que establece que la imagen continua de un intervalo acotado cerrado es un conjunto del mismo tipo. El siguiente teorema amplía este resultado a intervalos generales. Sin embargo, cabe hacer notar que aun cuando se ha demostrado que la imagen continua de un intervalo es un intervalo, *no* se cumple que el intervalo de la imagen tiene necesariamente la *misma forma* que el intervalo del dominio. Por ejemplo, la imagen continua de un intervalo abierto no es necesariamente un intervalo abierto. De hecho, si $f(x) := 1/(x^2 + 1)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$ (véase el ejemplo 5.2.3b). Es sencillo ver que si $I_1 := (-1, 1)$, entonces $f(I_1) = (\frac{1}{2}, 1]$, que no es un intervalo abierto. Asimismo, si $I_2 := [0, \infty)$, entonces $f(I_2) = (0, 1]$, que no es un intervalo cerrado. (Véase la figura 5.3.4.)

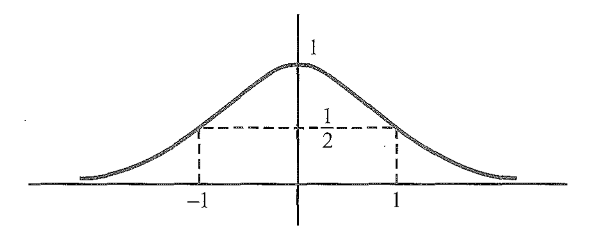


Figura 5.3.4 La gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Para demostrar el teorema de preservación de intervalos 5.3.10 se usa el teorema 2.5.1 de caracterización de intervalos.

5.3.10 Teorema de preservación de intervalos *Sea* I *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Entonces el conjunto* f(I) *es un intervalo.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in f(I)$ con $\alpha < \beta$; entonces existen los puntos $a, b \in I$ tales que $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Además, del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 se sigue que si $k \in (\alpha, \beta)$, entonces existe un número $c \in I$ con $k = f(c) \in f(I)$. Por lo tanto, $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$, con lo que se demuestra que $f(I)$ posee la propiedad (1) del teorema 2.5.1. Por lo tanto, $f(I)$ es un intervalo. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 5.3

1. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para toda x en I. Demostrar que existe un número $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para toda $x \in I$.

2. Sea $I := [a, b]$ y sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I. Demostrar que el conjunto $E := \{x \in I : f(x) = g(x)\}$ tiene la propiedad de que si $(x_n) \subseteq E$ y $x_n \to x_0$, entonces $x_0 \in E$.

3. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I tal que para toda x en I existe y en I tal que $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Demostrar que existe un punto c en I tal que $f(c) = 0$.

4. Demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

5. Demostrar que el polinomio $p(x) := x^4 + 7x^3 - 9$ tiene al menos dos raíces reales. Usar una calculadora para localizar estas raíces con dos cifras decimales de precisión.

6. Sea f continua en el intervalo $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ y tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto c en $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. [*Sugerencia:* considerar $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.] Concluir que existen, en cualquier momento, puntos antípodas en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

7. Demostrar que la ecuación $x = \cos x$ tiene una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$. Usar el método de bisección y una calculadora para encontrar una solución aproximada de esta ecuación, con un error menor que 10^{-3}.

8. Demostrar que la función $f(x) := 2 \ln x + \sqrt{x} - 2$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$. Usar el método de bisección y una calculadora para encontrar la raíz con un error menor que 10^{-2}.

9. a) La función $f(x) := (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$ tiene cinco raíces en el intervalo $[0, 7]$. Si se aplica el método de bisección en este intervalo, ¿cuál de las raíces se localiza?
   b) Contestar la misma pregunta para $g(x) := (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)$ en el intervalo $[0, 7]$.

10. Si se aplica el método de bisección en un intervalo de longitud 1 para encontrar p_n con un error $|p_n - c| < 10^{-5}$, determinar el valor mínimo de n que asegura esta precisión.

11. Sea $I := [a, b]$, sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua en I y suponer que $f(a) < 0, f(b) > 0$. Sea $W := \{x \in I : f(x) < 0\}$ y sea $w := \sup W$. Demostrar que $f(w) = 0$. (Este resultado proporciona una demostración alternativa del teorema 5.3.5.)

12. Sea $I := [0, \pi/2]$ y sea que $f: I \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := \sup\{x^2, \cos x\}$ para $x \in I$. Demostrar que existe un punto mínimo absoluto $x_0 \in I$ para f en I. Demostrar que x_0 es una solución de la ecuación $\cos x = x^2$.

13. Suponer que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y que $\lim_{x \to -\infty} f = 0$ y $\lim_{x \to \infty} f = 0$. Demostrar que f está acotada en $\mathbb{R}$ y que alcanza o un máximo o un mínimo en $\mathbb{R}$. Dar un ejemplo para demostrar que no necesariamente alcanza un máximo y un mínimo.

14. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_0) < \beta$, entonces existe una vecindad-δ U de x_0 tal que $f(x) < \beta$ para toda $x \in U$.

15. Examinar qué intervalos abiertos [o bien, cerrados] son mapeados por $f(x) := x^2$ para $x \in \mathbb{R}$ en intervalos abiertos [o bien, cerrados].

16. Examinar el mapeo de intervalos abiertos [o bien, cerrados] bajo las funciones $g(x) := 1/(x^2 + 1)$ y $h(x) := x^3$ para $x \in \mathbb{R}$.

17. Si $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y sólo tiene valores racionales [o bien, irracionales], ¿debe ser constante f? Demostrar la respuesta.

18. Sea $I := [a, b]$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función (no necesariamente continua) con la propiedad de que para toda $x \in I$, la función f está acotada en una vecindad $V_{\delta_x}(x)$ de x (en el sentido de la definición 4.2.1). Demostrar que f está acotada en I.

19. Sea $J := (a, b)$ y sea $g : J \to \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad de que para toda $x \in J$, la función g está acotada en una vecindad $V_{\delta_x}(x)$ de x. Demostrar con un ejemplo que g no necesariamente está acotada en J.

SECCIÓN 5.4 Continuidad uniforme

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. La definición 5.1.1 establece que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) f es continua en todo punto $u \in A$;

(ii) dadas $\varepsilon > 0$ y $u \in A$, existe $\delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que para toda x tal que $x \in A$ y $|x - u| < \delta(\varepsilon, u)$, entonces $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

El punto que quiere enfatizarse aquí es que δ depende, en general, *tanto* de $\varepsilon > 0$ *como* de $u \in A$. El hecho de que δ dependa de u es un reflejo del hecho de que la función f puede cambiar de valor rápidamente cerca de ciertos puntos y lentamente cerca de otros. [Por ejemplo, considerar $f(x) := \text{sen}(1/x)$ para $x > 0$; véase la figura 4.1.3.]

Ahora bien, con frecuencia sucede que la función f es tal que el número δ puede elegirse de tal modo que sea independiente del punto $u \in A$ y que dependa tan sólo de ε. Por ejemplo, si $f(x) := 2x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(x) - f(u)| = 2|x - u|,$$

y entonces puede elegirse $\delta(\varepsilon, u) := \varepsilon/2$ para toda $\varepsilon > 0$, $u \in \mathbb{R}$. (¿Por qué?)

Por otro lado, si $g(x) := 1/x$ para $x \in A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, entonces

$$g(x) - g(u) = \frac{u - x}{ux}. \qquad (1)$$

Si $u \in A$ está dada y si se toma

$$\delta(\varepsilon, u) := \text{ínf}\left\{\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\varepsilon\right\}, \qquad (2)$$

entonces si $|x - u| < \delta(\varepsilon, u)$, se tiene $|x - u| < \frac{1}{2}u$, de modo que $\frac{1}{2}u < x < \frac{3}{2}u$, de donde se sigue que $1/x < 2/u$. Por tanto, si $|x - u| < \frac{1}{2}u$, la igualdad (1) da como resultado la desigualdad

$$|g(x) - g(u)| \le (2/u^2)\,|x - u|. \qquad (3)$$

Por consiguiente, si $|x - u| < \delta(\varepsilon, u)$, entonces (2) y (3) implican que

$$|g(x) - g(u)| < (2/u^2)\left(\frac{1}{2}u^2\varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Se ha visto que la selección de $\delta(\varepsilon, u)$ con la fórmula (2) "funciona" en el sentido de que permite dar un valor de δ que asegure que $|g(x) - g(u)| < \varepsilon$ cuando $|x - u| < \delta$ y $x, u \in A$. Se observa que el valor de $\delta(\varepsilon, u)$ dado en (2) depende sin lugar a dudas del punto $u \in A$. Si desea considerarse *toda* $u \in A$, la fórmula (2) no lleva a un solo valor $\delta(\varepsilon) > 0$ que "funcione" al mismo tiempo para toda $u > 0$, ya que $\text{ínf}\{\delta(\varepsilon, u) : u > 0\} = 0$.

Un lector atento habrá observado que hay otras selecciones que pueden hacerse para δ. (Por ejemplo, también pudo haberse elegido $\delta_1(\varepsilon, u) := \text{ínf}\{\frac{1}{3}u, \frac{2}{3}u^2\varepsilon\}$,

como el lector demostrará; sin embargo, se sigue teniendo $\inf\{\delta_1(\varepsilon, u) : u > 0\} = 0$.) De hecho, no hay manera de elegir un valor de δ que "funcione" para toda $u > 0$ para la función $g(x) = 1/x$, como se verá.

La situación se ilustra gráficamente en las figuras 5.4.1 y 5.4.2 donde, para una vecindad-ε $V_\varepsilon(\frac{1}{2})$ alrededor de $\frac{1}{2} = f(2)$ y de $V_\varepsilon(2)$ alrededor de $2 = f(\frac{1}{2})$, se ve que los valores máximos correspondientes de δ son considerablemente diferentes. Cuando u tiende a 0, los valores permitidos de δ tienden a 0.

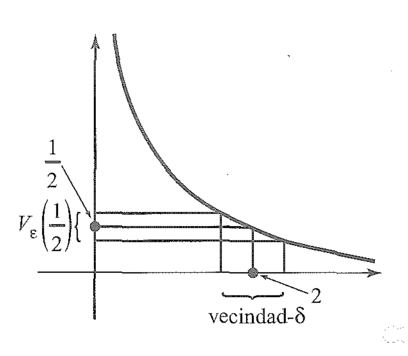


Figura 5.4.1 $g(x) = 1/x \quad (x > 0)$.

Figura 5.4.2 $g(x) = 1/x \quad (x > 0)$.

5.4.1 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **uniformemente continua** en A si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, u \in A$ son números cualesquiera que satisfacen $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Es claro que si f es uniformemente continua en A, entonces es continua en cualquier punto de A. En general, sin embargo, el recíproco no es verdadero, como lo muestra la función $g(x) = 1/x$ en el conjunto $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Resulta conveniente formular una condición equivalente a decir que f *no* es uniformemente continua en A. En el siguiente resultado se presentan estos criterios, dejándole la demostración al lector como ejercicio.

5.4.2 Criterios de continuidad no uniforme *Sea* A $\subseteq \mathbb{R}$ *y sea* f : A $\to \mathbb{R}$. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) f *no es uniformemente continua en* A.

(ii) *Existe una* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para toda* $\delta > 0$ *existen los puntos* x_δ, u_δ *en* A *tales que* $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ *y* $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

(iii) *Existe una* $\varepsilon_0 > 0$ *y dos sucesiones* (x_n) *y* (u_n) *en* A *tales que* $\lim(x_n - u_n) = 0$ *y* $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Este resultado puede aplicarse para demostrar que $g(x) := 1/x$ no es uniformemente continua en $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Si $x_n := 1/n$ y $u_n := 1/(n + 1)$, entonces se tiene $\lim(x_n - u_n) = 0$, pero $|g(x_n) - g(u_n)| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se presenta ahora un importante resultado que asegura que una función continua en un intervalo acotado cerrado I es uniformemente continua en I. En las secciones 5.5 y 11.3 se presentan otras demostraciones de este teorema.

5.4.3 Teorema de continuidad uniforme *Sea* I *un intervalo acotado cerrado y sea* f : I → ℝ *continua en* I. *Entonces* f *es uniformemente continua en* I.

Demostración. Si f no es uniformemente continua en I, entonces, por el resultado precedente, existen $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (u_n) en I tales que $|x_n - u_n| < 1/n$ y $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que I está acotado, la sucesión (x_n) está acotada; por el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8 existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a un elemento z. Puesto que I es un intervalo cerrado, el límite z pertenece a I, por el teorema 3.2.6. Es evidente que la subsucesión correspondiente (u_{n_k}) también converge a z, ya que

$$|u_{n_k} - z| \leq |u_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - z|.$$

Ahora bien, si f es continua en el punto z, entonces ambas sucesiones $(f(x_{n_k}))$ y $(f(u_{n_k}))$ deben converger a $f(z)$. Pero esto no es posible ya que

$$|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la hipótesis de que f no es uniformemente continua en el intervalo acotado cerrado I implica que f no es continua en algún punto $z \in I$. Por consiguiente, si f es continua en todo punto de I, entonces f es uniformemente continua en I. Q.E.D.

Funciones de Lipschitz

Si se da una función uniformemente continua en un conjunto que no es un intervalo acotado cerrado, entonces en ocasiones es difícil establecer su continuidad uniforme. Sin embargo, hay una condición que ocurre con frecuencia y que es suficiente para garantizar la continuidad uniforme.

5.4.4 Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Si existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u| \tag{4}$$

para toda $x, u \in A$, entonces se dice que f es una **función de Lipschitz** (o que satisface una **condición de Lipschitz**) en A.

La condición (4) de que una función $f : I \to \mathbb{R}$ en un intervalo I es una función de Lipschitz puede interpretarse geométricamente como sigue. Si la condición se escribe como

$$\left|\frac{f(x) - f(u)}{x - u}\right| \leq K, \qquad x, u \in I, x \neq u,$$

entonces la cantidad dentro de los valores absolutos es la pendiente del segmento de recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(u, f(u))$. Por tanto, una función f satisface una condición de Lipschitz si y sólo si las pendientes de todos los segmentos de recta que unen dos puntos en la gráfica de $y = f(x)$ en I están acotados por algún número K.

5.4.5 Teorema *Si* f : A → ℝ *es una función de Lipschitz, entonces* f *es uniformemente continua en* A.

Demostración. Si la condición (4) se satisface, entonces dada $\varepsilon > 0$ puede tomarse $\delta := \varepsilon/K$. Si $x, u \in A$ satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(u)| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en A. Q.E.D.

5.4.6 Ejemplos **a)** Si $f(x) := x^2$ en $A := [0, b]$, donde $b > 0$, entonces

$$|f(x) - f(u)| = |x + u|\,|x - u| \le 2b\,|x - u|$$

para toda x, u en $[0, b]$. En consecuencia, f satisface (4) con $K := 2b$ en A y, por lo tanto, f es uniformemente continua en A. Desde luego, como f es continua y A es un intervalo acotado cerrado, este resultado también puede deducirse del teorema de continuidad uniforme. (Adviértase que f *no* satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $[0, \infty)$.)

b) No toda función uniformemente continua es una función de Lipschitz.

Sea $g(x) := \sqrt{x}$ para x en el intervalo acotado cerrado $I := [0, 2]$. Puesto que g es continua en I, del teorema de continuidad uniforme 5.4.3 se sigue que g es uniformemente continua en I. Sin embargo, no hay ningún número $K > 0$ tal que $|g(x)| \le K|x|$ para toda $x \in I$. (¿Por qué no?) Por lo tanto, g no es una función de Lipschitz en I.

c) El teorema de continuidad uniforme y el teorema 5.4.5 pueden combinarse en ocasiones para establecer la continuidad uniforme de una función en un conjunto.

Se considera $g(x) := \sqrt{x}$ en el conjunto $A := [0, \infty)$. La continuidad uniforme de g en el intervalo $I := [0, 2]$ se sigue del teorema de continuidad uniforme, como se señaló en el inciso b). Si $J := [1, \infty)$, entonces si tanto x como u están en J, se tiene

$$|g(x) - g(u)| = |\sqrt{x} - \sqrt{u}| = \frac{|x - u|}{\sqrt{x} + \sqrt{u}} \le \frac{1}{2}|x - u|.$$

Por tanto, g es una función de Lipschitz en J con constante $K = \frac{1}{2}$ y, en consecuencia, por el teorema 5.4.5, g es uniformemente continua en $[1, \infty)$. Puesto que $A = I \cup J$, se sigue [tomando $\delta(\varepsilon) := \text{ínf}\{1, \delta_I(\varepsilon), \delta_J(\varepsilon)\}$] que g es uniformemente continua en A. Se le dejan los detalles al lector. □

El teorema de extensión continua

Se han visto ejemplos de funciones que son continuas pero no uniformemente continuas en intervalos abiertos; por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, por el teorema de continuidad uniforme, una función que es

continua en un intervalo acotado cerrado es siempre uniformemente continua. Entonces surge la pregunta: ¿bajo qué condiciones es uniformemente continua una función en un intervalo acotado *abierto*? La respuesta revela el alcance de la continuidad uniforme, pues se demostrará que una función en (a, b) es uniformemente continua si y sólo si puede definirse en los puntos terminales para producir una función que es continua en el intervalo cerrado. Se establece primero un resultado que es de interés por derecho propio.

5.4.7 Teorema *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua en un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *y si* (x_n) *es una sucesión de Cauchy en* A, *entonces* $(f(x_n))$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en A y sea $\varepsilon > 0$ dada. Primero se elige $\delta > 0$ tal que si x, u en A satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Puesto que (x_n) es una sucesión de Cauchy, existe $H(\delta)$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para toda $n, m > H(\delta)$. Por la elección de δ, esto implica que para $n, m > H(\delta)$ se tiene $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Por lo tanto, la sucesión $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy.

Q.E.D.

El resultado anterior proporciona una manera alternativa de ver que $f(x) := 1/x$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$. Se observa que la sucesión dada por $x_n := 1/n$ en $(0, 1)$ es una sucesión de Cauchy, pero la sucesión de la imagen, donde $f(x_n) = n$, no es una sucesión de Cauchy.

5.4.8 Teorema de extensión continua *Una función* f *es uniformemente continua en el intervalo* (a, b) *si y sólo si puede definirse en los puntos terminales* a *y* b *de tal modo que la función extendida sea continua en* $[a, b]$.

Demostración. $(\Leftarrow)$ Esta dirección es trivial.

$(\Rightarrow)$ Suponer que f es uniformemente continua en (a, b). Se indicará cómo extender f a a; el razonamiento para b es similar. Primero se procede demostrando que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ existe, lo cual se consigue usando el criterio de sucesiones para límites. Si (x_n) es una sucesión en (a, b) con $\lim (x_n) = a$, entonces es una sucesión de Cauchy y, por el teorema precedente, la sucesión $(f(x_n))$ también es una sucesión de Cauchy y, en consecuencia, es convergente por el teorema 3.5.5. Así, el límite $\lim(f(x_n)) = L$ existe. Si (u_n) es otra sucesión en (a, b) que converge a a, entonces $\lim(u_n - x_n) = a - a = 0$, por lo que, por la continuidad uniforme de f, se tiene

$$\begin{aligned} \lim(f(u_n)) &= \lim(f(u_n) - f(x_n)) + \lim(f(x_n)) \\ &= 0 + L = L. \end{aligned}$$

Puesto que se obtiene el mismo valor L para toda sucesión que converge a a, por el criterio de sucesiones para límites se infiere que f tiene límite L en a. Si se define $f(a) := L$, entonces f es continua en a. El mismo razonamiento se aplica a b, por lo que se concluye que f tiene una extensión continua al intervalo $[a, b]$. Q.E.D.

5.4.5 Teorema *Si* f : A → ℝ *es una función de Lipschitz, entonces* f *es uniformemente continua en* A.

Demostración. Si la condición (4) se satisface, entonces dada $\varepsilon > 0$ puede tomarse $\delta := \varepsilon/K$. Si $x, u \in A$ satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(u)| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en A. Q.E.D.

5.4.6 Ejemplos **a)** Si $f(x) := x^2$ en $A := [0, b]$, donde $b > 0$, entonces

$$|f(x) - f(u)| = |x + u|\,|x - u| \leq 2b\,|x - u|$$

para toda x, u en $[0, b]$. En consecuencia, f satisface (4) con $K := 2b$ en A y, por lo tanto, f es uniformemente continua en A. Desde luego, como f es continua y A es un intervalo acotado cerrado, este resultado también puede deducirse del teorema de continuidad uniforme. (Adviértase que f *no* satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $[0, \infty)$.)

b) No toda función uniformemente continua es una función de Lipschitz.

Sea $g(x) := \sqrt{x}$ para x en el intervalo acotado cerrado $I := [0, 2]$. Puesto que g es continua en I, del teorema de continuidad uniforme 5.4.3 se sigue que g es uniformemente continua en I. Sin embargo, no hay ningún número $K > 0$ tal que $|g(x)| \leq K|x|$ para toda $x \in I$. (¿Por qué no?) Por lo tanto, g no es una función de Lipschitz en I.

c) El teorema de continuidad uniforme y el teorema 5.4.5 pueden combinarse en ocasiones para establecer la continuidad uniforme de una función en un conjunto.

Se considera $g(x) := \sqrt{x}$ en el conjunto $A := [0, \infty)$. La continuidad uniforme de g en el intervalo $I := [0, 2]$ se sigue del teorema de continuidad uniforme, como se señaló en el inciso b). Si $J := [1, \infty)$, entonces si tanto x como u están en J, se tiene

$$|g(x) - g(u)| = |\sqrt{x} - \sqrt{u}| = \frac{|x - u|}{\sqrt{x} + \sqrt{u}} \leq \tfrac{1}{2}|x - u|.$$

Por tanto, g es una función de Lipschitz en J con constante $K = \frac{1}{2}$ y, en consecuencia, por el teorema 5.4.5, g es uniformemente continua en $[1, \infty)$. Puesto que $A = I \cup J$, se sigue [tomando $\delta(\varepsilon) := \inf\{1, \delta_I(\varepsilon), \delta_J(\varepsilon)\}$] que g es uniformemente continua en A. Se le dejan los detalles al lector. □

El teorema de extensión continua

Se han visto ejemplos de funciones que son continuas pero no uniformemente continuas en intervalos abiertos; por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, por el teorema de continuidad uniforme, una función que es

continua en un intervalo acotado cerrado es siempre uniformemente continua. Entonces surge la pregunta: ¿bajo qué condiciones es uniformemente continua una función en un intervalo acotado *abierto*? La respuesta revela el alcance de la continuidad uniforme, pues se demostrará que una función en (a, b) es uniformemente continua si y sólo si puede definirse en los puntos terminales para producir una función que es continua en el intervalo cerrado. Se establece primero un resultado que es de interés por derecho propio.

5.4.7 Teorema *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es uniformemente continua en un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$ *y si* (x_n) *es una sucesión de Cauchy en* A*, entonces* $(f(x_n))$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en A y sea $\varepsilon > 0$ dada. Primero se elige $\delta > 0$ tal que si x, u en A satisfacen $|x - u| < \delta$, entonces $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Puesto que (x_n) es una sucesión de Cauchy, existe $H(\delta)$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para toda $n, m > H(\delta)$. Por la elección de δ, esto implica que para $n, m > H(\delta)$ se tiene $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Por lo tanto, la sucesión $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy. Q.E.D.

El resultado anterior proporciona una manera alternativa de ver que $f(x) := 1/x$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$. Se observa que la sucesión dada por $x_n := 1/n$ en $(0, 1)$ es una sucesión de Cauchy, pero la sucesión de la imagen, donde $f(x_n) = n$, no es una sucesión de Cauchy.

5.4.8 Teorema de extensión continua *Una función* f *es uniformemente continua en el intervalo* (a, b) *si y sólo si puede definirse en los puntos terminales* a *y* b *de tal modo que la función extendida sea continua en* $[a, b]$.

Demostración. $(\Leftarrow)$ Esta dirección es trivial.

$(\Rightarrow)$ Suponer que f es uniformemente continua en (a, b). Se indicará cómo extender f a a; el razonamiento para b es similar. Primero se procede demostrando que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ existe, lo cual se consigue usando el criterio de sucesiones para límites. Si (x_n) es una sucesión en (a, b) con $\lim (x_n) = a$, entonces es una sucesión de Cauchy y, por el teorema precedente, la sucesión $(f(x_n))$ también es una sucesión de Cauchy y, en consecuencia, es convergente por el teorema 3.5.5. Así, el límite $\lim(f(x_n)) = L$ existe. Si (u_n) es otra sucesión en (a, b) que converge a a, entonces $\lim(u_n - x_n) = a - a = 0$, por lo que, por la continuidad uniforme de f, se tiene

$$\begin{aligned} \lim(f(u_n)) &= \lim(f(u_n) - f(x_n)) + \lim(f(x_n)) \\ &= 0 + L = L. \end{aligned}$$

Puesto que se obtiene el mismo valor L para toda sucesión que converge a a, por el criterio de sucesiones para límites se infiere que f tiene límite L en a. Si se define $f(a) := L$, entonces f es continua en a. El mismo razonamiento se aplica a b, por lo que se concluye que f tiene una extensión continua al intervalo $[a, b]$. Q.E.D.

Puesto que el límite de $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ en 0 no existe, del teorema de extensión continua se infiere que la función no es uniformemente continua en $(0, b]$ para ninguna $b > 0$. Por otra parte, ya que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$ existe, la función $g(x) := x \operatorname{sen}(1/x)$ es uniformemente continua en $(0, b]$ para toda $b > 0$.

Aproximación*

En muchas aplicaciones es importante poder aproximar funciones continuas mediante funciones de carácter elemental. Aun cuando hay una variedad de definiciones que pueden usarse para hacer más preciso el término "aproximar", una de las más naturales (así como una de las más importantes) consiste en requerir que, en todo punto del dominio dado, la función de aproximación no diferirá de la función dada en más del error preasignado.

5.4.9 Definición Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $s : I \to \mathbb{R}$. Entonces s se denomina **función escalonada** si sólo tiene un número finito de valores diferentes, con cada valor siendo asumido en uno o más intervalos en I.

Por ejemplo, la función $s : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$s(x) := \begin{cases} 0, & -2 \le x < -1, \\ 1, & -1 \le x \le 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 3, & \frac{1}{2} \le x < 1, \\ -2, & 1 \le x \le 3, \\ 2, & 3 < x \le 4, \end{cases}$$

es una función escalonada. (Véase la figura 5.4.3.)

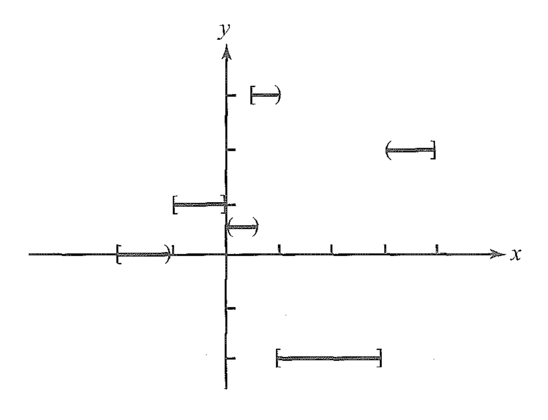


Figura 5.4.3 Gráfica de $y = s(x)$.

*El resto de esta sección puede omitirse en una primera lectura de este capítulo.

Se demuestra ahora que una función continua en un intervalo acotado cerrado I puede aproximarse arbitrariamente cerca por funciones escalonadas.

5.4.10 Teorema *Sea* I *un intervalo acotado cerrado y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $\varepsilon > 0$, *entonces existe una función escalonada* $s_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ *para toda* $x \in I$.

Demostración. Puesto que (por el teorema de continuidad uniforme 5.4.3) la función f es uniformemente continua, se sigue que dada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in I$ y $|x - y| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea $I := [a, b]$ y sea $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $h := (b - a)/m < \delta(\varepsilon)$. Se divide ahora $I = [a, b]$ en m intervalos disjuntos de longitud h; a saber, $I_1 := [a, a + h]$ e $I_k := (a + (k - 1)h, a + kh]$ para $k = 2, \cdots, m$. Puesto que la longitud de cada subintervalo I_k es $h < \delta(\varepsilon)$, la diferencia entre dos valores cualesquiera de f en I_k es menor que ε. Se define ahora

$$s_\varepsilon(x) := f(a + kh) \qquad \text{para} \qquad x \in I_k, \quad k = 1, \cdots, m, \tag{5}$$

de modo que s_ε es constante en cada intervalo I_k. (De hecho, el valor de s_ε en I_k es el valor de f en el punto terminal derecho de I_k. Véase la figura 5.4.4.) Por consiguiente, si $x \in I_k$, entonces

$$|f(x) - s_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(a + kh)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, se tiene $|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in I$. Q.E.D.

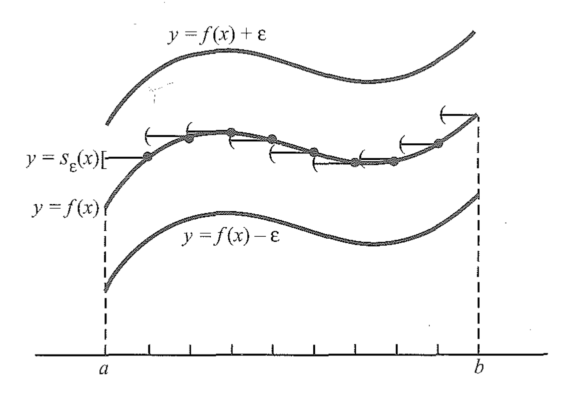


Figura 5.4.4 Aproximación por funciones escalonadas.

Adviértase que la demostración del teorema anterior establece algo más de lo que se anunció en la enunciación del teorema. De hecho, se ha demostrado la siguiente afirmación, que es más precisa.

5.4.11 Corolario *Sea* $I := [a, b]$ *un intervalo acotado cerrado y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $\varepsilon > 0$, *existe un número natural* m *tal que si se divide* I *en* m *intervalos disjuntos* I_k *de longitud* $h := (b - a)/m$, *entonces la función escalonada* s_ε *definida en la ecuación* (5) *satisface* $|f(x) - s_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ *para toda* $x \in I$.

Las funciones escalonadas son de carácter en extremo elemental, pero no son continuas (excepto en los casos triviales). Puesto que con frecuencia es deseable aproximar funciones continuas mediante funciones continuas elementales, se verá ahora que es posible aproximar funciones continuas mediante funciones lineales por partes que son continuas.

5.4.12 Definición Sea $I := [a, b]$ un intervalo. Entonces se dice que una función $g : I \to \mathbb{R}$ es **lineal por partes** en I si I es la unión de un número finito de intervalos disjuntos $I_1, \cdots, I_m$ tales que la restricción de g a cada intervalo I_k es una función lineal.

Observación Es evidente que para que una función lineal por partes g sea continua en I, los segmentos de recta que forman la gráfica de g deben coincidir en los puntos terminales de los subintervalos adyacentes I_k, I_{k+1} $(k = 1, \cdots, m - 1)$.

5.4.13 Teorema *Sea* I *un intervalo acotado cerrado y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* I. *Si* $\varepsilon > 0$, *entonces existe una función lineal por partes continua* $g_\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ *para toda* $x \in I$.

Demostración. Puesto que f es uniformemente continua en $I := [a, b]$, existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in I$ y $|x - y| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $h := (b - a)/m < \delta(\varepsilon)$. Se divide $I = [a, b]$ en m intervalos disjuntos de longitud h; a saber, sea $I_1 = [a, a + h]$ y sea $I_k = (a + (k - 1)h, a + kh]$ para $k = 2, \cdots, m$. En cada intervalo I_k se define g_ε como la función lineal que une los puntos

$$(a + (k - 1)h, f(a + (k - 1)h)) \qquad \text{y} \qquad (a + kh, f(a + kh)).$$

Entonces g_ε es una función lineal por partes continua en I. Puesto que para $x \in I_k$ el valor de $f(x)$ está dentro de ε unidades de $f(a + (k - 1)h)$ y $f(a + kh)$, es un ejercicio demostrar que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in I_k$; por lo tanto, esta desigualdad se cumple para toda $x \in I$. (Véase la figura 5.4.5.) Q.E.D.

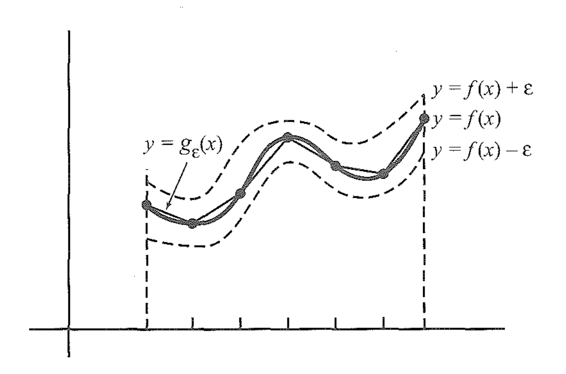


Figura 5.4.5 Aproximación por funciones lineales por partes.

Esta sección se cierra enunciando el importante teorema de Weierstrass referente a la aproximación de funciones continuas mediante funciones polinómicas. Como sería de esperarse, a fin de obtener una aproximación dentro de una $\varepsilon > 0$ preasignada arbitrariamente, es necesario estar preparados para usar polinomios de grado arbitrariamente alto.

5.4.14 Teorema de aproximación de Weierstrass *Sea* $I = [a, b]$ *y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función continua. Si* $\varepsilon > 0$ *está dada, entonces existe una función polinómica* p_ε *tal que* $|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ *para toda* $x \in I$.

Hay varias demostraciones de este resultado. Desafortunadamente, todas ellas son bastante intrincadas o emplean resultados con los que aún no se cuenta. Una de las demostraciones más elementales se basa en el siguiente teorema, debido a Serge Bernsteĭn, para funciones continuas en $[0, 1]$. Dada $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, Bernsteĭn definió la sucesión de polinomios:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{6}$$

La función polinómica B_n se llama el n-ésimo **polinomio de Bernsteĭn para** f; es un polinomio a lo sumo de grado n y sus coeficientes dependen de los valores de la función f en los $n + 1$ puntos separados por la misma distancia $0, 1/n, 2/n, \cdots, k/n, \cdots, 1$ y de los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

5.4.15 Teorema de aproximación de Bernsteĭn *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *continua y sea* $\varepsilon > 0$. *Existe una* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq n_\varepsilon$, *entonces se tiene* $|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon$ *para toda* $x \in [0, 1]$.

La demostración del teorema de aproximación de Bernsteĭn se presenta en [ERA, pp. 169-172].

El teorema de aproximación de Weierstrass 5.4.14 puede deducirse del teorema de aproximación de Bernsteĭn 5.4.15 mediante un cambio de variable. Específicamente, se reemplaza $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ por una función $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) := f(a + (b - a)t) \qquad \text{para} \qquad t \in [0, 1].$$

La función F puede aproximarse con polinomios de Bernsteĭn para F en el intervalo $[0, 1]$, los cuales producen entonces polinomios en $[a, b]$ que aproximan f.

Ejercicios de la sección 5.4

1. Demostrar que la función $f(x) := 1/x$ es uniformemente continua en el conjunto $A := [a, \infty)$, donde a es una constante positiva.

2. Demostrar que la función $f(x) := 1/x^2$ es uniformemente continua en $A := [1, \infty)$, pero que no es uniformemente continua en $B := (0, \infty)$.

3. Usar los criterios de continuidad no uniforme 5.4.2 para demostrar que las siguientes funciones no son uniformemente continuas en los conjuntos dados.

   a) $f(x) := x^2$, $A := [0, \infty)$.
   b) $g(x) := \text{sen}(1/x)$, $B := (0, \infty)$.

4. Demostrar que la función $f(x) := 1/(1 + x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

5. Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$, entonces $f + g$ es uniformemente continua en A.

6. Demostrar que si f y g son uniformemente continuas en $A \subseteq \mathbb{R}$ y si *ambas* están acotadas en A, entonces su producto fg es uniformemente continuo en A.

7. Si $f(x) := x$ y $g(x) := \text{sen}\, x$, demostrar que tanto f como g son uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, pero que su producto fg no es uniformemente continuo en $\mathbb{R}$.

8. Demostrar que si f y g son cada una de ellas uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

9. Si f es uniformemente continua en $A \subseteq \mathbb{R}$ y $|f(x)| \geq k > 0$ para toda $x \in A$, demostrar que $1/f$ es uniformemente continua en A.

10. Demostrar que si f es uniformemente continua en un subconjunto acotado A de $\mathbb{R}$, entonces f está acotada en A.

11. Si $g(x) := \sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$, demostrar que no existe una constante K tal que $|g(x)| \leq K|x|$ para toda $x \in [0, 1]$. Concluir que la función uniformemente continua g no es una función de Lipschitz en $[0, 1]$.

12. Demostrar que si f es continua en $[0, \infty)$ y uniformemente continua en $[a, \infty)$ para alguna constante positiva a, entonces f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

13. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y suponer que $f: A \to \mathbb{R}$ tiene la siguiente propiedad: para toda $\varepsilon > 0$ existe una función $g_\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ tal que g_ε es uniformemente continua en A y $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in A$. Demostrar que f es uniformemente continua en A.

14. Se dice que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **periódica** en $\mathbb{R}$ si existe un número $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que una función periódica continua en $\mathbb{R}$ está acotada y es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

15. Si $f_0(x) := 1$ para $x \in [0, 1]$, calcular algunos de los primeros polinomios de Bernstein para f_0. Demostrar que coinciden con f_0. [*Sugerencia:* el teorema del binomio establece que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.]$$

16. Si $f_1(x) := x$ para $x \in [0, 1]$, calcular algunos de los primeros polinomios de Bernsteĭn para f_1. Demostrar que coinciden con f_1.

17. Si $f_2(x) := x^2$ para $x \in [0, 1]$, calcular algunos de los primeros polinomios de Bernsteĭn para f_2. Demostrar que $B_n(x) = (1 - 1/n)x^2 + (1/n)x$.

SECCIÓN 5.5 Continuidad y medidas

Se introducen ahora algunos conceptos que se usarán más adelante –en especial en los capítulos 7 y 10 en la teoría de la integración–. Sin embargo, consideramos conveniente introducir ahora la noción de "medida" debido a su conexión con el estudio de las funciones continuas. Se define primero la noción de partición etiquetada de un intervalo.

5.5.1 Definición Una **partición** de un intervalo $I := [a, b]$ es una colección $\mathcal{P} = \{I_1, \cdots, I_n\}$ de intervalos cerrados no traslapados cuya unión es $[a, b]$. Por lo general los intervalos se denotan por $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, donde

$$a = x_0 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Los puntos x_i $(i = 0, \cdots, n)$ se denominan los **puntos de partición** de $\mathcal{P}$. Si se ha elegido un punto t_i de cada intervalo I_i, para $i = 1, \cdots, n$, entonces los puntos t_i se denominan las **etiquetas** y el conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} = \{(I_1, t_1), \cdots, (I_n, t_n)\}$$

se denomina una **partición etiquetada** de I. (El punto significa que la partición está etiquetada.)

La "finura" de una partición $\mathcal{P}$ se refiere a las longitudes de los subintervalos en $\mathcal{P}$. En lugar de requerir que todos los subintervalos tengan una longitud menor que alguna cantidad específica, con frecuencia resulta conveniente permitir grados variables de finura para diferentes subintervalos I_i en $\mathcal{P}$. Esto se consigue mediante el uso de una "medida", la cual se define a continuación.

5.5.2 Definición Una **medida** sobre I es una función estrictamente positiva definida en I. Si δ es una medida sobre I, entonces se dice que una partición (etiquetada) $\dot{\mathcal{P}}$ es **fina-δ** si

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Cabe señalar que la noción de finura-δ requiere que la partición esté etiquetada, por lo que no es necesario decir "partición etiquetada" en este caso.

Una medida δ sobre un intervalo I asigna un intervalo $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ a cada punto $t \in I$. La finura-δ de una partición $\dot{\mathcal{P}}$ requiere que cada subintervalo I_i de $\dot{\mathcal{P}}$

esté contenido en el intervalo determinado por la medida δ y la etiqueta t_i para ese subintervalo. Esto se indica por la inclusión en (1); véase la figura 5.5.1. Adviértase que la longitud de los subintervalos también está controlada por la medida y las etiquetas; el siguiente lema refleja dicho control.

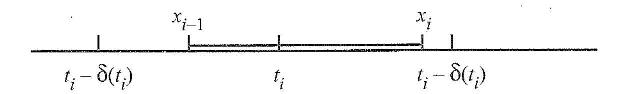


Figura 5.5.1 Inclusión (1).

5.5.3 Lema *Si una partición* $\dot{\mathcal{P}}$ *de* I := [a, b] *es fina*-δ *y* x ∈ I, *entonces existe una etiqueta* t_i *en* $\dot{\mathcal{P}}$ *tal que* $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

Demostración. Si $x \in I$, existe un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $\dot{\mathcal{P}}$ que contiene a x. Puesto que $\dot{\mathcal{P}}$ es fina-δ, entonces

$$t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-1} \leq x \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i), \tag{2}$$

de donde se sigue que $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$. Q.E.D.

En la teoría de la integración de Riemann se usarán medidas δ que son funciones constantes para controlar la finura de la partición; en la teoría de la integral de Riemann *generalizada,* el uso de medidas no constantes es esencial. Pero las funciones medida no constante surgen de manera muy natural en conexión con las funciones continuas. Para ver por qué, sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y sea $\varepsilon > 0$ que está dada. Entonces, para cada punto $t \in I$ existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que si $|x - t| < \delta_\varepsilon(t)$ y $x \in I$, entonces $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Puesto que δ_ε está definida y es estrictamente positiva en I, la función δ_ε es una medida sobre I. Más adelante en esta sección se usarán las relaciones entre medidas y continuidad para ofrecer demostraciones alternativas de las propiedades fundamentales de las funciones continuas discutidas en las secciones 5.3 y 5.4.

5.5.4 Ejemplos **a)** Si δ y γ son medidas sobre $I := [a, b]$ y si $0 < \delta(x) \leq \gamma(x)$ para toda $x \in I$, entonces toda partición $\dot{\mathcal{P}}$ que es fina-δ es también fina-γ. Esto se sigue de inmediato de las desigualdades

$$t_i - \gamma(t_i) \leq t_i - \delta(t_i) \qquad \text{y} \qquad t_i + \delta(t_i) \leq t_i + \gamma(t_i)$$

las cuales implican que

$$t_i \in [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subseteq [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)] \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots, n.$$

b) Si δ_1 y δ_2 son medidas sobre $I := [a, b]$ y si

$$\delta(x_i) := \text{mín}\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} \qquad \text{para toda} \qquad x \in I,$$

entonces δ también es una medida sobre I. Además, ya que $\delta(x) \leq \delta_1(x)$, entonces toda partición fina-δ es fina-δ_1. Del mismo modo, toda partición fina-δ es también fina-δ_2.

c) Suponer que δ está definida en $I := [0, 1]$ por

$$\delta(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces δ es una medida sobre $[0, 1]$. Si $0 < t \leq 1$, entonces $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = \left[\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t\right]$, que no contiene el punto 0. Por tanto, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición fina-δ de I, entonces el único subintervalo en $\dot{\mathcal{P}}$ que contiene a 0 debe tener el punto 0 como etiqueta.

d) Sea que γ esté definida en $I := [0, 1]$ por

$$\gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si} \quad x = 0 \text{ o } x = 1, \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1 - x) & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Entonces γ es una medida sobre I y queda como un ejercicio demostrar que los subintervalos en cualquier partición fina-γ que contiene los puntos 0 o 1 debe tener estos puntos como etiquetas. □

Existencia de particiones finas-δ

Con base en los ejemplos anteriores, no es obvio que una medida δ arbitraria admita una partición fina-δ. Se usa ahora la propiedad del supremo de $\mathbb{R}$ para establecer la existencia de particiones finas-δ. En los ejercicios se describe una demostración basada en el teorema de los intervalos anidados 2.5.2.

5.5.5 Teorema *Si* δ *es una medida definida en el intervalo* $[a, b]$, *entonces existe una partición fina-*δ *de* $[a, b]$.

Demostración. Sea que E denote el conjunto de todos los puntos $x \in [a, b]$ tales que existe una partición fina-δ del subintervalo $[a, x]$. El conjunto E es no vacío, ya que el par $([a, x], a)$ es una partición fina-δ del intervalo $[a, x]$ cuando $x \in [a, a + \delta(a)]$ y $x \leq b$. Puesto que $E \subseteq [a, b]$, el conjunto E también está acotado. Sea $u := \sup E$, por lo que $a < u \leq b$. Se demostrará que $u \in E$ y que $u = b$.

Se afirma que $u \in E$. Puesto que $u - \delta(u) < u = \sup E$, existe $v \in E$ tal que $u - \delta(u) < v < u$. Sea $\dot{\mathcal{P}}_1$ una partición fina-δ de $[a, v]$ y sea $\dot{\mathcal{P}}_2 := \dot{\mathcal{P}}_1 \cup ([v, u], u)$. Entonces $\dot{\mathcal{P}}_2$ es una partición fina-δ de $[a, u]$, por lo que $u \in E$.

Si $u < b$, sea $w \in [a, b]$ tal que $u < w < u + \delta(u)$. Si $\dot{Q}_1$ es una partición fina-δ de $[a, u]$, se hace $\dot{Q}_2 := \dot{Q}_1 \cup ([u, w], u)$. Entonces $\dot{Q}_2$ es una partición fina-δ de $[a, w]$, de donde $w \in E$. Pero esto contradice el supuesto de que u es una cota superior de E. Por lo tanto, $u = b$. Q.E.D.

Algunas aplicaciones

Siguiendo a R. A. Gordon (véase su artículo en *Monthly*), se muestra ahora que algunos de los principales teoremas de las dos secciones anteriores pueden demostrarse usando medidas.

Demostración alternativa del teorema 5.3.2: Teorema de acotabilidad. Puesto que f es continua en I, entonces para toda $t \in I$ existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - t| \le \delta(t)$, entonces $|f(x) - f(t)| \le 1$. Por tanto, δ es una medida sobre I. Sea $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición fina-δ de I y sea $K := \text{máx}\{|f(t_i)| : i = 1, \cdots, n\}$. Por el lema 5.5.3, dada cualquier $x \in I$ existe i con $|x - t_i| \le \delta(t_i)$, de donde

$$|f(x)| \le |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i)| \le 1 + K.$$

Puesto que $x \in I$ es arbitraria, entonces f está acotada por $1 + K$ en I. Q.E.D.

Demostración alternativa del teorema 5.3.4: Teorema del máximo-mínimo. Se demostrará la existencia de x^*. Sea $M := \sup\{f(x) : x \in I\}$ y suponer que $f(x) < M$ para toda $x \in I$. Puesto que f es continua en I, para toda $t \in I$ existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - t| \le \delta(t)$, entonces $f(x) < \frac{1}{2}(M + f(t))$. Por tanto, δ es una medida sobre I y si $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición fina-δ de I, se hace

$$\tilde{M} := \frac{1}{2}\text{máx}\{M + f(t_1), \cdots, M + f(t_n)\}.$$

Por el lema 5.5.3, dada cualquier $x \in I$, existe i con $|x - t_i| \le \delta(t_i)$, de donde

$$f(x) < \frac{1}{2}(M + f(t_i)) \le \tilde{M}.$$

Puesto que $x \in I$ es arbitraria, entonces $\tilde{M}$ $(< M)$ es una cota superior de f en I, lo cual contradice la definición de M como el supremo de f. Q.E.D.

Demostración alternativa del teorema 5.3.5: Teorema de localización de raíces. Se supone que $f(t) \neq 0$ para toda $t \in I$. Puesto que f es continua en t, el ejercicio 5.1.7 implica que existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - t| \le \delta(t)$, entonces $f(x) < 0$ si $f(t) < 0$, y $f(x) > 0$ si $f(t) > 0$. Entonces δ es una medida sobre I y se hace que $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ sea una partición fina-δ. Adviértase que para toda i, $f(x) < 0$ para toda $x \in [x_{i-1}, x_i]$ o bien $f(x) > 0$ para estas x. Puesto que $f(x_0) = f(a) < 0$, esto implica que $f(x_1) < 0$, lo cual a su vez implica que $f(x_2) < 0$. Al continuar de esta manera, se tiene $f(b) = f(x_n) < 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $f(b) > 0$. Q.E.D.

Demostración alternativa del teorema 5.4.3: Teorema de continuidad uniforme. Sea $\varepsilon > 0$ que está dada. Puesto que f es continua en $t \in I$, existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - t| \leq 2\delta(t)$, entonces $|f(x) - f(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Por tanto, δ es una medida sobre I. Si $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición fina-δ de I, sea $\delta_\varepsilon := \text{mín}\{\delta(t_1), \cdots, \delta(t_n)\}$. Se supone ahora que $x, u \in I$ y $|x - u| \leq \delta_\varepsilon$, y se elige i con $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$. Puesto que

$$|u - t_i| \leq |u - x| + |x - t_i| \leq \delta_\varepsilon + \delta(t_i) \leq 2\delta(t_i),$$

se sigue entonces que

$$|f(x) - f(u)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua en I. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 5.5

1. Sea δ la medida sobre $[0, 1]$ definida por $\delta(0) := \frac{1}{4}$ y $\delta(t) := \frac{1}{2}t$ para $t \in (0, 1]$.

   a) Demostrar que $\dot{\mathcal{P}}_1 := \{([0, \frac{1}{4}], 0), ([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \frac{1}{2}), ([\frac{1}{2}, 1], \frac{3}{4})\}$, es fina-$\delta$.

   b) Demostrar que $\dot{\mathcal{P}}_2 := \{([0, \frac{1}{4}], 0), ([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \frac{1}{2}), ([\frac{1}{2}, 1], \frac{3}{5})\}$, no es fina-$\delta$.

2. Suponer que δ_1 es la medida definida por $\delta_1(0) := \frac{1}{4}$, $\delta_1(t) = \frac{3}{4}t$ para $t \in (0, 1]$. ¿Las particiones dadas en el ejercicio 1 son finas-δ_1? Adviértase que $\delta(t) \leq \delta_1(t)$ para toda $t \in [0, 1]$.

3. Suponer que δ_2 es la medida definida por $\delta_2(0) := \frac{1}{10}$ y $\delta_2(t) := \frac{9}{10}t$ para $t \in (0, 1]$. ¿Las particiones dadas en el ejercicio 1 son finas-δ_2?

4. Sea γ la medida del ejemplo 5.5.4d.

   a) Si $t \in (0, \frac{1}{2}]$, demostrar que $[t - \gamma(t), t + \gamma(t)] = [\frac{1}{2}t, \frac{3}{2}t] \subseteq (0, \frac{3}{4}]$.

   b) Si $t \in (\frac{1}{2}, 1)$, demostrar que $[t - \gamma(t), t + \gamma(t)] \subseteq (\frac{1}{4}, 1)$.

5. Sea $a < c < b$ y sea δ una medida sobre $[a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}}'$ es una partición fina-δ de $[a, c]$ y si $\dot{\mathcal{P}}''$ es una partición fina-δ de $[c, b]$, demostrar que $\dot{\mathcal{P}}' \cup \dot{\mathcal{P}}''$ es una partición fina-δ de $[a, b]$ que tiene a c como punto de partición.

6. Sea $a < c < b$ y sean δ' y δ'' medidas sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente. Si δ está definida en $[a, b]$ por

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta'(t) & \text{si} \quad t \in [a, c), \\ \text{mín}\{\delta'(c), \delta''(c)\} & \text{si} \quad t = c, \\ \delta''(t) & \text{si} \quad t \in (c, b], \end{cases}$$

   entonces δ es una medida sobre $[a, b]$. Además, si $\dot{\mathcal{P}}'$ es una partición fina-δ' de $[a, c]$ y $\dot{\mathcal{P}}''$ es una partición fina-δ'' de $[c, b]$, entonces $\dot{\mathcal{P}}' \cup \dot{\mathcal{P}}''$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ que tiene a c como punto de partición. Explicar por qué $\dot{\mathcal{P}}' \cup \dot{\mathcal{P}}''$ no puede ser fina-δ. Dar un ejemplo.

7. Sean δ' y δ'' como en el ejercicio precedente y sea que δ^* esté definida por

$$\delta^*(t) := \begin{cases} \min\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-t)\} & \text{si} \quad t \in [a,c), \\ \min\{\delta'(c), \delta''(c)\} & \text{si} \quad t = c, \\ \min\{\delta''(t), \frac{1}{2}(t-c)\} & \text{si} \quad t \in (c,b]. \end{cases}$$

Demostrar que δ^* es una medida sobre $[a, b]$ y que toda partición fina-δ^* $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a, b]$ que tiene a c como punto de partición da lugar a una partición fina-δ' $\dot{\mathcal{P}}'$ de $[a, c]$ y a una partición fina-δ'' $\dot{\mathcal{P}}''$ de $[c, b]$ tales que $\dot{\mathcal{P}} = \dot{\mathcal{P}}' \cup \dot{\mathcal{P}}''$.

8. Sea δ una medida sobre $I := [a, b]$ y suponer que I *no* tiene una partición fina-δ.

   a) Sea $c := \frac{1}{2}(a + b)$. Demostrar que al menos uno de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ no tiene una partición fina-δ.
   b) Construir una sucesión anidada (I_n) de subintervalos con una longitud de I_n igual a $(b - a)/2^n$ tal que I_n no tenga una partición fina-δ.
   c) Sea $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $(b - a)/2^p < \delta(\xi)$. Demostrar que $I_p \subseteq [\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)]$, de donde el par (I_p, ξ) es una partición fina-δ de I_p.

9. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función (no necesariamente continua). Se dice que f está "acotada localmente" en $c \in I$ si existe $\delta(c) > 0$ tal que f está acotada en $I \cap [c - \delta(c), c + \delta(c)]$. Demostrar que si f está acotada localmente en todo punto de I, entonces f está acotada en I.

10. Sea $I := [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que f es "creciente localmente" en $c \in I$ si existe $\delta(c) > 0$ tal que f es creciente en $I \cap [c - \delta(c), c + \delta(c)]$. Demostrar que si f es creciente localmente en todo punto de I, entonces f es creciente en I.

SECCIÓN 5.6 Funciones monótonas e inversas

Recuérdese que si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente en** A si siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se dice que la función f es **estrictamente creciente en** A si siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Del mismo modo, se dice que una función $g : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente en** A si siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 \leq x_2$, entonces $g(x_1) \geq g(x_2)$. Se dice que la función es **estrictamente decreciente en** A si siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 < x_2$, entonces $g(x_1) > g(x_2)$.

Si una función es creciente, o bien, decreciente en A, se dice que es **monótona** en A. Si f es estrictamente creciente, o bien estrictamente decreciente, en A, se dice que es **estrictamente monótona** en A.

Cabe señalar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es creciente en A, entonces $g := -f$ es decreciente en A; del mismo modo, si $\varphi : A \to \mathbb{R}$ es decreciente en A, entonces $\psi := -\varphi$ es creciente en A.

En esta sección se tratan las funciones monótonas que están definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se examinan explícitamente las funciones crecientes, pero es

claro que existen los resultados correspondientes para las funciones decrecientes. Estos resultados pueden obtenerse directamente de los resultados para las funciones crecientes o bien demostrarse con razonamientos similares.

Las funciones monótonas no son necesariamente continuas. Por ejemplo, si $f(x) := 0$ para $x \in [0, 1]$ y si $f(x) := 1$ para $x \in (1, 2]$, entonces f es creciente en $[0, 2]$, pero deja de ser continua en $x = 1$. Sin embargo, el siguiente resultado establece que una función monótona siempre tiene límites por los dos lados (véase la definición 4.3.1) en $\mathbb{R}$ en todo punto que no sea un punto terminal de su dominio.

5.6.1 Teorema *Sea* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *creciente en* I. *Suponer que* $\mathrm{c} \in \mathrm{I}$ *no es un punto terminal de* I. *Entonces*

(i) $\lim\limits_{x \to c-} f = \sup\{\mathrm{f(x)} : \mathrm{x} \in \mathrm{I}, \mathrm{x} < \mathrm{c}\}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to c+} f = \inf\{\mathrm{f(x)} : \mathrm{x} \in \mathrm{I}, \mathrm{x} > \mathrm{c}\}$.

Demostración. (i) Se observa primero que si $x \in I$ y $x < c$, entonces $f(x) \leq f(c)$. En consecuencia, el conjunto $\{f(x) : x \in I, x < c\}$, que es no vacío ya que c no es un punto terminal de I, está acotado por arriba por $f(c)$. Por tanto, el supremo indicado existe; se le denota por L. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces $L - \varepsilon$ no es una cota superior de este conjunto. En consecuencia, existe $y_\varepsilon \in I$, $y_\varepsilon < c$ tal que $L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq L$.

Puesto que f es creciente, se deduce que si $\delta_\varepsilon := c - y_\varepsilon$ y si $0 < c - y < \delta_\varepsilon$, entonces $y_\varepsilon < y < c$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq f(y) \leq L.$$

Por lo tanto, $|f(y) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < c - y < \delta_\varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que (i) se cumple.

La demostración de (ii) es similar. Q.E.D.

El siguiente resultado presenta los criterios para la continuidad de una función creciente f en un punto c que no es un punto terminal del intervalo en el que está definida f.

5.6.2 Corolario *Sea* $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $\mathrm{f} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *creciente en* I. *Suponer que* $\mathrm{c} \in \mathrm{I}$ *no es un punto terminal de* I. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

a) f *es continua en* c.

b) $\lim\limits_{x \to c-} \mathrm{f} = \mathrm{f(c)} = \lim\limits_{x \to c+} \mathrm{f}$.

c) $\sup\{\mathrm{f(x)} : \mathrm{x} \in \mathrm{I}, \mathrm{x} < \mathrm{c}\} = \mathrm{f(c)} = \inf\{\mathrm{f(x)} : \mathrm{x} \in \mathrm{I}, \mathrm{x} > \mathrm{c}\}$.

Estos resultados se siguen con facilidad de los teoremas 5.6.1 y 4.3.3. Se le dejan los detalles al lector.

Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente. Si a es el punto terminal izquierdo de I, se deja como ejercicio demostrar que f es continua en a si y sólo si

$$f(a) = \text{ínf}\{f(x) : x \in I,\, a < x\}$$

o si y sólo si $f(a) = \lim\limits_{x \to a+} f$. Condiciones similares se aplican a un punto terminal derecho, así como para funciones decrecientes.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es creciente en I y si c no es un punto terminal de I, se define el **salto de f en c** como $j_f(c) := \lim\limits_{x \to c+} f - \lim\limits_{x \to c-} f$. (Véase la figura 5.6.1.) Del teorema 5.5.1 se sigue que

$$j_f(c) := \text{ínf}\{f(x) : x \in I, x > c\} - \sup\{f(x) : x \in I, x < c\}$$

para una función creciente. Si el punto terminal izquierdo a de I pertenece a I, se define el **salto de f en a** como $j_f(a) := \lim\limits_{x \to a+} f - f(a)$. Si el punto terminal derecho b de I pertenece a I, se define el **salto de f en b** como $j_f(b) := f(b) - \lim\limits_{x \to b-} f$.

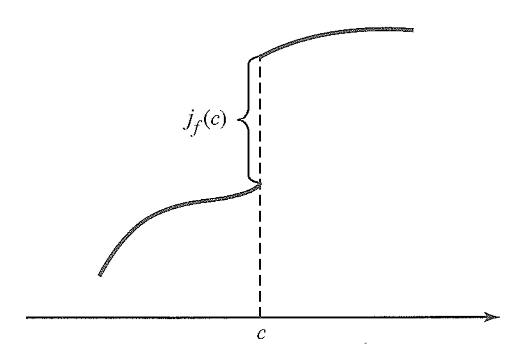


Figura 5.6.1 El salto de f en c.

5.6.3 Teorema *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *creciente en* I. *Si* $c \in I$, *entonces* f *es continua en* c *si y sólo si* $j_f(c) = 0$.

Demostración. Si c no es un punto terminal, del corolario 5.6.2 se sigue de inmediato la conclusión. Si $c \in I$ es el punto terminal izquierdo de I, entonces f es continua en c si y sólo si $f(c) = \lim\limits_{x \to c+} f$, que es equivalente a $j_f(c) = 0$. Observaciones similares se aplican al caso del punto terminal derecho. Q.E.D.

Se demuestra ahora que puede haber a lo sumo un conjunto contable de puntos en los que una función monótona es discontinua.

5.6.4 Teorema *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *monótona en* I. *Entonces el conjunto de puntos* $D \subseteq I$ *en los que* f *es discontinua es un conjunto contable.*

Demostración. Se supone que f es creciente en I. Por el teorema 5.6.3 se sigue que $D = \{x \in I : j_f(x) \neq 0\}$. Se considerará el caso en que $I := [a, b]$ es un intervalo acotado cerrado, dejándole al lector el caso de un intervalo arbitrario.

Se observa primero que como f es creciente, entonces $j_f(c) \geq 0$ para toda $c \in I$. Además, si $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$, entonces (¿por qué?) se tiene

$$f(a) \leq f(a) + j_f(x_1) + \cdots + j_f(x_n) \leq f(b), \tag{1}$$

de donde se sigue que

$$j_f(x_1) + \cdots + j_f(x_n) \leq f(b) - f(a).$$

(Véase la figura 5.6.2.) Por consiguiente, puede haber a lo sumo k puntos en $I = [a, b]$ donde $j_f(x) \geq (f(b) - f(a))/k$. Se concluye que hay a lo sumo un solo punto $x \in I$ donde $j_f(x) = f(b) - f(a)$; hay a lo sumo dos puntos en I donde $j_f(x) \geq (f(b) - f(a))/2$; hay a lo sumo tres puntos en I donde $j_f(x) \geq (f(b) - f(a))/3$, y así sucesivamente. Por lo tanto, hay a lo sumo un conjunto contable de puntos x donde $j_f(x) > 0$. Pero como todo punto en D debe estar incluido en este conjunto, se deduce que D es un conjunto contable. Q.E.D.

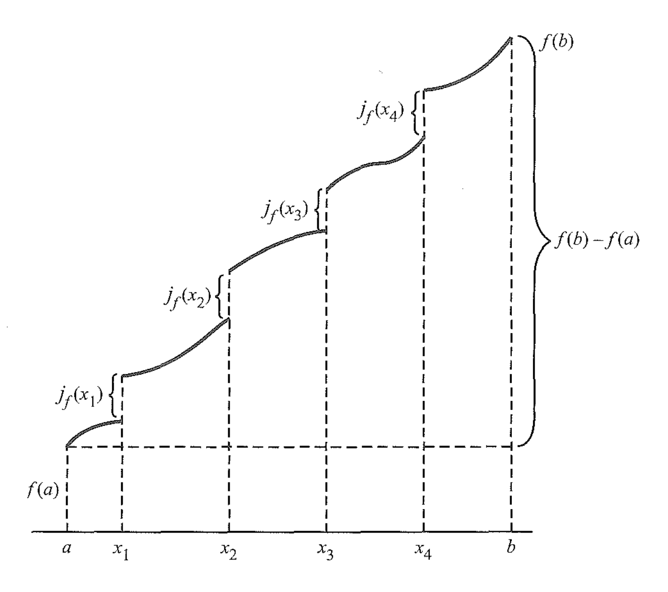


Figura 5.6.2 $j_f(x_1) + \cdots + j_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$.

El teorema 5.6.4 tiene algunas aplicaciones útiles. Por ejemplo, en el ejercicio 5.2.12 se vio que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la identidad

$$h(x + y) = h(x) + h(y) \qquad \text{para toda} \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

y si h es continua en un punto particular x_0, entonces h es continua en *todo* punto de $\mathbb{R}$. Por tanto, si h es una función monótona que satisface (2), entonces h debe ser continua en $\mathbb{R}$. [De este hecho se sigue que $h(x) = Cx$ para toda $x \in \mathbb{R}$, donde $C := h(1)$.]

Funciones inversas

Se considera ahora la existencia de la inversa de una función que es continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se recuerda (véase la sección 1.1) que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene una función inversa si y sólo si f es inyectiva (= uno a uno); es decir, si $x, y \in I$ y $x \neq y$ implica que $f(x) \neq f(y)$. Se observa que una función estrictamente monótona es inyectiva y en consecuencia tiene una inversa. En el siguiente teorema se establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función *continua* estrictamente monótona, entonces f tiene una función inversa g en $J := f(I)$ que es estrictamente monótona y continua en J. En particular, si f es estrictamente creciente, entonces también lo es g, y si f es estrictamente decreciente, entonces también lo es g.

5.6.5 Teorema de la inversa continua *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *estrictamente monótona y continua en* I. *Entonces la función* g *inversa de* f *es estrictamente monótona y continua en* $J := f(I)$.

Demostración. Se considera el caso en que f es estrictamente creciente, dejándole al lector el caso en que f es estrictamente decreciente.

Puesto que f es continua e I es un intervalo, del teorema de preservación de intervalos 5.3.10 se sigue que $J := f(I)$ es un intervalo. Además, como f es estrictamente creciente en I, es inyectiva en I; por lo tanto, la función $g : J \to \mathbb{R}$ inversa de f existe. Se afirma que g es estrictamente creciente. De hecho, si $y_1, y_2 \in J$ con $y_1 < y_2$, entonces $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$ para alguna $x_1, x_2 \in I$. Debe tenerse $x_1 < x_2$; de lo contrario, $x_1 \geq x_2$, lo cual implica que $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, que contradice la hipótesis de que $y_1 < y_2$. Por lo tanto, se tiene $g(y_1) = x_1 < x_2 = g(y_2)$. Puesto que y_1 y y_2 son elementos arbitrarios de J con $y_1 < y_2$, se concluye que g es estrictamente creciente en J.

Falta demostrar que g es continua en J. Sin embargo, ésta es una consecuencia del hecho de que $g(J) = I$ es un intervalo. De hecho, si g es discontinua en un punto $c \in J$, entonces el salto de g en c es diferente de cero, de modo que $\lim_{y \to c-} g < \lim_{y \to c+} g$. Si se elige cualquier número $x \neq g(c)$ que satisfaga $\lim_{x \to c-} g < x < \lim_{x \to c+} g$, entonces x tiene la propiedad de que $x \neq g(y)$ para cualquier $y \in J$. (Véase la figura 5.6.3.) En consecuencia, $x \notin I$, lo cual contradice el hecho de que I es un intervalo. Por lo tanto, se concluye que g es continua en J. Q.E.D.

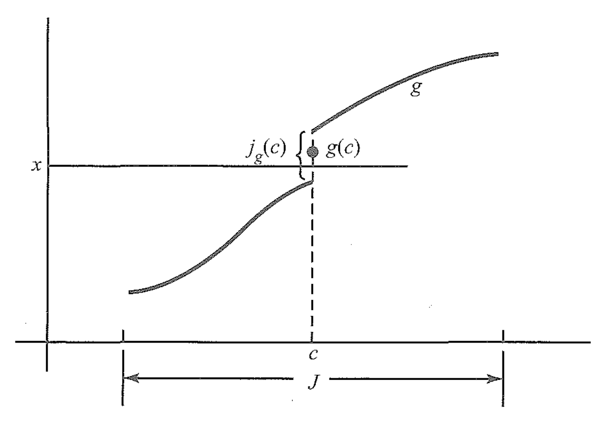


Figura 5.6.3. $g(y) \neq x$ para $y \in J$.

La función raíz n-ésima

Se aplicará el teorema de la inversa continua 5.6.5 a la función potencia n-ésima. Es necesario distinguir dos casos: (i) n par, y (ii) n impar.

(i) **n par.** A fin de obtener una función que sea estrictamente monótona, se restringe la atención al intervalo $I := [0, \infty)$. Por tanto, sea $f(x) := x^n$ para $x \in I$. (Véase la figura 5.6.4.) Se vio ya (en el ejercicio 2.1.23) que si $0 \le x < y$, entonces $f(x) = x^n < y^n = f(y)$; por lo tanto, f es estrictamente creciente en I. Además, del ejemplo 5.2.3a se sigue que f es continua en I. Por lo tanto, por el teorema de preservación de intervalos 5.3.10, $J := f(I)$ es un intervalo.

Se demostrará que $J = [0, \infty)$. Sea $y \ge 0$ arbitraria; por la propiedad de Arquímedes, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \le y < k$. Puesto que

$$f(0) = 0 \le y < k \le k^n = f(k),$$

del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 se sigue que $y \in J$. Puesto que $y \ge 0$ es arbitraria, se deduce que $J = [0, \infty)$.

Del teorema de la inversa continua 5.6.5 se concluye que la función g que es la inversa de $f(x) = x^n$ en $I = [0, \infty)$ es estrictamente creciente y continua en $J = [0, \infty)$. Suele escribirse

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{o} \quad g(x) = \sqrt[n]{x}$$

para $x \ge 0$ (n par) y llamar a $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ la **raíz n-ésima de** $x \ge 0$ (n par). A la función g se le llama la **función raíz n-ésima** (n par). (Véase la figura 5.6.5.)

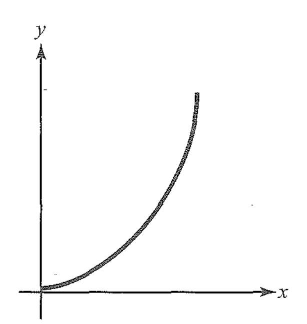


Figura 5.6.4 Gráfica de $f(x) = x^n$ ($x \ge 0$, n par).

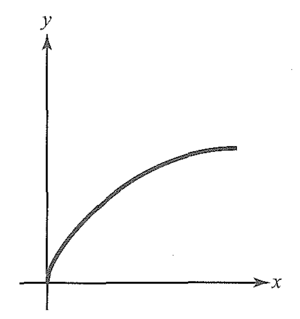


Figura 5.6.5 Gráfica de $g(x) = x^{1/n}$ ($x \ge 0$, n par).

Puesto que g es la inversa de f, se tiene

$$g(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(g(x)) = x \quad \text{para toda} \quad x \in [0, \infty).$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en la siguiente forma:

$$(x^n)^{1/n} = x \quad \text{y} \quad (x^{1/n})^n = x$$

para toda $x \in [0, \infty)$ y n par.

(ii) n **impar**. En este caso se hace $F(x) := x^n$ para toda $x \in \mathbb{R}$; por 5.2.3a, F es continua en $\mathbb{R}$. Se le deja al lector demostrar que F es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y que $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. (Véase la figura 5.6.6.)

Del teorema de la inversa continua 5.6.5 se sigue que la función G, que es la inversa de $F(x) = x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente y continua en $\mathbb{R}$. Se acostumbra escribir

$$G(x) = x^{1/n} \qquad \text{o} \qquad G(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},\ n \text{ impar},$$

y llamar a $x^{1/n}$ la **raíz n-ésima de** $x \in \mathbb{R}$. A la función G se le llama la **función raíz n-ésima** (n impar). (Véase la figura 5.6.7.) Se tiene aquí

$$(x^n)^{1/n} = x \qquad \text{y} \qquad (x^{1/n})^n = x$$

para toda $x \in \mathbb{R}$ y n impar.

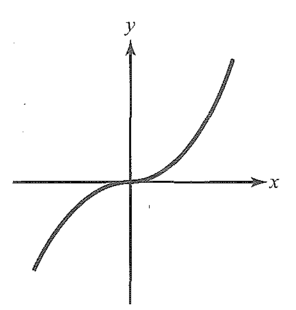


Figura 5.6.6 Gráfica de $F(x) = x^n$ ($x \in \mathbb{R}$, n impar).

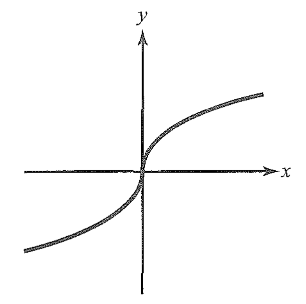


Figura 5.6.7 Gráfica de $G(x) = x^{1/n}$ ($x \in \mathbb{R}$, n impar).

Potencias racionales

Ahora que se han definido las funciones raíz n-ésima para $n \in \mathbb{N}$, es sencillo definir las potencias racionales.

5.6.6 Definición (i) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $x \geq 0$, se define $x^{m/n} := (x^{1/n})^m$.
(ii) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $x > 0$, se define $x^{-m/n} := (x^{1/n})^{-m}$.

Por consiguiente, se ha definido x^r cuando r es un número racional y $x > 0$. Las gráficas de $x \mapsto x^r$ dependen de si $r > 1$, $r = 1$, $0 < r < 1$, $r = 0$ o $r < 0$. (Véase la figura 5.6.8.) Puesto que un número racional $r \in \mathbb{Q}$ puede escribirse en la forma $r = m/n$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, de muchas maneras, es necesario demostrar que la definición 5.6.6 no es ambigua. Es decir, si $r = m/n = p/q$ con $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ y si $x > 0$, entonces $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$. Se deja como ejercicio para el lector establecer esta relación.

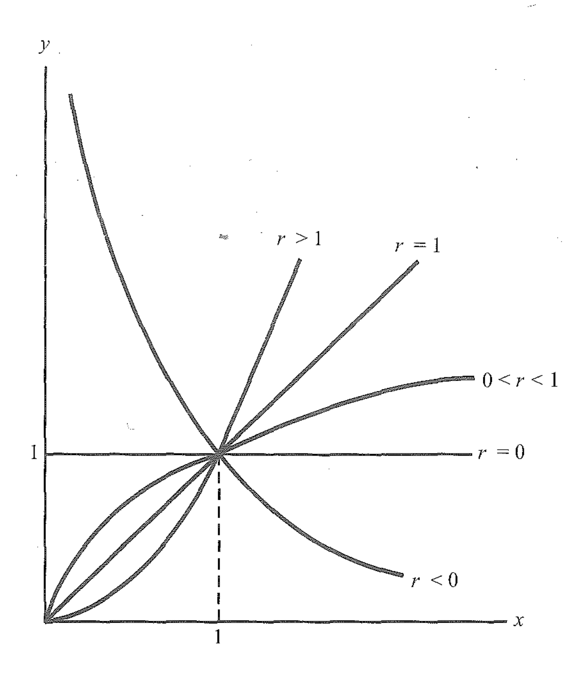


Figura 5.6.8. Gráfica de $x \to x^r$ $(x \geq 0)$.

5.6.7 Teorema *Si* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \geq 0$, *entonces* $x^{m/n} = (x^m)^{1/n}$.

Demostración. Si $x > 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$. Ahora bien, sea $y := x^{m/n} = (x^{1/n})^m > 0$ de modo que $y^n = ((x^{1/n})^m)^n = ((x^{1/n})^n)^m = x^m$. Por lo tanto, se sigue que $y = (x^m)^{1/n}$. Q.E.D.

El lector también deberá demostrar, en un ejercicio, que si $x > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$, entonces

$$x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r \qquad \text{y} \qquad (x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r.$$

Ejercicios de la sección 5.6

1. Si $I := [a, b]$ es un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ es una función creciente, entonces el punto a [o bien b] es un mínimo [o bien un máximo] absoluto para f en I. Si f es estrictamente creciente, entonces a es el único punto mínimo absoluto para f en I.

2. Si f y g son funciones crecientes en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que $f + g$ es una función creciente en I. Si f es estrictamente creciente en I, entonces $f + g$ es estrictamente creciente en I.

3. Demostrar que tanto $f(x) := x$ como $g(x) := x - 1$ son estrictamente crecientes en $I := [0, 1]$, pero que su producto fg no es creciente en I.

4. Demostrar que si f y g son funciones crecientes positivas en un intervalo I, entonces su producto fg es creciente en I.

5. Demostrar que si $I := [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ es creciente en I, entonces f es continua en a si y sólo si $f(a) = \text{ínf}\{f(x) : x \in (a, b]\}$.

6. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ creciente en I. Suponer que $c \in I$ no es un punto terminal de I. Demostrar que f es continua en c si y sólo si existe una sucesión (x_n) en I tal que $x_n < c$ para $n = 1, 3, 5, \cdots$; $x_n > c$ para $n = 2, 4, 6, \cdots$, y tal que $c = \text{lím}\,(x_n)$ y $f(c) = \text{lím}\,(f(x_n))$.

7. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ creciente en I. Si c no es un punto terminal de I, demostrar entonces que el salto $j_f(c)$ de f en c está dado por $\text{ínf}\{f(y) - f(x) : x < c < y,\ x, y \in I\}$.

8. Sean f, g crecientes en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f(x) > g(x)$ para toda $x \in I$. Si $y \in f(I) \cap g(I)$, demostrar que $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$. [*Sugerencia:* interpretar primero geométricamente este enunciado.]

9. Sea que $I := [0, 1]$ y sea que $f : I \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x$ para x racional y por $f(x) := 1 - x$ para x irracional. Demostrar que f es inyectiva en I y que $f(f(x)) = x$ para toda $x \in I$. (En consecuencia, ¡f es su propia función inversa!) Demostrar que f sólo es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$.

10. Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I. Si f tiene un máximo [o bien un mínimo] absoluto en un punto interior c de I, demostrar que f no es inyectiva en I.

11. Sea $f(x) := x$ para $x \in [0, 1]$ y $f(x) := 1 + x$ para $x \in (1, 2]$. Demostrar que f y f^{-1} son estrictamente crecientes. ¿Son f y f^{-1} continuas en todo punto?

12. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua que no asume dos veces ninguno de sus valores y con $f(0) < f(1)$. Demostrar que f es estrictamente creciente en $[0, 1]$.

13. Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función que asume exactamente dos veces cada uno de sus valores. Demostrar que h no puede ser continua en todo punto. [*Sugerencia:* si $c_1 < c_2$ son los puntos donde h alcanza su supremo, demostrar que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Examinar después los puntos donde h alcanza su ínfimo.]

14. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Demostrar que si $m, p \in \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}$ y $mq = np$, entonces $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$.

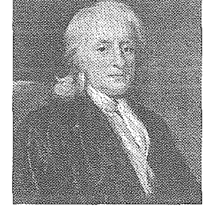
15. Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, y si $r, s \in \mathbb{Q}$, demostrar que $x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r$ y $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$.

Capítulo 6

DERIVACIÓN

Antes del siglo XVI, una curva se describía generalmente como un lugar geométrico de los puntos que satisfacían alguna condición geométrica y las rectas tangentes se obtenían por construcciones geométricas. Esta perspectiva cambió de manera radical con la creación de la geometría analítica en los años 1630 por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). En este nuevo escenario, los problemas se replanteaban en términos de expresiones algebraicas y las nuevas clases de curvas se definían no por condiciones geométricas sino algebraicas. El concepto de derivada evolucionó en este nuevo contexto. En los años 1630, Fermat fue el primero en vislumbrar una relación entre el problema de encontrar rectas tangentes y el problema aparentemente inconexo de encontrar valores máximos o mínimos. Y la relación entre las rectas tangentes a curvas y la velocidad de una partícula en movimiento fue descubierta por Isaac Newton a fines de los años 1660. La teoría de las "fluxiones" de Newton, la cual se basaba en una noción intuitiva de límite, llegaría a ser familiar para cualquier estudiante moderno de cálculo diferencial una vez que se hicieran algunos cambios en la terminología y notación. Pero la observación fundamental, hecha por Newton y, de manera independiente, por Gottfried Leibniz en los años 1680, fue que el área bajo una curva se podía calcular invirtiendo el proceso de derivación. Esta innovadora técnica, que resolvía con facilidad problemas de áreas antes complicados, despertó enorme interés entre los matemáticos de la época y desembocó en una teoría coherente que llegó a conocerse como cálculo diferencial e integral.

Isaac Newton



Isaac Newton (1642-1727) nació en Woolsthorpe, en Lincolnshire, Inglaterra, el día de Navidad; su padre, un agricultor, había muerto tres meses antes. La madre contrajo nuevas nupcias cuando Newton tenía tres años de edad y el niño fue enviado a vivir con la abuela. Regresó con su madre a los 11 años de edad, tan sólo para ser enviado a un internado en Grantham el año siguiente. Por fortuna, un maestro perceptivo reparó en su talento para las matemáticas y, en 1661, Newton ingresó al Trinity College en la Universidad de Cambridge, donde estudió bajo la tutela de Isaac Barrow.

Cuando se desató la plaga de peste bubónica de 1665-1666, la cual cobró la vida de casi 70 mil personas en Londres, la universidad cerró y Newton pasó dos años en Wools-

(*continúa*)

thorpe. Fue durante este periodo cuando formuló sus ideas básicas referentes a la óptica, la gravitación y su método de las "fluxiones", llamado más tarde "cálculo". Volvió a Cambridge en 1667 y fué nombrado Profesor Lucasiano en 1669. Sus teorías de la gravitación universal y del movimiento planetario fueron publicadas en 1687 para obtener el reconocimiento mundial bajo el título *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Sin embargo, omitió publicar su método de las tangentes inversas para encontrar áreas y otros trabajos de cálculo, lo cual llevó a una controversia sobre la prioridad con Leibniz.

Después de una enfermedad, se retiró de la Universidad de Cambridge y en 1696 fue nombrado Guardián de la Casa de Moneda británica. Sin embargo, se mantuvo en contacto con los avances de la ciencia y las matemáticas y fungió como presidente de la Real Sociedad de 1703 hasta su muerte en 1727. En su funeral, Newton fue encomiado como "el genio más grande que haya vivido jamás". Su tumba en la Abadía de Westminster es un popular sitio turístico.

En este capítulo se desarrolla la teoría de la derivación. La teoría de la integración, incluyendo el teorema fundamental que relaciona la derivación con la integración, será el tema del siguiente capítulo. Se supone que el lector se encuentra familiarizado con las interpretaciones geométricas y físicas de la derivada de una función según se describen en los cursos introductorios de cálculo. Por consiguiente, la exposición se concentra en los aspectos matemáticos de la derivada sin hacer mención a sus aplicaciones en geometría, física, economía, etcétera.

La primera sección se dedica a la presentación de los resultados básicos referentes a la derivación de funciones. En la sección 6.2 se examina el fundamental teorema del valor medio y algunas de sus aplicaciones. En la sección 6.3 se presentan las importantes reglas de L'Hôpital para el cálculo de ciertos tipos de límites "indeterminados".

En la sección 6.4 se ofrece una breve discusión del teorema de Taylor y algunas de sus aplicaciones —por ejemplo, en funciones convexas y en el método de Newton para la localización de raíces.

SECCIÓN 6.1 La derivada

En esta sección se presentan algunas de las propiedades elementales de la derivada. Se empieza con la definición de la derivada de una función.

6.1.1 Definición Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f: I \to \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Se dice que un número real L es la **derivada de** f **en** c si dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in I$ satisface $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

En este caso, se dice que f es **derivable** en c y se escribe $f'(c)$ en lugar de L.

En otras palabras, la derivada de f en c está dada por el límite

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{2}$$

siempre que el límite exista. (Se deja abierta la posibilidad de que c sea el punto terminal del intervalo.)

Nota Es posible definir la derivada de una función que tiene un dominio más general que un intervalo (ya que sólo es necesario que el punto c sea un elemento del dominio a la vez que un punto de acumulación del dominio), pero el significado del concepto se pone de manifiesto de manera más natural para funciones definidas en intervalos. En consecuencia, se restringe la atención aquí a tales funciones.

Siempre que la derivada de $f : I \to \mathbb{R}$ exista en un punto $c \in I$, su valor se denota por $f'(c)$. De esta forma, se obtiene una función f' cuyo dominio es un subconjunto del dominio de f. Al trabajar con la función f', es conveniente considerarla también como una función de x. Por ejemplo, si $f(x) := x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces en cualquier punto c en $\mathbb{R}$ se tiene

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} (x + c) = 2c.$$

Así, en este caso la función f' está definida en la totalidad de $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Se demuestra a continuación que la continuidad de f en un punto c es una condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de la derivada en c.

6.1.2 Teorema *Si* f : I $\to \mathbb{R}$ *tiene derivada en* c $\in$ I, *entonces* f *es continua en* c.

Demostración. Para toda $x \in I$, $x \neq c$, se tiene

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)(x - c).$$

Puesto que $f'(c)$ existe, puede aplicarse el teorema 4.2.4 relativo al límite del producto para concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \left(\lim_{x \to c} (x - c) \right) \\ &= f'(c) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, por lo que f es continua en c. Q.E.D.

La continuidad de $f: I \to \mathbb{R}$ en un punto no asegura la existencia de la derivada en ese punto. Por ejemplo, si $f(x) := |x|$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces para $x \neq 0$ se tiene $(f(x) - f(0))/(x - 0) = |x|/x$, que es igual a 1 si $x > 0$ y es igual a -1 si $x < 0$. Por tanto, el límite en 0 no existe (véase el ejemplo 4.1.10b) y por lo tanto la función no es derivable en 0. En consecuencia, la continuidad en un punto c *no* es una condición suficiente para que la derivada exista en c.

Observación Al tomar combinaciones algebraicas simples de funciones de la forma $x \mapsto |x - c|$, no es muy difícil construir funciones continuas que no tienen derivada en un número finito (o inclusive contable) de puntos. En 1872, Karl Weierstrass sorprendió al mundo matemático al ofrecer un ejemplo de una función que es *continua en todo punto pero cuya derivada no existe en ninguno de ellos.* Tal función desafiaba la intuición geométrica acerca de las curvas y las rectas tangentes, y en consecuencia estimuló investigaciones mucho más a fondo de los conceptos del análisis real. Puede demostrarse que la función f definida por la serie

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x)$$

posee la propiedad citada. Una discusión histórica muy interesante acerca de este ejemplo y de otros de funciones continuas no derivables se presenta en Kline, pp. 955-966, así como en Hawkins, pp. 44-46. En el apéndice E se incluye una demostración detallada de un ejemplo ligeramente diferente.

Hay varias propiedades básicas de la derivada que son de gran utilidad en el cálculo de las derivadas de diferentes combinaciones de funciones. Se proporciona a continuación la justificación de algunas de estas propiedades, las cuales le serán familiares al lector por cursos previos.

6.1.3 Teorema *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo, sea* $c \in I$ *y sean* $f : I \to \mathbb{R}$ *y* $g : I \to \mathbb{R}$ *funciones que son derivables en* c. *Entonces*

a) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces la función* αf *es derivable en* c, *y*

$$(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c). \tag{3}$$

b) *La función* $f + g$ *es derivable en* c *y*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c). \tag{4}$$

c) *(Regla del producto) La función* fg *es derivable en* c, *y*

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c). \tag{5}$$

d) *(Regla del cociente) Si* $g(c) \neq 0$, *entonces la función* f/g *es derivable en* c, *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}. \tag{6}$$

Demostración. Se demuestran los incisos c) y d), y se dejan los incisos a) y b) como ejercicios para el lector.

c) Sea $p := fg$; entonces para $x \in I$, $x \neq c$, se tiene

$$\frac{p(x)-p(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot g(x)+f(c) \cdot \frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

Puesto que g es continua en c, por el teorema 6.1.2, entonces $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$. Puesto que f y g son derivables en c, del teorema 4.2.4 sobre las propiedades de los límites se infiere que

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)-p(c)}{x-c} = f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

Por tanto, $p := fg$ es derivable en c y se cumple la expresión (5).

d) Sea $q := f/g$. Puesto que g es derivable en c, es continua en ese punto (por el teorema 6.1.2). Por lo tanto, ya que $g(c) \neq 0$, por el teorema 4.2.9 se sabe que existe un intervalo $J \subseteq I$ con $c \in J$ tal que $g(x) \neq 0$ para toda $x \in J$. Para $x \in J$, $x \neq c$, se tiene

$$\frac{q(x)-q(c)}{x-c} = \frac{f(x)/g(x) - f(c)/g(c)}{x-c} = \frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$= \frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(c)}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot g(c)-f(c) \cdot \frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right].$$

Haciendo uso de la continuidad de g en c y de la derivabilidad de f y g en c, se obtiene

$$q'(c) = \lim_{x\to c} \frac{q(x)-q(c)}{x-c} = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

Por tanto, $q = f/g$ es derivable en c y se cumple la ecuación (6). Q.E.D.

Puede usarse la inducción matemática para obtener las siguientes ampliaciones de las reglas de derivación.

6.1.4 Corolario *Si* $f_1, f_2, \cdots, f_n$ *son funciones en un intervalo de* I *a* $\mathbb{R}$ *que son derivables en* $c \in$ I, *entonces:*

a) *La función* $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ *es derivable en* c *y*

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(c) = f_1'(c) + f_2'(c) + \cdots + f_n'(c). \qquad (7)$$

b) *La función* $f_1 f_2 \cdots f_n$ *es derivable en* c *y*

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(c) = f_1'(c) f_2(c) \cdots f_n(c) + f_1(c) f_2'(c) \cdots f_n(c) + \cdots + f_1(c) f_2(c) \cdots f_n'(c). \tag{8}$$

Un importante caso especial de la regla del producto ampliada (8) ocurre si las funciones son iguales, es decir, si $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$. Entonces (8) queda como

$$(f^n)'(c) = n(f(c))^{n-1} f'(c) \tag{9}$$

En lo particular, si se toma $f(x) := x$, entonces se encuentra que la derivada de $g(x) := x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. La fórmula se generaliza para incluir enteros negativos aplicando la regla del cociente 6.1.3d.

Notación Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$, se ha introducido la notación f' para denotar la función cuyo dominio es un subconjunto de I y cuyo valor en un punto c es la derivada $f'(c)$ de f en c. Hay otras notaciones que se usan en ocasiones para f'; por ejemplo, a veces se escribe Df en vez de f'. Así, las fórmulas (4) y (5) pueden escribirse en la forma:

$$D(f+g) = Df + Dg, \qquad D(fg) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg).$$

Cuando x es la "variable independiente", en los cursos elementales es común escribir df/dx en vez de f'. Así, la fórmula (5) en ocasiones se escribe en la forma

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{df}{dx}(x)\right) g(x) + f(x)\left(\frac{dg}{dx}(x)\right).$$

Esta última notación, debida a Leibniz, tiene ciertas ventajas. Sin embargo, también presenta ciertas desventajas y debe usarse con cierto cuidado.

La regla de la cadena

Se pasa ahora al teorema sobre la derivación de funciones compuestas conocido como la "regla de la cadena". Proporciona una fórmula para encontrar la derivada de una función compuesta $g \circ f$ en términos de las derivadas de g y f.

Se establece primero el siguiente teorema referente a la derivada de una función en un punto que aporta un método muy interesante para demostrar la regla de la cadena. También se usa en la deducción de la fórmula para derivar funciones inversas.

6.1.5 Teorema de Carathéodory *Sea que* f *esté definida en un intervalo* I *que contiene el punto* c. *Entonces* f *es derivable en* c *si y sólo si existe una función* φ *en* I *que es continua en* c *y satisface*

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \qquad \textit{para} \quad x \in I. \tag{10}$$

En este caso, se tiene $\varphi(c) = f'(c)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f'(c)$ existe, φ puede definirse por

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{para } x \neq c,\ x \in I, \\ f'(c) & \text{para } x = c. \end{cases}$$

La continuidad φ se sigue del hecho de que $\lim_{x \to c} \varphi(x) = f'(c)$. Si $x = c$, entonces ambos miembros de (10) son iguales a 0, mientras que si $x \neq c$, entonces la multiplicación de $\varphi(x)$ por $x - c$ da como resultado (10) para cualquier otro valor de $x \in I$.

($\Leftarrow$) Ahora se supone que existe una función φ que es continua en c y que satisface (10). Si se divide (10) entre $x - c \neq 0$, entonces la continuidad de φ implica que

$$\varphi(c) = \lim_{x \to c} \varphi(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

existe. Por lo tanto, f es derivable en c y $f'(c) = \varphi(c)$. Q.E.D.

Para ilustrar el teorema de Carathéodory, se considera la función f definida por $f(x) := x^3$ para $x \in \mathbb{R}$. Para $c \in \mathbb{R}$, a partir de la factorización

$$x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x - c)$$

se observa que $\varphi(x) := x^2 + cx + c^2$ satisface las condiciones del teorema. Por lo tanto, se concluye que f es derivable en $c \in \mathbb{R}$ y que $f'(c) = \varphi(c) = 3c^2$.

Se establece ahora la regla de la cadena. Si f es derivable en c y g es derivable en $f(c)$, entonces la regla de la cadena establece que la derivada de la función compuesta $g \circ f$ en c es el producto $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$. Adviértase que esta expresión puede escribirse

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Una forma de abordar la regla de la cadena consiste en la observación de que el cociente diferencial puede escribirse, cuando $f(x) \neq f(c)$, como el producto

$$\frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-c} = \frac{g(f(x))-g(f(c))}{f(x)-f(c)} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Esto sugiere el valor límite correcto. Desafortunadamente, el primer factor en el producto de la derecha no está definido si el denominador $f(x) - f(c)$ es igual a 0 para valores de x próximos a c, lo cual representa un problema. Sin embargo, el uso del teorema de Carathéodory salva elegantemente esta dificultad.

6.1.6 Regla de la cadena *Sean* I, J *intervalos en* $\mathbb{R}$, *sean* $g : I \to \mathbb{R}$ *y* $f : J \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* $f(J) \subseteq I$, *y sea* $c \in J$. *Si* f *es derivable en* c *y si* g *es derivable en* f (c), *entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es derivable en* c *y*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c). \tag{11}$$

Demostración. Puesto que $f'(c)$ existe, el teorema de Carathéodory 6.1.5 implica asimismo que existe una función φ en J tal que φ es continua en c y $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$ para $x \in J$, y donde $\varphi(c) = f'(c)$. Asimismo, ya que $g'(f(c))$ existe, hay una función ψ definida en I tal que ψ es continua en $d := f(c)$ y $g(y) - g(d) = \psi(y)(y - d)$ para $y \in I$, donde $\psi(d) = g'(d)$. La sustitución de $y = f(x)$ y $d = f(c)$ produce entonces

$$g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))\,(f(x) - f(c)) = [(\psi \circ f(x)) \cdot \varphi(x)]\,(x - c)$$

para toda $x \in J$ tal que $f(x) \in I$. Puesto que la función $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ es continua en c y su valor en c es $g'(f(c)) \cdot f'(c)$, el teorema de Carathéodory da como resultado (11). Q.E.D.

Si g es derivable en I, si f es derivable en J y si $f(J) \subseteq I$, entonces de la regla de la cadena se sigue que $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$, que también puede escribirse en la forma $D(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot Df$.

6.1.7 Ejemplos **a)** Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en I y $g(y) := y^n$ para $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces, ya que $g'(y) = ny^{n-1}$, de la regla de la cadena 6.1.6 se sigue que

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \text{para} \qquad x \in I.$$

Se tiene, por tanto, $(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1}f'(x)$ para toda $x \in I$, como se vio en (9).

b) Suponer que $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en I y que $f(x) \neq 0$ y $f'(x) \neq 0$ para $x \in I$. Si $h(y) := 1/y$ para $y \neq 0$, entonces es un ejercicio demostrar que $h'(y) = -1/y^2$ para $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. Se tiene, por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (h \circ f)'(x) = h'(f(x))\,f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \qquad \text{para } x \in I.$$

c) La función valor absoluto $g(x) := |x|$ es derivable en toda $x \neq 0$ y tiene derivada $g'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ para $x \neq 0$. (La función signo se define en el ejemplo 4.1.10b.) Aun cuando sgn está definida en todas partes, no es igual a g' en $x = 0$ ya que $g'(0)$ no existe.

Ahora bien, si f es una función derivable, entonces la regla de la cadena implica que la función $g \circ f = |f|$ también es derivable en todos los puntos x donde $f(x) \neq 0$ y su derivada está dada por

$$|f|'(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si} \quad f(x) > 0, \\ -f'(x) & \text{si} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Si f es derivable en un punto c con $f(c) = 0$, entonces es un ejercicio demostrar que $|f|$ es derivable en c si y sólo si $f'(c) = 0$. (Véase el ejercicio 7.)

Por ejemplo, si $f(x) := x^2 - 1$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces la derivada de su valor absoluto $|f|(x) = |x^2 - 1|$ es igual a $|f|'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot (2x)$ para $x \neq 1, -1$. Véase la figura 6.1.1 para una gráfica de $|f|$.

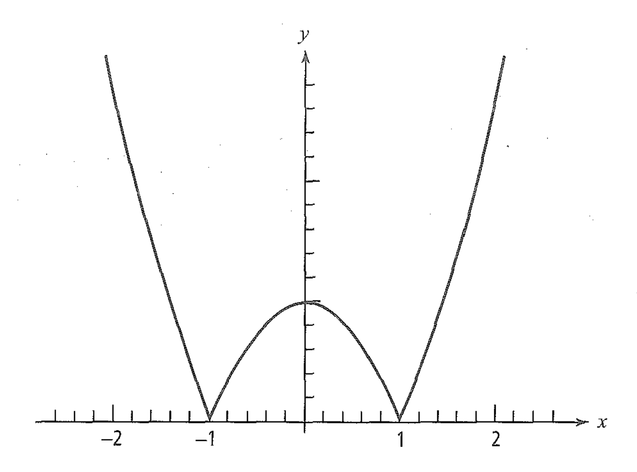


Figura 6.1.1 La función $|f|(x) = |x^2 - 1|$.

d) Más adelante se demuestra que si $S(x) := \operatorname{sen} x$ y $C(x) := \cos x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$S'(x) = \cos x = C(x) \qquad \text{y} \qquad C'(x) = -\operatorname{sen} x = -S(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Si se usan estos hechos junto con las definiciones

$$\tan x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \sec x := \frac{1}{\cos x},$$

para $x \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, y se aplica la regla del cociente 6.1.3d, se obtiene

$$D \tan x = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2,$$

$$D \sec x = \frac{0 - 1(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2} = (\sec x)(\tan x)$$

para $x \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Del mismo modo, ya que

$$\cot x := \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \csc x := \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se obtiene entonces

$$D \cot x = -(\csc x)^2 \qquad \text{y} \qquad D \csc x = -(\csc x)(\cot x)$$

para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) Suponer que f está definida por

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{para} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

Si se usa el hecho de que $D \operatorname{sen} x = \cos x$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y se aplica la regla del producto 6.1.3c y la regla de la cadena 6.1.6, se obtiene (¿por qué?)

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) \qquad \text{para} \qquad x \neq 0.$$

Si $x = 0$, ninguna de las reglas para calcular la derivada pueden aplicarse. (¿Por qué?) Por consiguiente, la derivada de f en $x = 0$ debe encontrarse aplicando la definición de derivada. Se encuentra que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

En consecuencia, la derivada f' de f existe en toda $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la función f' no tiene límite en $x = 0$ (¿por que) y, por tanto, f' es discontinua en $x = 0$. Por consiguiente, una función f que es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ no tiene necesariamente una derivada f' continua. □

Funciones inversas

Se relaciona ahora la derivada de una función con la derivada de su función inversa, cuando esta inversa existe. La atención se restringe a una función estrictamente monótona y se usa el teorema de la inversa continua 5.6.5 para asegurar la existencia de una función inversa continua.

Si f es una función monótona estrictamente continua en un intervalo I, entonces su función inversa $g = f^{-1}$ está definida en el intervalo $J := f(I)$ y satisface la relación

$$g(f(x)) = x \qquad \text{para} \qquad x \in I.$$

Si $c \in I$ y $d := f(c)$, y si se supiera que tanto $f'(c)$ como $g'(d)$ existen, entonces podrían derivarse ambos miembros de la ecuación y aplicar la regla de la cadena al primer miembro para obtener $g'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$. Por tanto, si $f'(c) \neq 0$, se obtendría

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Sin embargo, es necesario deducir la derivabilidad de la función inversa g a partir de la derivabilidad supuesta de f antes de que este cálculo pueda realizarse. Esto se consigue en forma muy adecuada usando el teorema de Carathéodory.

6.1.8 Teorema *Sea* I *un intervalo en* $\mathbb{R}$ *y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *estrictamente monótona y continua en* I. *Sea* $J := f(I)$ *y sea* $g : J \to \mathbb{R}$ *la función estrictamente monótona y*

continua inversa de f. *Si* f *es derivable en* c ∈ I *y* si f ′(c) ≠ 0, *entonces* g *es derivable en* d := f (c) *y*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}. \tag{12}$$

Demostración. Dada $c \in \mathbb{R}$, con el teorema de Carathéodory 6.1.5 se obtiene una función φ en I con las propiedades de que φ es continua en c, $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$ para $x \in I$ y $\varphi(c) = f'(c)$. Puesto que $\varphi(c) \neq 0$ por hipótesis, existe una vecindad $V := (c - \delta, c + \delta)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ para toda $x \in V \cap I$. (Véase el teorema 4.2.9.) Así, si $U := f(V \cap I)$, entonces la función inversa g satisface $f(g(y)) = y$ para toda $y \in U$, de modo que

$$y - d = f(g(y)) - f(c) = \varphi(g(y)) \cdot (g(y) - g(d)).$$

Puesto que $\varphi(g(y)) \neq 0$ para $y \in U$, puede hacerse la división para obtener

$$g(y) - g(d) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (y - d).$$

Como la función $1/(\varphi \circ g)$ es continua en d, se aplica el teorema 6.1.5 para concluir que $g'(d)$ existe y que $g'(d) = 1/\varphi(g(d)) = 1/\varphi(c) = 1/f'(c)$. Q.E.D.

Nota La hipótesis, hecha en el teorema 6.1.8, de que $f'(c) \neq 0$ es esencial. De hecho, si $f'(c) = 0$, entonces la función inversa g *nunca* es derivable en $d = f(c)$, ya que la existencia supuesta de $g'(d)$ llevaría a $1 = f'(c)g'(d) = 0$, que es imposible. La función $f(x) := x^3$ con $c = 0$ es un ejemplo de esta situación.

6.1.9 Teorema *Sea* I *un intervalo y sea* f := I → ℝ *estrictamente monótona en* I. *Sea* J := f (I) *y sea* g : J → ℝ *la función inversa de* f. *Si* f *es derivable en* I *y* f ′(x) ≠ 0 *para* x ∈ I, *entonces* g *es derivable en* J *y*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}. \tag{13}$$

Demostración. Si f es derivable en I, entonces el teorema 6.1.2 implica que f es continua en I y por el teorema de la inversa continua 5.6.5, la función inversa g es continua en J. La ecuación (13) se sigue ahora del teorema 6.1.8. Q.E.D.

Observación Si f y g son las funciones del teorema 6.1.9 y si $x \in I$ y $y \in J$ están relacionadas por $y = f(x)$ y $x = g(y)$, entonces la ecuación (13) puede escribirse en la forma

$$g'(y) = \frac{1}{(f' \circ g)(y)}, \quad y \in J, \qquad \text{o} \qquad (g' \circ f)(x) = \frac{1}{f'(x)}, \quad x \in I.$$

También puede escribirse en la forma $g'(y) = 1/f'(x)$, *siempre que* se tenga presente que x y y están relacionadas por $y = f(x)$ y $x = g(y)$.

6.1.10 Ejemplos **a)** La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^5 + 4x + 3$ es continua y monótona estrictamente creciente (ya que es la suma de dos funciones estrictamente crecientes). Además, $f'(x) = 5x^4 + 4$ nunca es cero. Por lo tanto, por el teorema 6.1.8, la función inversa $g = f^{-1}$ es derivable en cada punto. Si se toma $c = 1$, entonces, ya que $f(1) = 8$, se obtiene $g'(8) = g'(f(1)) = 1/f^{-1}(1) = 1/9$.
b) Sea $n \in \mathbb{N}$ par, sea $I := [0, \infty)$ y sea $f(x) := x^n$ para $x \in I$. Al final de la sección 5.6 se explicó que f es estrictamente creciente y continua en I, por lo que su función inversa $g(y) := y^{1/n}$ para $y \in J := [0, \infty)$ también es estrictamente creciente y continua en J. Además, se tiene $f'(x) = nx^{n-1}$ para toda $x \in I$. En consecuencia, se sigue que si $y > 0$, entonces $g'(y)$ existe y

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(g(y))^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}.$$

Se deduce por tanto que

$$g'(y) = \frac{1}{n} y^{(1/n)-1} \qquad \text{para} \qquad y > 0.$$

Sin embargo, g *no* es derivable en 0. (Para una gráfica de f y g, véanse las figuras 5.6.4 y 5.6.5.)
c) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, impar, sea $F(x) := x^n$ para $x \in \mathbb{R}$ y sea $G(y) := y^{1/n}$ su función inversa definida para toda $y \in \mathbb{R}$. Como en el inciso b), se encuentra que G es derivable para $y \neq 0$ y que $G'(y) = (1/n)y^{(1/n)-1}$ para $y \neq 0$. Sin embargo, G no es derivable en 0 aun cuando G sí es derivable para toda $y \neq 0$. (Para una gráfica de F y G, véanse las figuras 5.6.6 y 5.6.7.)
d) Sea $r := m/n$ un número racional positivo, sea $I := [0, \infty)$ y sea $R(x) := x^r$ para $x \in I$. (Recordar la definición 5.6.6.) Entonces R es la composición de las funciones $f(x) := x^m$ y $g(x) := x^{1/n}$, $x \in I$. Es decir, $R(x) = f(g(x))$ para $x \in I$. Si se aplica la regla de la cadena 6.1.6 y los resultados del inciso b) [o del inciso c), dependiendo de si n es par o impar], se obtiene entonces

$$R'(x) = f'(g(x))g'(x) = m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

$$= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1} = rx^{r-1}$$

para toda $x > 0$. Si $r > 1$, entonces es un ejercicio demostrar que la derivada también existe en $x = 0$ y $R'(0) = 0$. (Para una gráfica de R, véase la figura 5.6.8.)
e) La función seno es estrictamente creciente en el intervalo $I := [-\pi/2, \pi/2]$; por lo tanto, su función inversa, que se denotará por arcsen, existe en $J := [-1, 1]$. Es decir, si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $y \in [-1, 1]$, entonces $y = \operatorname{sen} x$ si y sólo si $\operatorname{arcsen} y = x$. En el ejemplo 6.1.7d se afirmó (sin demostración) que sen es derivable en I y que

D sen $x = \cos x$ para $x \in I$. Puesto que $\cos x \neq 0$ para x en $(-\pi/2, \pi/2)$, del teorema 6.1.8 se sigue que

$$D \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{D \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

para toda $y \in (-1, 1)$. La derivada de arcsen *no* existe en los puntos -1 y 1. □

Ejercicios de la sección 6.1

1. Usar la definición para encontrar la derivada de cada una de las funciones siguientes:

   a) $f(x) := x^3$ para $x \in \mathbb{R}$,
   b) $g(x) := 1/x$ para $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$,
   c) $h(x) := \sqrt{x}$ para $x > 0$,
   d) $k(x) := 1/\sqrt{x}$ para $x > 0$.

2. Demostrar que $f(x) := x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, no es derivable en $x = 0$.

3. Demostrar el teorema 6.1.3a, b.

4. Sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x^2$ para x racional, $f(x) := 0$ para x irracional. Demostrar que f es derivable en $x = 0$ y encontrar $f'(0)$.

5. Derivar y simplificar:

   a) $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$,
   b) $g(x) := \sqrt{5-2x+x^2}$,
   c) $h(x) := (\operatorname{sen} x^k)^m$ para $m, k \in \mathbb{N}$,
   d) $k(x) := \tan(x^2)$ para $|x| \sqrt{\pi/2}$.

6. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x^n$ para $x \geq 0$ y $f(x) := 0$ para $x < 0$. ¿Para qué valores de n es continua f' en 0? ¿Para qué valores de n es derivable f' en 0?

7. Suponer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en c y que $f(c) = 0$. Demostrar que $g(x) := |f(x)|$ es derivable en c si y sólo si $f'(c) = 0$.

8. Determinar en dónde es derivable cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ y encontrar la derivada:

   a) $f(x) := |x| + |x+1|$,
   b) $g(x) := 2x + |x|$,
   c) $h(x) := x|x|$,
   d) $k(x) := |\operatorname{sen} x|$.

9. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función par** [es decir, $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$] y tiene derivada en todo punto, entonces la derivada f' es una **función impar** [es decir, $f'(-x) = -f'(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$]. Demostrar también que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable impar, entonces g' es una función par.

10. Sea que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $g(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$ y $g(0) := 0$. Demostrar que g es derivable para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar también que la derivada g' no está acotada en el intervalo $[-1, 1]$.

11. Suponer que existe una función $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $L'(x) = 1/x$ para $x > 0$. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) := L(2x + 3)$ para $x > 0$, b) $g(x) := (L(x^2))^3$ para $x > 0$,
c) $h(x) := L(ax)$ para $a > 0, x > 0$, d) $k(x) := L(L(x))$ cuando $L(x) > 0, x > 0$.

12. Si $r > 0$ es un número racional, sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x^r \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, y $f(0) := 0$. Determinar los valores de r para los que $f'(0)$ existe.

13. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $c \in \mathbb{R}$, demostrar que

$$f'(c) = \text{lím}\,(n\{f(c + 1/n) - f(c)\}).$$

Sin embargo, demostrar con un ejemplo que la existencia del límite de esta sucesión no implica la existencia de $f'(c)$.

14. Dado que la función $h(x) := x^3 + 2x + 1$ para $x \in \mathbb{R}$ tiene una inversa h^{-1} en $\mathbb{R}$, encontrar el valor de $(h^{-1})'(y)$ en los puntos correspondientes a $x = 0, 1, -1$.

15. Dado que la restricción de la función coseno cos a $I := [0, \pi]$ es estrictamente decreciente y que $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, sea $J := [-1, 1]$ y sea $\operatorname{arccos} : J \to \mathbb{R}$ la función inversa de la restricción de cos a I. Demostrar que arccos es derivable en $(-1, 1)$ y que $D \operatorname{arccos} y = (-1)/(1 - y^2)^{1/2}$ para $y \in (-1, 1)$. Demostrar que arccos no es derivable en -1 y 1.

16. Dado que la restricción de la función tangente tan a $I := (-\pi/2, \pi/2)$ es estrictamente creciente y que $\tan(I) = \mathbb{R}$, sea $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función inversa de la restricción de tan a I. Demostrar que arctan es derivable en $\mathbb{R}$ y que $D \arctan(y) = (1 + y^2)^{-1}$ para $y \in \mathbb{R}$.

17. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in I$. Establecer el **lema de horcajadas**: dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $u, v \in I$ satisfacen $c - \delta(\varepsilon) < u \leq c \leq v < c + \delta(\varepsilon)$, entonces se tiene $|f(v) - f(u) - (v - u)f'(c)| \leq \varepsilon(v - u)$. [*Sugerencia:* $\delta(\varepsilon)$ está dada por la definición 6.1.1. Restar y sumar el término $f(c) - cf'(c)$ en el primer miembro y usar la desigualdad del triángulo.]

SECCIÓN 6.2 El teorema del valor medio

El teorema del valor medio, el cual relaciona los valores de una función con los valores de su derivada, es uno de los resultados más útiles en el análisis real. En esta sección se establece este importante teorema y se examinan algunas de sus múltiples consecuencias.

Se empieza considerando la relación entre los extremos relativos de una función y los valores de su derivada. Recuérdese que se dice que la función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un **máximo relativo** [o bien un **mínimo relativo**] en $c \in I$ si existe una vecindad $V := V_\delta(c)$ de c tal que $f(x) \leq f(c)$ [o bien $f(c) \leq f(x)$] para toda x en $V \cap I$. Se dice que f tiene un **extremo relativo** en $c \in I$ si tiene un máximo relativo o bien un mínimo relativo en c.

El siguiente resultado proporciona la justificación teórica para el conocido proceso de encontrar puntos en los que f tiene extremos relativos examinando los

ceros de la derivada. Sin embargo, debe tenerse presente que este procedimiento sólo se aplica a puntos *interiores* del intervalo. Por ejemplo, si $f(x) := x$ en el intervalo $I := [0, 1]$, entonces el punto terminal $x = 0$ produce el único mínimo relativo y el punto terminal $x = 1$ produce el único máximo de f en I, pero ninguno de ellos es un cero de la derivada de f.

6.2.1 Teorema del extremo interior *Sea* c *un punto interior del intervalo* I *en el que* $f : I \to \mathbb{R}$ *tiene un extremo relativo. Si la derivada de* f *en* c *existe, entonces* $f'(c) = 0$.

Demostración. Sólo se demuestra el caso en que f tiene un máximo relativo en c; la demostración del caso de un mínimo relativo es similar.

Si $f'(c) > 0$, entonces por el teorema 4.2.9 existe una vecindad $V \subseteq I$ de c tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \quad \text{para} \quad x \in V, x \neq c.$$

Si $x \in V$ y $x > c$, entonces se tiene

$$f(x)-f(c) = (x-c) \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0.$$

Pero esto contradice la hipótesis de que f tiene un máximo relativo en c. Por lo tanto, no puede tenerse $f'(c) > 0$. Del mismo modo (¿cómo?), no se puede tener $f'(c) < 0$. Por lo tanto, debe tenerse $f'(c) = 0$. Q.E.D.

6.2.2 Corolario *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en un intervalo* I *y suponer que* f *tiene un extremo relativo en un punto interior* c *de* I. *Entonces o la derivada de* f *en* c *no existe o es igual a cero.*

Cabe señalar que si $f(x) := |x|$ en $I := [-1, 1]$, entonces f tiene un mínimo interior en $x = 0$; sin embargo, la derivada de f no existe en $x = 0$.

6.2.3 Teorema de Rolle *Suponer que* f *es continua en un intervalo cerrado* $I := [a, b]$, *que la derivada* f' *existe en todo punto del intervalo abierto* (a, b) *y que* $f(a) = f(b) = 0$. *Entonces existe al menos un punto* c *en* (a, b) *tal que* $f'(c) = 0$.

Demostración. Si f se anula en I, entonces cualquier c en (a, b) satisfará la conclusión del teorema. Por consiguiente, se supone que f no se anula en I. Al sustituir f por $-f$, de ser necesario, puede suponerse que f asume algunos valores positivos. Por el teorema del máximo-mínimo 5.3.4, la función f alcanza el valor $\sup\{f(x) : x \in I\} > 0$ en algún punto c de I. Puesto que $f(a) = f(b) = 0$, el punto c debe estar en (a, b); por lo tanto, $f'(c)$ existe.

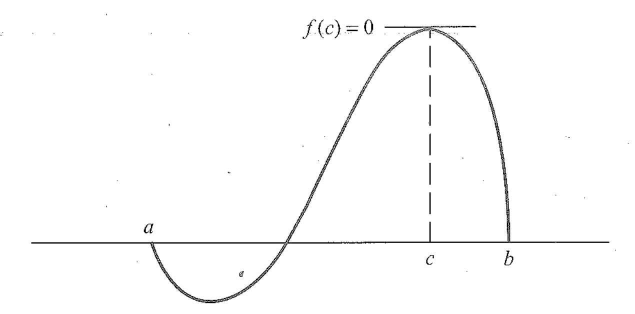


Figura 6.2.1 El teorema de Rolle.

Puesto que f tiene un máximo relativo en c, por el teorema del extremo interior 6.2.1 se concluye que $f'(c) = 0$. Véase la figura 6.2.1. Q.E.D.

Como una consecuencia del teorema de Rolle se obtiene el fundamental teorema del valor medio.

6.2.4 Teorema del valor medio *Suponer que* f *es continua en un intervalo cerrado* I := [a, b] *y que* f *tiene derivada en el intervalo abierto* (a, b). *Entonces existe al menos un punto* c *en* (a, b) *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Demostración. Considerar la función φ definida en I por

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

[La función φ es simplemente la diferencia de f y la función cuya gráfica es el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$; véase la figura 6.2.2.] La

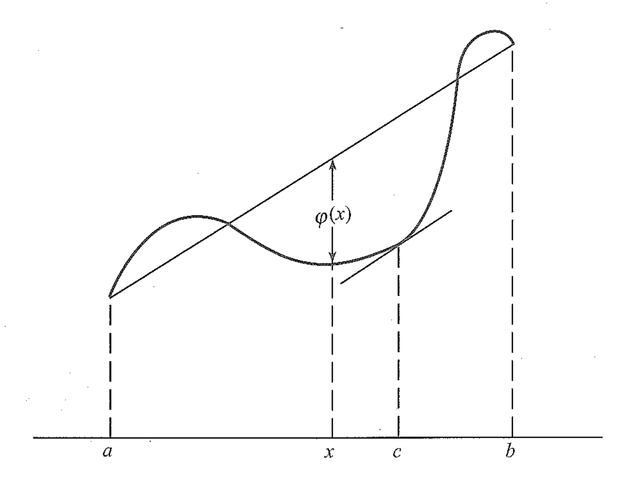


Figura 6.2.2 El teorema del valor medio.

función φ satisface las hipótesis del teorema de Rolle, ya que φ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Por lo tanto, existe un punto c en (a, b) tal que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por consiguiente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Q.E.D.

Observación La interpretación geométrica del teorema del valor medio es que existe un punto en la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente es paralela al segmento de recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Así, es fácil recordar el enunciado del teorema del valor medio trazando los diagramas apropiados. Aun cuando el uso de este procedimiento no debe desalentarse, tiende a sugerir que la importancia de este resultado es de naturaleza geométrica, lo cual es bastante engañoso. De hecho, el teorema del valor medio es un lobo con traje de oveja y es *el* teorema fundamental del cálculo diferencial. En el resto de esta sección se presentan algunas de las consecuencias de este resultado. Más adelante se ofrecen otras aplicaciones.

El teorema del valor medio permite sacar conclusiones acerca de la naturaleza de una función f a partir de información sobre su derivada f'. Los resultados siguientes se obtienen de esta manera.

6.2.5 Teorema *Suponer que* f *es continua en el intervalo cerrado* $I := [a, b]$, *que* f *es derivable en el intervalo abierto* (a, b) *y que* $f'(x) = 0$ *para* $x \in (a, b)$. *Entonces* f *es constante en* I.

Demostración. Se demostrará que $f(x) = f(a)$ para toda $x \in I$. De hecho, si está dada $x \in I$, con $x > a$, entonces el teorema del valor medio se aplica a f en el intervalo cerrado $[a, x]$. Se obtiene un punto c (que depende de x) entre a y x tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Puesto que $f'(c) = 0$ (por hipótesis), se puede deducir que $f(x) - f(a) = 0$. En consecuencia, $f(x) = f(a)$ para toda $x \in I$. Q.E.D.

6.2.6 Corolario *Suponer que* f *y* g *son continuas en* $I := [a, b]$, *que son derivables en* (a, b) *y que* $f'(x) = g'(x)$ *para toda* $x \in (a, b)$. *Entonces existe una constante* C *tal que* $f = g + C$ *en* I.

Recuérdese que se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **creciente** en el intervalo I si siempre que x_1, x_2 en I satisfacen $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$. Recuérdese asimismo que f es **decreciente** en I si la función $-f$ es creciente en I.

6.2.7 Teorema *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivable en el intervalo* I. *Entonces:*

a) f *es creciente en* I *si y sólo si* $f'(x) \geq 0$ *para toda* $x \in I$.
b) f *es decreciente en* I *si y sólo si* $f'(x) \leq 0$ *para toda* $x \in I$.

Demostración. a) Suponer que $f'(x) \geq 0$ para toda $x \in I$. Si x_1, x_2 en I satisfacen $x_1 < x_2$, entonces se aplica el teorema del valor medio a f en el intervalo cerrado $J := [x_1, x_2]$ para obtener un punto c en (x_1, x_2) tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Puesto que $f'(c) \geq 0$ y $x_2 - x_1 > 0$, se sigue que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. (¿Por qué?) En consecuencia, $f(x_1) \leq f(x_2)$ y, ya que $x_1 < x_2$ son puntos arbitrarios en I, se concluye que f es creciente en I.

Para la afirmación recíproca, se supone que f es derivable y creciente en I. Por tanto, para cualquier punto $x \neq c$ en I se tiene $(f(x) - f(c))/(x - c) \geq 0$. (¿Por qué?) En consecuencia, por el teorema 4.2.6 se concluye que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

b) La demostración del inciso b) es similar y se omite. Q.E.D.

Se dice que una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo I si para cualesquier puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$. Puede aplicarse un razonamiento en el mismo tenor de la demostración del teorema 6.2.7 para establecer que una función que tiene una derivada estrictamente positiva en un intervalo es estrictamente creciente ahí. (Véase el ejercicio 13.) Sin embargo, la afirmación recíproca no se cumple ya que una función derivable estrictamente creciente puede tener una derivada que asuma valores cero en ciertos puntos. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, pero $f'(0) = 0$. La situación para las funciones estrictamente decrecientes es similar.

Observación Es razonable definir una función como **creciente en un punto** si existe una vecindad del punto donde la función sea creciente. Podría suponerse que si la derivada es estrictamente positiva en un punto, entonces la función es creciente en este punto. Sin embargo, este supuesto es falso; de hecho, la función derivable definida por

$$g(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

es tal que $g'(0) = 1$ y no obstante puede demostrarse que g es no creciente en cualquier vecindad de $x = 0$. (Véase el ejercicio 10.)

Se obtiene a continuación una condición suficiente para que una función tenga un extremo relativo en un punto interior de un intervalo.

6.2.8 Criterio de la primera derivada para extremos *Sea* f *continua en el intervalo* I := [a, b] *y sea* c *un punto interior de* I. *Suponer que* f *es derivable en* (a, c) *y* (c, b). *Entonces:*

a) *Si existe una vecindad* $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ *tal que* $f'(x) \geq 0$ *para* $c - \delta < x < c$ *y* $f'(x) \leq 0$ *para* $c < x < c + \delta$, *entonces* f *tiene un máximo relativo en* c.
b) *Si existe una vecindad* $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ *tal que* $f'(x) \leq 0$ *para* $c - \delta < x < c$ *y* $f'(x) \geq 0$ *para* $c < x < c + \delta$, *entonces* f *tiene un mínimo relativo en* c.

Demostración. a) Si $x \in (c - \delta, c)$, entonces del teorema del valor medio se sigue que existe un punto $c_x \in (x, c)$ tal que $f(c) - f(x) = (c - x)f'(c_x)$. Puesto que $f'(c_x) \geq 0$, se infiere que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c - \delta, c)$. Del mismo modo, se sigue (¿cómo?) que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c, c + \delta)$. Por lo tanto, $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in (c - \delta, c + \delta)$, por lo que f tiene un máximo relativo en c.
b) La demostración es similar. Q.E.D.

Observación El recíproco del criterio de la primera derivada 6.2.8 *no* se cumple. Por ejemplo, existe una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con mínimo absoluto en $x = 0$ pero tal que f' asume valores tanto positivos como negativos a ambos lados (y arbitrariamente cerca) de $x = 0$. (Véase el ejercicio 9.)

Otras aplicaciones del teorema del valor medio

Se presentan ahora otros tipos de aplicaciones del teorema del valor medio; para ello se recurrirá con mayor libertad que antes a la experiencia previa del lector y a sus conocimientos acerca de las derivadas de algunas funciones muy conocidas.

6.2.9 Ejemplos **a)** El teorema de Rolle puede usarse para localizar las raíces de una función. Si una función g se puede identificar como la derivada de una función f, entonces entre cualesquiera dos raíces de f hay al menos una raíz de g. Por ejemplo, sea $g(x) := \cos x$; se sabe entonces que g es la derivada de $f(x) := \operatorname{sen} x$. En consecuencia, entre dos raíces cualesquiera de sen x hay al menos una raíz de cos x. Por otra parte, $g'(x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$, por lo que otra aplicación del teorema de Rolle indica que entre dos raíces cualesquiera de cos hay al menos una raíz de sen. Por lo tanto, se concluye que las raíces de sen y cos *se entrelazan entre sí.* Quizá esta conclusión no sea nueva para el lector; sin embargo, el mismo tipo de razonamiento se puede aplicar a las *funciones de Bessel* J_n de orden $n = 0, 1, 2, \cdots$, usando las relaciones

$$[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x), \qquad [x^{n-1} J_n(x)]' = -x^{-n} J_{n+1}(x) \qquad \text{para} \qquad x > 0.$$

Le corresponde al lector proporcionar los detalles de este razonamiento.
b) Es posible aplicar el teorema del valor medio para obtener cálculos aproximados y estimaciones de error. Por ejemplo, suponer que quiere evaluarse $\sqrt{105}$. Se emplea el teorema del valor medio con $f(x) := \sqrt{x}$, $a = 100$, $b = 105$, para obtener

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

para algún número c con $100 < c < 105$. Puesto que $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$, se puede afirmar que

$$\frac{5}{2(11)} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2(10)},$$

de donde se sigue que $10.2272 < \sqrt{105} < 10.2500$. Quizá esta estimación no tenga la precisión deseada. Es evidente que la estimación $\sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121}$ fue muy amplia y puede mejorarse haciendo uso de la conclusión de que $\sqrt{105} < 10.2500$. Así, $\sqrt{c} < 10.2500$ y se puede determinar con facilidad que

$$0.2439 < \frac{5}{2(10.2500)} < \sqrt{105} - 10.$$

La estimación mejorada es $10.2439 < \sqrt{105} < 10.2500$. □

Desigualdades

Un uso muy importante del teorema del valor medio es para obtener ciertas desigualdades. Siempre que se cuente con información acerca del codominio de la derivada de una función, dicha información puede usarse para deducir ciertas propiedades de la función en sí. Los siguientes ejemplos ilustran el valioso papel que desempeña el teorema del valor medio a este respecto.

6.2.10 Ejemplos **a)** La función exponencial $f(x) := e^x$ tiene la derivada $f'(x) = e^x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f'(x) > 1$ para $x > 0$ y $f'(x) < 1$ para $x < 0$. A partir de estas relaciones, se deduce la desigualdad

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

en la que la igualdad se cumple si y sólo si $x = 0$.

Si $x = 0$, se tiene la igualdad con ambos miembros iguales a 1. Si $x > 0$, se aplica el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[0, x]$. Entonces para alguna c con $0 < c < x$ se tiene

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0).$$

Puesto que $e^0 = 1$ y $e^c > 1$, la expresión anterior queda como $e^x - 1 > x$ por lo que se tiene $e^x > 1 + x$ para $x > 0$. Con un razonamiento similar se establece la misma desigualdad estricta para $x < 0$. Por tanto, la desigualdad (1) se cumple para toda x y la igualdad ocurre solamente si $x = 0$.

b) La función $g(x) := \operatorname{sen} x$ tiene la derivada $g'(x) = \cos x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Con base en el hecho de que $-1 \leq \cos x \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, se demostrará que

$$-x \leq \operatorname{sen} x \leq x \quad \text{para toda} \quad x \geq 0. \tag{2}$$

De hecho, si se aplica el teorema del valor medio a g en el intervalo $[0, x]$, donde $x > 0$, se obtiene

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = (\cos c)\,(x - 0)$$

para alguna c entre 0 y x. Puesto que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $-1 \leq \cos c \leq 1$, se tiene $-x \leq \operatorname{sen} x \leq x$. Puesto que la igualdad se cumple en $x = 0$, la desigualdad (2) queda establecida.

c) (Desigualdad de Bernoulli) Si $\alpha > 1$, entonces

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \text{para toda} \qquad x > -1, \tag{3}$$

donde la igualdad ocurre si y sólo si $x = 0$.

Esta desigualdad se estableció antes, en el ejemplo 2.1.13c, para valores enteros positivos de α utilizando la inducción matemática. Se deduce a continuación una versión más general aplicando el teorema del valor medio.

Si $h(x) := (1 + x)^\alpha$ entonces $h'(x) := \alpha(1 + x)^{\alpha - 1}$ para toda $x > -1$. [Para α racional, esta derivada se estableció en el ejemplo 6.1.10c. La generalización a números irracionales se verá en la sección 8.3.] Si $x > 0$, del teorema del valor medio aplicado a h en el intervalo $[0, x]$ se infiere que existe c con $0 < c < x$ tal que $h(x) - h(0) = h'(c)(x - 0)$. Por tanto, se tiene

$$(1 + x)^\alpha - 1 = \alpha(1 + c)^{\alpha-1}x.$$

Puesto que $c > 0$ y $\alpha - 1 > 0$, se sigue que $(1 + c)^{\alpha - 1} > 1$ y, por consiguiente, que $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$. Si $-1 < x < 0$, una aplicación similar del teorema del valor medio en el intervalo $[x, 0]$ lleva a la misma desigualdad estricta. Puesto que el caso $x = 0$ resulta en la igualdad, se concluye que (3) es válida para toda $x > -1$ con la igualdad cumpliéndose si y sólo si $x = 0$.

d) Sea α un número real que satisface $0 < \alpha < 1$ y sea $g(x) = \alpha x - x^\alpha$ para $x \geq 0$. Entonces $g'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha - 1})$, de modo que $g'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ y $g'(x) > 0$ para $x > 1$. Por consiguiente, si $x \geq 0$, entonces $g(x) \geq g(1)$ y $g(x) = g(1)$ si y sólo si $x = 1$. Por lo tanto, si $x \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$, se tiene entonces

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha).$$

Si $a > 0$ y $b > 0$, y si se hace $x = a/b$ y se multiplica por b, se obtiene la desigualdad

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b,$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si $a = b$. □

La propiedad del valor intermedio de las derivadas

Se concluye esta sección con un interesante resultado, al que con frecuencia se hace referencia como el teorema de Darboux. Establece que si una función f es derivable en todo punto de un intervalo I, entonces la función f' tiene la propiedad del valor intermedio. Esto significa que si f' asume los valores A y B, entonces también asume todos los valores que están entre A y B. El lector reconocerá esta propiedad como una de las consecuencias importantes de la continuidad según se estableció en el teorema 5.3.7. Resulta notable que las derivadas, las cuales no son necesariamente funciones continuas, posean también esta propiedad.

6.2.11 Lema *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo, sea* $f : I \to \mathbb{R}$, *sea* $c \in I$ *y suponer que* f *tiene derivada en* c. *Entonces:*

a) *Si* $f'(c) > 0$, *entonces existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > f(c)$ *para* $x \in I$ *tal que* $c < x < c + \delta$.
b) *Si* $f'(c) < 0$, *entonces existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > f(c)$ *para* $x \in I$ *tal que* $c - \delta < x < c$.

Demostración. a) Puesto que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) > 0,$$

del teorema 4.2.9 se sigue que existe un número $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0.$$

Si $x \in I$ también satisface $x > c$, se tiene entonces

$$f(x)-f(c) = (x-c) \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0.$$

Por consiguiente, si $x \in I$ y $c < x < c + \delta$, entonces $f(x) > f(c)$.
La demostración del inciso b) es similar. Q.E.D.

6.2.12 Teorema de Darboux *Si* f *es derivable en* $I = [a, b]$ *y si* k *es un número entre* $f'(a)$ *y* $f'(b)$, *entonces existe al menos un punto* c *en* (a, b) *tal que* $f'(c) = k$.

Demostración. Suponer que $f'(a) < k < f'(b)$. Se define g en I por $g(x) := kx - f(x)$ para $x \in I$. Puesto que g es continua, alcanza un valor máximo en I. Puesto que $g'(a) = k - f'(a) > 0$, del lema 6.2.11a se sigue que el máximo de g no ocurre en $x = a$. Del mismo modo, puesto que $g'(b) = k - f'(b) < 0$, del lema 6.2.11b se sigue que el máximo no ocurre en $x = b$. Por lo tanto, g alcanza su máximo en algún punto c de (a, b). Entonces por el teorema 6.2.1 se tiene $0 = g'(c) = k - f'(c)$. En consecuencia, $f'(c) = k$. Q.E.D.

6.2.13 Ejemplo La función $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{para} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{para} \quad x = 0, \\ -1 & \text{para} \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$$

(que es una restricción de la función signo), evidentemente no satisface la propiedad del valor intermedio en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, por el teorema de Darboux, no existe una función f tal que $f'(x) = g(x)$ para toda $x \in [-1, 1]$. En otras palabras, g *no* es la derivada de ninguna función en $[-1, 1]$. □

Ejercicios de la sección 6.2

1. Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, encontrar los puntos de los extremos relativos, los intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente:

a) $f(x) := x^2 - 3x + 5$, b) $g(x) := 3x - 4x^2$,
c) $h(x) := x^3 - 3x - 4$, d) $k(x) := x^4 + 2x^2 - 4$.

2. Encontrar los puntos de los extremos relativos, los intervalos donde las siguientes funciones son crecientes y aquéllos donde son decrecientes:

a) $f(x) := x + 1/x$ para $x \neq 0$, b) $g(x) := x/(x^2 + 1)$ para $x \in \mathbb{R}$,
c) $h(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x + 2}$ para $x > 0$, d) $k(x) := 2x + 1/x^2$ para $x \neq 0$.

3. Encontrar los puntos de los extremos relativos de las siguientes funciones en el dominio especificado:

a) $f(x) := |x^2 - 1|$ para $-4 \leq x \leq 4$, b) $g(x) := 1 - (x - 1)^{2/3}$ para $0 \leq x \leq 2$,
c) $h(x) := x|x^2 - 12|$ para $-2 \leq x \leq 3$, d) $k(x) := x(x - 8)^{1/3}$ para $0 \leq x \leq 9$.

4. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales y sea que f esté definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2 \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Encontrar el punto único del mínimo relativo de f.

5. Sea $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ que satisfaga $n \geq 2$. Demostrar que $a^{1/n} - b^{1/n} < (a - b)^{1/n}$. [*Sugerencia:* demostrar que $f(x) := x^{1/n} - (x - 1)^{1/n}$ es decreciente para $x \geq 1$ y evaluar f en 1 y a/b.]

6. Utilizar el teorema del valor medio para demostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para toda x, y en $\mathbb{R}$.

7. Usar el teorema del valor medio para demostrar que $(x - 1)/x < \ln x < x - 1$ para $x > 1$. [*Sugerencia:* usar el hecho de que $D \ln x = 1/x$ para $x > 0$.]

8. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demostrar que si $\lim_{x \to a} f'(x) = A$, entonces $f'(a)$ existe y es igual a A. [*Sugerencia:* usar la definición de $f'(a)$ y el teorema del valor medio.]

9. Sea que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) := 0$. Demostrar que f tiene un máximo absoluto en $x = 0$, pero que su derivada tiene valores tanto positivos como negativos en toda vecindad de 0.

10. Sea que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $g(x) := x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $g(0) := 0$. Demostrar que $g'(0) = 1$, pero que en toda vecindad de 0 la derivada $g'(x)$ asume valores tanto positivos como negativos. Por tanto, g no es monótona en ninguna vecindad de 0.

11. Dar un ejemplo de una función uniformemente continua en $[0, 1]$ que sea derivable en $(0, 1)$ pero cuya derivada no esté acotada en $(0, 1)$.

12. Si $h(x) := 0$ para $x < 0$ y $h(x) := 1$ para $x \geq 0$, demostrar que no existe una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = h(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Dar ejemplos de dos funciones, que no difieran por una constante, cuyas derivadas sean iguales a $h(x)$ para toda $x \neq 0$.

13. Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en I. Demostrar que si f' es positiva en I, entonces f es estrictamente creciente en I.

14. Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en I. Demostrar que si la derivada f' nunca es 0 en I, entonces $f'(x) > 0$ para toda $x \in I$ o bien $f'(x) < 0$ para toda $x \in I$.

15. Sea I un intervalo. Demostrar que si f es derivable en I y si la derivada f' está acotada en I, entonces f satisface la condición de Lipschitz sobre I. (Véase la definición 5.4.4.)

16. Sea $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ derivable en $(0, \infty)$ y suponer que $f'(x) \to b$ cuando $x \to \infty$.

a) Demostrar que para cualquier $h > 0$ se tiene $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x+h) - f(x)\big)/h = b$.
b) Demostrar que si $f(x) \to a$ cuando $x \to \infty$, entonces $b = 0$.
c) Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x)/x\big) = b$.

17. Sean f, g derivables en $\mathbb{R}$ y suponer que $f(0) = g(0)$ y que $f'(x) \leq g'(x)$ para toda $x \geq 0$. Demostrar que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \geq 0$.

18. Sea $I := [a, b]$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in I$. Demostrar que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - y| < \delta$ y $a \leq x \leq c \leq y \leq b$, entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(c)\right| < \varepsilon.$$

19. Se dice que una función derivable $f: I \to \mathbb{R}$ es **uniformemente derivable** en $I := [a, b]$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - y| < \delta$ y $x, y \in I$, entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

Demostrar que si f es uniformemente derivable en I, entonces f' es continua en I.

20. Suponer que $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, y que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.

a) Demostrar que existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.
b) Demostrar que existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.
c) Demostrar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1/3$.

SECCIÓN 6.3 Reglas de L'Hôpital

El marqués Guillame François L'Hôpital (1661-1704) fue el autor del primer libro de cálculo, *L' Analyse des infiniment petits*, publicado en 1696. Estudió el entonces novedoso cálculo diferencial de Johann Bernoulli (1667-1748), primero cuando Bernoulli visitó la finca campestre de L'Hôpital y posteriormente a través de una serie de cartas. El libro fue el resultado de los estudios de L'Hôpital. El teore-

ma del límite que llegó a conocerse como la regla de L'Hôpital salió a la luz en este libro, aunque en realidad fue descubierto por Bernoulli.

El teorema inicial fue objeto de depuraciones y ampliaciones, y los diferentes resultados se conocen en conjunto como las reglas de L'Hôpital. En esta sección se establecen los resultados más básicos y se indica cómo se pueden deducir los demás.

Formas indeterminadas

En los capítulos anteriores con mucha frecuencia nos hemos ocupado de los métodos para evaluar límites. En el teorema 4.2.4b se demostró que si $A := \lim_{x \to c} f(x)$ y $B := \lim_{x \to c} g(x)$, y si $B \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Sin embargo, si $B = 0$, entonces no se llegó a ninguna conclusión. En el ejercicio 2 se verá que si $B = 0$ y $A \neq 0$, entonces el límite es infinito (si existe).

El caso $A = 0$, $B = 0$ no se ha considerado aún. En este caso, se dice que el límite del cociente f/g es "indeterminado". Se verá que en este caso el límite puede o no existir o puede ser cualquier valor real, dependiendo de las funciones particulares f y g. La simbología 0/0 se usa para hacer referencia a esta situación. Por ejemplo, si α es cualquier número real y si se define $f(x) := \alpha x$ y $g(x) := x$, entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x}{x} = \lim_{x \to 0} \alpha = \alpha.$$

Por tanto, la forma indeterminada 0/0 puede llevar a cualquier número real α como límite.

Otras formas indeterminadas se representan por los símbolos ∞/∞, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 e $\infty - \infty$. Estas notaciones corresponden al comportamiento en el límite indicado y a la yuxtaposición de las funciones f y g. La atención se centra en las formas indeterminadas 0/0 e ∞/∞. Los demás casos indeterminados por lo general se reducen a la forma 0/0 o ∞/∞ tomando logaritmos, exponenciales o mediante operaciones algebraicas.

Resultado preliminar

Para mostrar que el uso de la derivación en este contexto es un desarrollo natural y no inusitado, se establece primero un resultado elemental que se basa simplemente en la definición de la derivada.

6.3.1 Teorema *Sea que* f *y* g *estén definidas en* [a, b], *sea* f(a) = g(a) = 0 *y sea* g(x) ≠ 0 *para* a < x < b. *Si* f *y* g *son derivables en* a *y si* g′(a) ≠ 0, *entonces el límite de* f/g *en* a *existe y es igual a* f′(a)/g′(a). *Por tanto,*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demostración. Puesto que $f(a) = g(a) = 0$, el cociente $f(x)/g(x)$ para $a < x < b$ puede escribirse como sigue:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Al aplicar el teorema 4.2.4b, se obtiene

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Q.E.D.

Atención La hipótesis de que $f(a) = g(a) = 0$ es esencial aquí. Por ejemplo, si $f(x) := x + 17$ y $g(x) := 2x + 3$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{17}{3}, \quad \text{mientras que} \quad \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}.$$

El resultado precedente permite tratar límites tales como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2\cdot 0+1}{2\cos 0} = \frac{1}{2}.$$

Para manejar límites cuando f y g no son derivables en el punto a se necesita una versión más general del teorema del valor medio debida a Cauchy.

6.3.2 Teorema del valor medio de Cauchy *Sean* f *y* g *continuas en* [a, b] *y derivables en* (a, b), *y suponer que* g'(x) ≠ 0 *para toda* x *en* (a, b). *Entonces existe* c *en* (a, b) *tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. Como en la demostración del teorema del valor medio, se introduce una función a la que se aplicará el teorema de Rolle. Se observa primero que como $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), del teorema de Rolle se sigue que $g(a) \neq g(b)$. Para x en $[a, b]$, se define ahora

$$h(x) := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) - \big(f(x)-f(a)\big).$$

Entonces h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = h(b) = 0$. Por lo tanto, del teorema de Rolle se sigue que existe un punto c en (a, b) tal que

$$0 = h'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) - f'(c).$$

Puesto que $g'(c) \neq 0$, el resultado deseado se obtiene dividiendo entre $g'(c)$.

Q.E.D.

Observaciones El teorema precedente tiene una interpretación geométrica que es similar a la del teorema del valor medio 6.2.4. Puede considerarse que las funciones f y g determinan una curva en el plano por medio de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ donde $a \leq t \leq b$. Entonces la conclusión del teorema es que existe un punto $(f(c), g(c))$ sobre la curva para alguna c en (a, b) tal que la pendiente $g'(c)/f'(c)$ de la recta tangente a la curva en ese punto es igual a la pendiente del segmento de recta que une los puntos terminales de la curva.

Adviértase que si $g(x) = x$, entonces el teorema del valor medio de Cauchy se reduce al teorema del valor medio 6.2.4.

Regla de L'Hôpital, I

Se establece ahora la primera de las reglas de L'Hôpital. Por conveniencia, se consideran los límites por la derecha en un punto a; los límites por la izquierda y los límites por ambos lados se tratan exactamente de la misma manera. De hecho, el teorema incluso deja abierta la posibilidad de que $a = -\infty$. El lector deberá advertir que, en contraste con el teorema 6.3.1, el siguiente resultado no supone la derivabilidad de las funciones en el punto a. El resultado afirma que el comportamiento en el límite de $f(x)/g(x)$ cuando $x \to a+$ es igual al comportamiento en el límite de $f'(x)/g'(x)$ cuando $x \to a+$, incluyendo el caso en que este límite es infinito. Una hipótesis importante aquí es que tanto f como g tienden a 0 cuando $x \to a+$.

6.3.3 Regla de L'Hôpital, I *Sea* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *y que sean* f, g *derivables en* (a, b) *tales que* $g'(x) \neq 0$ *para toda* $x \in (a, b)$. *Suponer que*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+} g(x). \tag{1}$$

a) *Si* $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

b) *Si* $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración. Si $a < \alpha < \beta < b$, entonces el teorema de Rolle implica que $g(\beta) \neq g(\alpha)$. Además, por el teorema del valor medio de Cauchy 6.3.2, existe $u \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{2}$$

Caso a): Si $L \in \mathbb{R}$ y si $\varepsilon > 0$ está dada, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$L-\varepsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L+\varepsilon \quad \text{para} \quad u \in (a, c),$$

de donde por (2) se sigue que

$$L-\varepsilon < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < L+\varepsilon \quad \text{para} \quad a < \alpha < \beta \leq c. \tag{3}$$

Si se toma el límite en (3) cuando $\alpha \to a+$, se tiene

$$L-\varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L+\varepsilon \quad \text{para} \quad \beta \in (a, c].$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue la afirmación.

Caso b): Si $L = +\infty$ y si $M > 0$ está dada, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} > M \quad \text{para} \quad u \in (a, c),$$

de donde por (2) se sigue que

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} > M \quad \text{para} \quad a < \alpha < \beta < c. \tag{4}$$

Si se toma el límite en (4) cuando $\alpha \to a+$, se tiene

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M \quad \text{para} \quad \beta \in (a, c).$$

Puesto que $M > 0$ es arbitraria, se sigue la afirmación.

Si $L = -\infty$, el razonamiento es similar. Q.E.D.

6.3.4 Ejemplos **a)** Se tiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \left[\frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})}\right] = \lim_{x\to 0+} 2\sqrt{x}\cos x = 0.$$

Se observa que el denominador no es derivable en $x = 0$, por lo que el teorema 6.3.1 no puede aplicarse. Sin embargo, $f(x) := \operatorname{sen} x$ y $g(x) := \sqrt{x}$ son derivables en

$(0, \infty)$ y ambas tienden a 0 cuando $x \to 0+$. Además, $g'(x) \neq 0$ en $(0, \infty)$, por lo que 6.3.3 es aplicable.

b) Se tiene $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{2x}$.

Aquí es necesario considerar el límite tanto por la derecha como por la izquierda. El cociente en el segundo límite de nuevo es indeterminado de la forma 0/0. Sin embargo, las hipótesis de 6.3.3 se satisfacen, por lo que es válida una segunda aplicación de la regla de L'Hôpital. Se obtiene, por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) Se tiene $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1$.

Nuevamente, es necesario considerar el límite por la izquierda y por la derecha. Del mismo modo, se tiene

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - 1 - x}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) Se tiene $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{\ln x}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\dfrac{(1/x)}{1} = 1$. □

Regla de L'Hôpital, II

Esta regla es muy similar a la primera, excepto porque trata el caso en que el denominador se hace infinito cuando $x \to a+$. De nueva cuenta, sólo se consideran los límites por la derecha, pero es posible que $a = -\infty$. Los límites por la izquierda y los límites por ambos lados se abordan del mismo modo.

6.3.5 Regla de L'Hôpital, II *Sea* $-\infty \le a < b \le \infty$ *y sean* f, g *funciones derivables en* (a, b) *tales que* $g'(x) \neq 0$ *para toda* $x \in (a, b)$. *Suponer que*

$$\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty. \tag{5}$$

a) *Si* $\lim_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

b) *Si* $\lim_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, *entonces* $\lim_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Demostración. Se supondrá que (5) se cumple con límite ∞.

Como antes, se tiene $g(\beta) \neq g(\alpha)$ para $\alpha, \beta \in (a, b)$, $\alpha < \beta$. Además, la ecuación (2) de la demostración de 6.3.3 se cumple para alguna $u \in (\alpha, \beta)$.

Caso a): Si $L \in \mathbb{R}$ con $L > 0$ y $\varepsilon > 0$ está dada, existe $c \in (a, b)$ tal que (3) en la demostración de 6.3.3 se cumple cuando $a < \alpha < \beta \leq c$. Puesto que $g(x) \to \infty$, se puede suponer también que $g(c) > 0$. Al tomar $\beta = c$ en (3), se tiene

$$L - \varepsilon < \frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)} < L + \varepsilon \quad \text{para} \quad \alpha \in (a, c). \tag{6}$$

Puesto que $g(c)/g(\alpha) \to 0$ cuando $\alpha \to a+$, puede suponerse que $0 < g(c)/g(\alpha) < 1$ para toda $\alpha \in (a, c)$, de donde se sigue que

$$\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)} = 1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)} > 0 \quad \text{para} \quad \alpha \in (a, c).$$

Si se multiplica (6) por $(g(\alpha) - g(c))/g(\alpha) > 0$, se tiene

$$(L - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right). \tag{7}$$

Ahora bien, puesto que $g(c)/g(\alpha) \to 0$ y $f(c)/g(\alpha) \to 0$ cuando $\alpha \to a+$, entonces para cualquier δ con $0 < \delta < 1$ existe $d \in (a, c)$ tal que $0 < g(c)/g(\alpha) < \delta$ y $|f(c)|/g(\alpha) < \delta$ para toda $\alpha \in (a, d)$, de donde (7) produce

$$(L - \varepsilon)(1 - \delta) - \delta < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (L + \varepsilon) + \delta. \tag{8}$$

Si se toma $\delta := \text{mín}\{1, \varepsilon, \varepsilon/(|L| + 1)\}$, es un ejercicio demostrar que

$$L - 2\varepsilon \leq \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq L + 2\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, de esta expresión se obtiene la afirmación. Los casos $L = 0$ y $L < 0$ se abordan de una manera similar.

Caso b): Si $L = +\infty$, sea $M > 1$ dada y sea $c \in (a, b)$ tal que $f'(u)/g'(u) > M$ para toda $u \in (a, c)$. Entonces se sigue como antes que

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M \quad \text{para} \quad a < \alpha < \beta \leq c. \tag{9}$$

Puesto que $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a+$, se puede suponer que c también satisfsace $g(c) > 0$, que $|f(c)|/g(\alpha) < \frac{1}{2}$ y que $0 < g(c)/g(\alpha) < \frac{1}{2}$ para toda $\alpha \in (a, c)$. Si se toma $\beta = c$ en (9) y se multiplica por $1 - g(c)/g(\alpha) > \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\frac{f(\alpha) - f(c)}{g(\alpha)} > M\left(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\right) > \tfrac{1}{2}M,$$

de donde

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} > \tfrac{1}{2}M, \quad +\frac{f(c)}{g(\alpha)} > \tfrac{1}{2}(M-1) \qquad \text{para} \qquad \alpha \in (a, c).$$

Puesto que $M > 1$ es arbitraria, se sigue que $\lim_{\alpha\to a+} f(\alpha)/g(\alpha) = \infty$.
Si $L = -\infty$, el razonamiento es similar. Q.E.D.

6.3.6 Ejemplos **a)** Se considera $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Aquí $f(x) := \ln x$ y $g(x) := x$ en el intervalo $(0, \infty)$. Si se aplica la versión por la izquierda de 6.3.5, se obtiene $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$.

b) Se considera $\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^2$.

Se toma aquí $f(x) := x^2$ y $g(x) := e^x$ en $\mathbb{R}$. Se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

c) Se considera $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x}$.

Se toma aquí $f(x) := \ln \operatorname{sen} x$ y $g(x) := \ln x$ en $(0, \pi)$. Si se aplica 6.3.5, se obtiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x / \operatorname{sen} x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \left[\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right] \cdot [\cos x].$$

Puesto que $\lim_{x\to 0+} [x/\operatorname{sen} x] = 1$ y $\lim_{x\to 0+} \cos x = 1$, se concluye que el límite bajo consideración es igual a 1. □

Otras formas indeterminadas

Las formas indeterminadas tales como $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 pueden reducirse a los casos ya considerados mediante operaciones algebraicas y el uso de funciones logarítmicas y exponenciales. En lugar de formular estas variantes como teoremas, las técnicas pertinentes se ilustran por medio de ejemplos.

6.3.7 Ejemplos **a)** Sea $I := (0, \pi/2)$ y considerar

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right),$$

que tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$. Se tiene

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$

b) Sea $I := (0, \infty)$ y considerar $\lim_{x\to 0+} x \ln x$, que tiene la forma indeterminada $0 \cdot (-\infty)$. Se tiene

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$$

c) Sea $I := (0, \infty)$ y considerar $\lim_{x\to 0+} x^x$, que tiene la forma indeterminada 0^0.

Se recuerda del cálculo (véase también la sección 8.3) que $x^x = e^{x\ln x}$. Del inciso b) y de la continuidad de la función $y \mapsto e^y$ en $y = 0$ se sigue que $\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$.

d) Sea $I := (1, \infty)$ y considerar $\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x$, que tiene la forma indeterminada 1^∞.

Se observa que

$$(1 + 1/x)^x = e^{x\ln(1+1/x)}. \tag{10}$$

Además, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)^{-1}(-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1.$$

Puesto que $y \mapsto e^y$ es continua en $y = 1$, se infiere que $\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = e$.

e) Sea $I := (0, \infty)$ y considerar $\lim_{x\to 0+} (1 + 1/x)^x$, que tiene la forma indeterminada ∞^0.

Con base en la fórmula (10), se considera

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+1/x} = 0.$$

Se tiene, por lo tanto, $\lim_{x\to 0+} (1 + 1/x)^x = e^0 = 1$. □

Ejercicios de la sección 6.3

1. Suponer que f y g son continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b), que $c \in [a, b]$ y que $g(x) \neq 0$ para $x \in [a, b], x \neq c$. Sea $A := \lim_{x\to c} f$ y $B := \lim_{x\to c} g$. Si $B = 0$ y si $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ existe en $\mathbb{R}$, demostrar que debe tenerse $A = 0$. [*Sugerencia:* $f(x) = \{f(x)/g(x)\}g(x)$.]

2. Además de los supuestos del ejercicio precedente, sea $g(x) > 0$ para $x \in [a, b], x \neq c$. Si $A > 0$ y $B = 0$, demostrar que debe tenerse $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = \infty$. Si $A < 0$ y $B = 0$, demostrar que debe tenerse $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = -\infty$.

3. Sea $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq 1$ y $f(0) := 0$, y sea $g(x) := x^2$ para $x \in [0, 1]$. Entonces tanto f como g son derivables en $[0, 1]$ y $g(x) > 0$ para $x \neq 0$. Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ y que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ no existe.

4. Sea $f(x) := x^2$ para x racional, sea $f(x) := 0$ para x irracional y sea $g(x) := \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Aplicar el teorema 6.3.1 para demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$. Explicar por qué no puede usarse el teorema 6.3.3.

5. Sea $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, sea $f(0) := 0$ y sea $g(x) := \operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$ pero que $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ no existe.

6. Evaluar los límites siguientes, donde el dominio del cociente es el que se indica.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x+1)}{\operatorname{sen} x}$ $(0, \pi/2)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x}{x}$ $(0, \pi/2)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \cos x}{x}$ $(0, \pi/2)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\tan x - x}{x^3}$ $(0, \pi/2)$.

7. Evaluar los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$ $(-\infty, \infty)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2}$ $(0, 1)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x$ $(0, \infty)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{e^x}$ $(0, \infty)$.

8. Evaluar los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$ $(0, \infty)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $(0, \infty)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln \operatorname{sen} x$ $(0, \pi)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x}$ $(0, \infty)$.

9. Evaluar los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{2x}$ $(0, \infty)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + 3/x)^x$ $(0, \infty)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (1 + 3/x)^x$ $(0, \infty)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x}\right)$ $(0, \infty)$.

10. Evaluar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ $(0, \infty)$,

b) $\lim_{x \to 0+} (\operatorname{sen} x)^x$ $(0, \pi)$,

c) $\lim_{x \to 0+} x^{\operatorname{sen} x}$ $(0, \infty)$,

d) $\lim_{x \to \pi/2-} (\sec x - \tan x)$ $(0, \pi/2)$.

11. Sea f derivable en $(0, \infty)$ y suponer que $\lim_{x \to \infty} (f(x) + f'(x)) = L$. Demostrar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ y que $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$. [*Sugerencia:* $f(x) = e^x f(x)/e^x$.]

12. Intentar usar la regla de L'Hôpital para encontrar el límite de $\dfrac{\tan x}{\sec x}$ cuando $x \to (\pi/2)-$. Evaluarlo después directamente haciendo el cambio a senos y cosenos.

SECCIÓN 6.4 Teorema de Taylor

Una técnica de gran utilidad en el análisis de funciones reales es la aproximación de funciones por polinomios. En esta sección se demuestra un teorema fundamental en esta área que se remonta a Brook Taylor (1685-1731), aunque el término del residuo no fue incluido sino mucho después por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). El teorema de Taylor constituye un poderoso resultado que tiene múltiples aplicaciones. Se ilustrarará la versatilidad del teorema de Taylor examinando brevemente algunas de sus aplicaciones en la estimación numérica, desigualdades, valores extremos de una función y funciones convexas.

El teorema de Taylor puede considerarse como una ampliación del teorema del valor medio para derivadas de "orden superior". Mientras que el teorema del valor medio relaciona los valores de una función y su primera derivada, el teorema de Taylor proporciona una relación entre los valores de una función y sus derivadas de orden superior.

Las derivadas de orden mayor que uno se obtienen por una ampliación natural del proceso de derivación. Si la derivada $f'(x)$ de una función f existe en todo punto x de un intervalo I que contiene un punto c, entonces puede considerarse la existencia de la derivada de la función f' en el punto c. En caso de que f' tenga una derivada en el punto c, se hace referencia al número resultante como la **segunda derivada** de f en c y se denota este número por $f''(c)$ o por $f^{(2)}(c)$. De manera similar, se define la tercera derivada $f'''(c) = f^{(3)}(c), \cdots$, y la ***n*-ésima derivada** $f^{(n)}(c)$, siempre que estas derivadas existan. Cabe señalar que la existencia de la n-ésima derivada en c presupone la existencia de la $(n - 1)$-ésima derivada en un intervalo que contiene a c, pero se deja abierta la posibilidad de que c sea un punto terminal de dicho intervalo.

Si una función f tiene una n-ésima derivada en un punto x_0, no es difícil construir un polinomio de n-ésimo grado P_n tal que $P_n(x_0) = f(x_0)$ y $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, 2, \cdots, n$. De hecho, el polinomio

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad (1)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

tiene la propiedad de que él y sus derivadas hasta el orden n coinciden con la función f y sus derivadas hasta el orden n en el punto x_0 especificado. A este polinomio P_n se le llama el **n-ésimo polinomio de Taylor para f en x_0**. Es natural esperar que este polinomio proporcione una aproximación razonable de f para puntos próximos a x_0, pero para graduar la precisión de la aproximación es necesario tener información en cuanto al residuo $R_n := f - P_n$. El siguiente resultado fundamental proporciona esta información.

6.4.1 Teorema de Taylor *Sea* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $I := [a, b]$ *y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *tal que* f *y sus derivadas* $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ *son continuas en* I *y tal que* $f^{(n+1)}$ *existe en* (a, b). *Si* $x_0 \in I$, *entonces para cualquier* x *en* I *existe un punto* c *entre* x *y* x_0 *tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad (2)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Demostración. Sea que x_0 y x estén dadas y sea que J denote el intervalo cerrado con puntos terminales x_0 y x. Se define la función F en J por

$$F(t) := f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t)$$

para $t \in J$. Entonces un sencillo cálculo indica que se tiene

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t).$$

Si se define G en J por

$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$

para $t \in J$, entonces $G(x_0) = G(x) = 0$. Al aplicar el teorema de Rolle 6.2.3, se obtiene un punto c entre x y x_0 tal que

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x - c)^n}{(x - x_0)^{n+1}} F(x_0).$$

Se obtiene, por tanto,

$$F(x_0) = -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c)$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

que implica el resultado enunciado. Q.E.D.

Se usará la notación P_n para el n-ésimo polinomio de Taylor (1) de f y R_n para el residuo. Así, la conclusión del teorema de Taylor puede escribirse como $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde R_n está dado por

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3}$$

para algún punto c entre x y x_0. Se hace referencia a esta fórmula para R_n como la **forma de Lagrange** (o como la **forma de derivada**) del residuo. Se conocen muchas otras expresiones para R_n; una de ellas se expresa en términos de integración y se examinará más adelante. (Véase el teorema 7.3.18.)

Aplicaciones del teorema de Taylor

El término del residuo R_n en el teorema de Taylor puede usarse para estimar el error al aproximar una función por su polinomio de Taylor P_n. Si el número n está dado, entonces surge la cuestión de la precisión de la aproximación. Por otra parte, si se especifica una precisión determinada, entonces la cuestión es encontrar un valor adecuado de n. Los siguientes ejemplos ilustran cómo se resuelven estos casos.

6.4.2 Ejemplos **a)** Utilizar el teorema de Taylor con $n = 2$ para aproximar $\sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$.

Se toma la función $f(x) := (1 + x)^{1/3}$, el punto $x_0 = 0$ y $n = 2$. Puesto que $f'(x) = \frac{1}{3}(1 + x)^{-2/3}$ y $f''(x) = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(1 + x)^{-5/3}$, se tiene $f'(0) = \frac{1}{3}$ y $f''(0) = -2/9$. Se obtiene, por tanto,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + R_2(x),$$

donde $R_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)x^3 = \frac{5}{81}(1 + c)^{-8/3}x^3$ para algún punto c entre 0 y x.

Por ejemplo, si se hace $x = 0.3$, se obtiene la aproximación $P_2(0.3) = 1.09$ para $\sqrt[3]{1.3}$. Además, ya que $c > 0$ en este caso, entonces $(1 + c)^{-8/3} < 1$, por lo que el error es a lo sumo

$$R_2(0.3) \le \frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{600} < 0.17\times10^{-2}.$$

En consecuencia, se tiene $|\sqrt[3]{1.3} - 1.09| < 0.5 \times 10^{-2}$, con lo cual se asegura una precisión de dos cifras decimales.

b) Aproximar el número e con un error menor que 10^{-5}.

Se considera la función $g(x) := e^x$ y se toma $x_0 = 0$ y $x = 1$ en el teorema de Taylor. Es necesario determinar n de tal modo que $|R_n(1)| < 10^{-5}$. Para ello, se usa el hecho de que $g'(x) = e^x$ y la cota inicial de $e^x \leq 3$ para $0 \leq x \leq 1$.

Puesto que $g'(x) = e^x$, se sigue que $g^{(k)}(x) = e^x$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $g^{(k)}(0) = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, el n-ésimo polinomio de Taylor está dado por

$$P_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

y el residuo para $x = 1$ está dado por $R_n(1) = e^c/(n+1)!$ para alguna c que satisface $0 < c < 1$. Puesto que $e^c < 3$, se busca un valor de n tal que $3/(n+1)! < 10^{-5}$. Un cálculo revela que $9! = 362\,880 > 3 \times 10^5$, por lo que el valor $n = 8$ proporcionará la precisión deseada; además, puesto que $8! = 40\,320$, no hay la seguridad de que sea suficiente un valor menor de n. Se obtiene, por tanto,

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2.718\,28$$

con un error menor que 10^{-5}. □

El teorema de Taylor también puede usarse para establecer desigualdades.

6.4.3 Ejemplos **a)** $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Usando $f(x) := \cos x$ y $x_0 = 0$ en el teorema de Taylor, se obtiene

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x),$$

donde para alguna c entre 0 y x se tiene

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{\operatorname{sen} c}{6}x^3.$$

Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $0 \leq c < \pi$; puesto que c y x^3 son ambas positivas, se tiene $R_2(x) \geq 0$. Asimismo, si $-\pi \leq x \leq 0$, entonces $-\pi \leq c \leq 0$; puesto que $\operatorname{sen} c$ y x^3 son ambas negativas, se tiene de nueva cuenta que $R_2(x) \geq 0$. Por tanto, se observa que $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ para $|x| \leq \pi$. Si $|x| \geq \pi$, entonces se tiene $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 \leq \cos x$ y es trivial la validez de la desigualdad. En consecuencia, la desigualdad se cumple para toda $x \in \mathbb{R}$.

b) Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y para toda $x > 0$, se tiene

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Utilizando el hecho de que la derivada de $\ln(1 + x)$ es $1/(1 + x)$ para $x > 0$, se observa que el n-ésimo polinomio de Taylor para $\ln(1 + x)$ con $x_0 = 0$ es

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

y el residuo está dado por

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n c^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$

para alguna c que satisface $0 < c < x$. Por tanto, para cualquier $x > 0$, si $n = 2k$ es par, entonces se tiene $R_{2k}(x) > 0$; y si $n = 2k + 1$ es impar, se tiene $R_{2k+1}(x) < 0$. Entonces la desigualdad enunciada se sigue de manera inmediata. □

Extremos relativos

En el teorema 6.2.1 se estableció que si una función $f: I \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto c interior del intervalo I, entonces una condición necesaria para que f tenga un extremo relativo en c es que $f'(c) = 0$. Una manera de determinar si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo [o ninguno de ellos] en c es usar el criterio de la primera derivada 6.2.8. En caso de existir, también se pueden usar en esta determinación las derivadas de orden superior, como se indica a continuación.

6.4.4 Teorema *Sea* I *un intervalo, sea* x_0 *un punto interior de* I *y sea* $n \geq 2$. *Suponer que las derivadas* $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ *existen y son continuas en una vecindad de* x_0 *y que* $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *pero* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

i) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *entonces* f *tiene un mínimo relativo en* x_0.
ii) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *entonces* f *tiene un máximo relativo en* x_0.
iii) *Si* n *es impar, entonces* f *no tiene ni máximo relativo ni mínimo relativo en* x_0.

Demostración. Si se aplica el teorema de Taylor en x_0, se encuentra que para $x \in I$ se tiene

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

donde c es algún punto entre x_0 y x. Puesto que $f^{(n)}$ es continua, si $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces existe un intervalo U que contiene a x_0 tal que $f^{(n)}(x)$ tendrá el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$ para $x \in U$. Si $x \in U$, entonces el punto c también pertenece a U y por consiguiente $f^{(n)}(c)$ y $f^{(n)}(x_0)$ tendrán el mismo signo.

i) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces para $x \in U$ se tiene $f^{(n)}(c) > 0$ y $(x - x_0)^n \geq 0$, de tal modo que $R_{n-1}(x) \geq 0$. En consecuencia, $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \in U$ y por lo tanto f tiene un mínimo relativo en x_0.

ii) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces se sigue que $R_{n-1}(x) \leq 0$ para $x \in U$, de tal modo que $f(x) \leq f(x_0)$ para $x \in U$. Por lo tanto, f tiene un máximo relativo en x_0.

iii) Si n es impar, entonces $(x - x_0)^n$ es positivo si $x > x_0$ y es negativo si $x < x_0$. Por consiguiente, si $x \in U$, entonces $R_{n-1}(x)$ tendrá signos opuestos a la izquierda y a la derecha de x_0. Por lo tanto, f no tiene ni mínimo relativo ni máximo relativo en x_0. Q.E.D.

Funciones convexas

La noción de convexidad desempeña un papel importante en varias áreas, en particular en la teoría moderna de optimización. Se examinan brevemente las funciones convexas de una variable real y su relación con la derivación. Los resultados básicos, cuando se modifican de la manera apropiada, pueden generalizarse a espacios de dimensiones superiores.

6.4.5 Definición Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que una función $f: I \to \mathbb{R}$ es **convexa** en I si para cualquier t que satisface $0 \leq t \leq 1$ y cualesquier puntos x_1, x_2 en I se tiene

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Adviértase que si $x_1 < x_2$, entonces cuando t varía de 0 a 1 el punto $(1 - t)x_1 + tx_2$ recorre el intervalo de x_1 a x_2. Por tanto, si f es convexa en I y si $x_1, x_2 \in I$, entonces la cuerda que une dos puntos cualesquiera $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ en la gráfica de f queda arriba de la gráfica de f. (Véase la figura 6.4.1.)

Una función convexa no es necesariamente derivable en cada punto, como lo indica el ejemplo $f(x) := |x|, x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, puede demostrarse que si I es

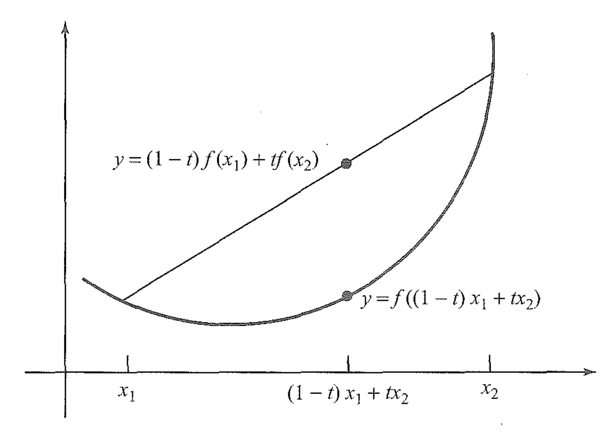


Figura 6.4.1 Una función convexa.

un intervalo abierto y si $f: I \to \mathbb{R}$ es convexa en I, entonces las derivadas izquierda y derecha de f existen en todo punto de I. Como consecuencia, se sigue que una función convexa en un intervalo abierto es necesariamente continua. No se probarán las afirmaciones anteriores ni se desarrollarán muchas otras interesantes propiedades de las funciones convexas, sino que nos limitaremos a establecer la conexión entre una función convexa f y su segunda derivada f'', suponiendo que f'' exista.

6.4.6 Teorema *Sea* I *un intervalo abierto y sea que* $f : I \to \mathbb{R}$ *tenga segunda derivada en* I. *Entonces* f *es una función convexa en* I *si y sólo si* $f''(x) \geq 0$ *para toda* $x \in I$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Se hará uso del hecho de que la segunda derivada está dada por el límite

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \tag{4}$$

para toda $a \in I$. (Véase el ejercicio 16.) Dada $a \in I$, sea h tal que $a + h$ y $a - h$ pertenecen a I. Entonces $a = \frac{1}{2}((a + h) + (a - h))$, y como f es convexa en I, se tiene

$$f(a) = f(\tfrac{1}{2}(a + h) + \tfrac{1}{2}(a - h)) \leq \tfrac{1}{2}f(a + h) + \tfrac{1}{2}f(a - h).$$

Por tanto, se tiene $f(a + h) - 2f(a) + f(a - h) \geq 0$. Puesto que $h^2 > 0$ para toda $h \neq 0$, se observa que el límite en (4) debe ser no negativo. En consecuencia, se obtiene $f''(a) \geq 0$ para toda $a \in I$.

($\Leftarrow$) Se usará el teorema de Taylor. Sean x_1, x_2 dos puntos cualesquiera de I, sea $0 < t < 1$ y sea $x_0 := (1 - t)x_1 + tx_2$. Al aplicar el teorema de Taylor a f en x_0, se obtiene un punto c_1 entre x_0 y x_1 tal que

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2,$$

y un punto c_2 entre x_0 y x_2 tal que

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Si f'' es no negativa en I, entonces el término

$$R := \tfrac{1}{2}(1 - t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \tfrac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2$$

también es no negativo. Se obtiene, por tanto,

$$\begin{aligned}(1 - t)f(x_1) + tf(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)((1 - t)x_1 + tx_2 - x_0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(1 - t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \tfrac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + R \\ &\geq f(x_0) = f((1 - t)x_1 + tx_2).\end{aligned}$$

En consecuencia, f es una función convexa en I. Q.E.D.

Método de Newton

Con frecuencia es deseable estimar una solución de una ecuación con un grado elevado de precisión. El método de bisección, usado en la demostración del teorema de localización de raíces 5.3.5, proporciona un procedimiento de estimación, pero presenta la desventaja de converger a una solución con mucha lentitud. Un método que con frecuencia produce una convergencia mucho más rápida se basa en la idea geométrica de obtener aproximaciones sucesivas de una curva por rectas tangentes. El nombre de este método es en honor de su descubridor, Isaac Newton.

Sea f una función derivable que tiene un cero en r y sea x_1 una estimación inicial de r. La recta tangente a la gráfica en $(x_1, f(x_1))$ tiene la ecuación $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ y corta el eje x en el punto

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

(Véase la figura 6.4.2.) Si se sustituye x_1 por la segunda estimación x_2, entonces se obtiene un punto x_3, y así sucesivamente. En la n-ésima iteración se obtiene el punto x_{n+1} a partir del punto x_n por la fórmula

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Bajo las hipótesis adecuadas, la sucesión (x_n) convergerá con rapidez a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, como se demuestra enseguida. El elemento clave para establecer la rapidez de la convergencia es el teorema de Taylor.

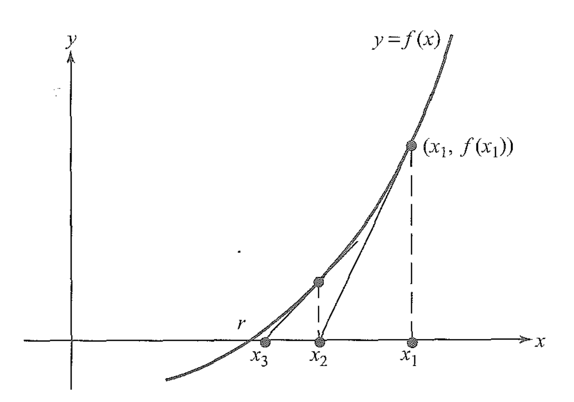


Figura 6.4.2 El método de Newton.

6.4.7 Método de Newton *Sea* $I := [a, b]$ *y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivable dos veces en* I. *Suponer que* $f(a)f(b) < 0$ *y que existen las constantes* m, M *tales que* $|f'(x)| \geq m > 0$ *y* $|f''(x)| \leq M$ *para toda* $x \in I$ *y sea* $K := M/2m$. *Entonces existe un subin-*

tervalo I* *que contiene un cero* r *de* f *tal que para cualquier* $x_1 \in I^*$ *la sucesión* (x_n) *definida por*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

pertenece a I* *y* (x_n) *converge a* r. *Además,*

$$|x_{n+1} - r| \leq K\,|x_n - r|^2 \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Demostración. Puesto que $f(a)f(b) < 0$, los números $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos; por tanto, por el teorema 5.3.5, existe $r \in I$ tal que $f(r) = 0$. Puesto que f' nunca es cero en I, por el teorema de Rolle se sigue que f no se anula en ningún otro punto de I.

Se hace ahora que $x' \in I$ sea arbitraria; por el teorema de Taylor, existe un punto c' entre x' y r tal que

$$0 = f(r) = f(x') + f'(x')(r - x') + \tfrac{1}{2}f''(c')(r - x')^2,$$

de donde se sigue que

$$-f(x') = f'(x')(r - x') + \tfrac{1}{2}f''(c')(r - x')^2.$$

Si x'' es el número definido a partir de x' por "el procedimiento de Newton":

$$x'' := x' - \frac{f(x')}{f'(x')},$$

entonces un cálculo elemental indica que

$$x'' = x' + (r - x') + \frac{1}{2}\frac{f''(c')}{f'(x')}(r - x')^2,$$

de donde se sigue que

$$x'' - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c')}{f'(x')}(x' - r)^2,$$

Puesto que $c' \in I$, las cotas supuestas sobre f' y f'' se cumplen y, al hacer $K := M/2m$, se obtiene la desigualdad

$$|x'' - r| \leq K\,|x' - r|^2. \tag{7}$$

Se elige ahora $\delta > 0$ tan pequeña que $\delta < 1/K$ y que el intervalo $I^* := [r - \delta, r + \delta]$ está contenido en I. Si $x_n \in I^*$, entonces $|x_n - r| \leq \delta$ y de (7) se sigue que $|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 \leq K\delta^2 < \delta$; y en consecuencia, $x_n \in I^*$ implica que $x_{n+1} \in I^*$. Por lo tanto, si $x_1 \in I^*$, se infiere que $x_n \in I^*$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Asimismo,

si $x_1 \in I^*$, entonces un razonamiento elemental de inducción matemática utilizando (7) establece que $|x_{n+1} - r| < (K\delta)^n |x_1 - r|$ para $n \in \mathbb{N}$. Pero como $K\delta < 1$, con esto se demuestra que $\lim(x_n) = r$. Q.E.D.

6.4.8 Ejemplo Se ilustra el método de Newton utilizándolo para aproximar $\sqrt{2}$.

Si se hace $f(x) := x^2 - 2$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces se busca la raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que $f'(x) = 2x$, la fórmula de iteración es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Si se toma $x_1 := 1$ como la estimación inicial, se obtienen los valores sucesivos $x_2 = 3/2 = 1.5$, $x_3 = 17/12 = 1.416\,666 \cdots$, $x_4 = 577/408 = 1.414\,215 \cdots$ y $x_5 = 665\,857/470\,832 = 1.414\,213\,562\,374 \cdots$, que es correcto con once cifras decimales. □

Observaciones **a)** Si se hace que $e_n := x_n - r$ sea el error al aproximar r, entonces la desigualdad (6) puede escribirse en la forma $|Ke_{n+1}| \le |Ke_n|^2$. Por consiguiente, si $|Ke_n| < 10^{-m}$, entonces $|Ke_{n+1}| < 10^{-2m}$, por lo que el número de dígitos significativos en Ke_n se ha duplicado. Debido a esta duplicación, se dice que la sucesión generada por el método de Newton converge "cuadráticamente".

b) En la práctica, cuando el método de Newton se programa en una computadora, suele hacerse una conjetura inicial x_1 y después se ejecuta el programa. Si la elección de x_1 es muy deficiente o si la raíz está muy cerca del punto terminal de I, el procedimiento quizá no converja a un cero de f. En las figuras 6.4.3 y 6.4.4 se ilustran dos posibles dificultades. Una estrategia muy socorrida consiste en usar el método de bisección para llegar a una estimación bastante próxima a la raíz y después cambiar al método de Newton para el *coup de grâce*.

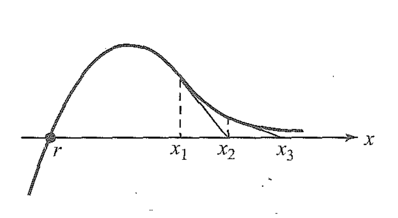


Figura 6.4.3 $x_n \to \infty$.

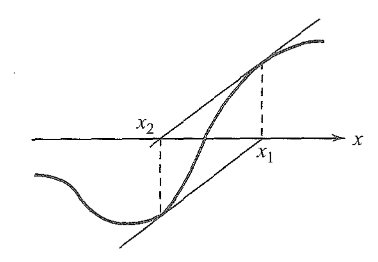


Figura 6.4.4 x_n oscila entre x_1 y x_2.

Ejercicios de la sección 6.4

1. Sea $f(x) := \cos ax$ para $x \in \mathbb{R}$, donde $a \neq 0$. Encontrar $f^{(n)}(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Sea $g(x) := |x^3|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encontrar $g'(x)$ y $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Demostrar que $g'''(0)$ no existe.

3. Utilizar la inducción matemática para demostrar la regla de Leibniz para la n-ésima derivada de un producto:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

4. Demostrar que si $x > 0$, entonces $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

5. Usar el ejercicio precedente para aproximar $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$. ¿Cuál es la precisión de la que se puede tener la seguridad usando esta desigualdad?

6. Utilizar el teorema de Taylor con $n = 2$ para obtener aproximaciones más precisas de $\sqrt{1.2}$ y $\sqrt{2}$.

7. Si $x > 0$, demostrar que $|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2)| \leq (5/81)x^3$. Usar esta desigualdad para aproximar $\sqrt[3]{1.2}$ y $\sqrt[3]{2}$.

8. Si $f(x) := e^x$, demostrar que el término del residuo en el teorema de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$ para cada x_0 fija y x. [*Sugerencia:* véase el teorema 3.2.11.]

9. Si $g(x) := \operatorname{sen} x$, demostrar que el término del residuo en el teorema de Taylor converge a cero cuando $n \to \infty$ para cada x_0 fija y x.

10. Sea $h(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ y $h(0) := 0$. Demostrar que $h^{(n)}(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluir que el término del residuo en el teorema de Taylor para $x_0 = 0$ *no* converge a cero cuando $n \to \infty$ para $x \neq 0$. [*Sugerencia:* por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} h(x)/x^k = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Usar el ejercicio 3 para calcular $h^{(n)}(x)$ para $x \neq 0$.]

11. Si $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Utilizar esta expresión para aproximar ln 1.5 con un error menor que 0.01. Menor que 0.001.

12. Quiere aproximarse la función sen con un polinomio en $[-1, 1]$ de tal modo que el error sea menor que 0.001. Demostrar que se tiene

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \right| < \frac{1}{5040} \quad \text{para} \quad |x| \leq 1.$$

13. Calcular e con siete cifras decimales de precisión.

14. Determinar si $x = 0$ es o no el punto de un extremo relativo de las siguientes funciones:

a) $f(x) := x^3 + 2$, b) $g(x) := \operatorname{sen} x - x$,
c) $h(x) := \operatorname{sen} x + \frac{1}{6}x^3$, d) $k(x) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

15. Sea f continua en $[a, b]$ y suponer que la segunda derivada f'' existe en (a, b). Suponer que la gráfica de f y el segmento de recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ se cortan en un punto $(x_0, f(x_0))$, donde $a < x_0 < b$. Demostrar que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

16. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable en I y suponer que $f''(a)$ existe en $a \in I$. Demostrar que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Dar un ejemplo donde este límite exista, pero la función no tenga segunda derivada en a.

17. Suponer que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y que $f''(x) \geq 0$ para toda $x \in I$. Si $c \in I$, demostrar que la parte de la gráfica de f en I nunca está debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

18. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $c \in I$. Suponer que f y g están definidas en I y que las derivadas $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ existen y son continuas en I. Si $f^{(k)}(c) = 0$ y $g^{(k)}(c) = 0$ para $k = 0, 1, \cdots, n-1$, pero $g^{(n)}(c) \neq 0$, demostrar que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

19. Demostrar que la función $f(x) := x^3 - 2x - 5$ tiene un cero r en el intervalo $I := [2, 2.2]$. Si $x_1 := 2$ y si la sucesión (x_n) se define usando el procedimiento de Newton, demostrar que $|x_{n+1} - r| \leq (0.7)|x_n - r|^2$. Demostrar que x_4 tiene una precisión dentro de seis cifras decimales.

20. Aproximar los ceros reales de $g(x) := x^4 - x - 3$.

21. Aproximar los ceros reales de $h(x) := x^3 - x - 1$. Aplicar el método de Newton empezando con las elecciones iniciales: a) $x_1 := 2$, b) $x_1 := 0$, c) $x_1 := -2$. Explicar lo que ocurre.

22. La ecuación $\ln x = x - 2$ tiene dos soluciones. Aproximarlas usando el método de Newton. ¿Qué ocurre si $x_1 := \frac{1}{2}$ es el punto inicial?

23. La función $f(x) = 8x^3 - 8x^2 + 1$ tiene dos raíces en $[0, 1]$. Aproximarlas usando el método de Newton con los puntos iniciales: a) $x_1 := \frac{1}{8}$, b) $x_1 := \frac{1}{4}$. Explicar lo que ocurre.

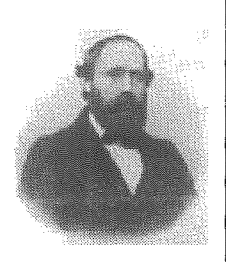
24. Aproximar la solución de la ecuación $x = \cos x$ con una precisión de seis cifras decimales.

Capítulo 7

LA INTEGRAL DE RIEMANN

Se ha hecho mención ya de los desarrollos realizados durante los años 1630 por Fermat y Descartes que llevaron a la geometría analítica y a la teoría de la derivada. Sin embargo, el tema que hoy conocemos como cálculo no empezó a tomar forma sino hasta fines de los años 1660, cuando Isaac Newton creó su teoría de las "fluxiones" e inventó el método de las "tangentes inversas" para encontrar el área bajo una curva. El proceso inverso de encontrar rectas tangentes para encontrar áreas también fue descubierto en los años 1680 por Gottfried Liebniz, quien no tenía conocimiento del trabajo inédito de Newton y llegó al descubrimiento por un camino muy diferente. Leibniz introdujo la terminología "*calculus differentialis*"

Bernhard Riemann



(Georg Friedrich) Bernhard Riemann (1826-1866), hijo de un ministro luterano pobre, nació cerca de Hanover, en Alemania. Para complacer a su padre, ingresó en 1846 a la Universidad de Gotinga como estudiante de teología y filosofía, pero pronto optó por las matemáticas. Interrumpió sus estudios en Gotinga para estudiar en Berlín con C. G. J. Jacobi, P. G. J. Dirichlet y F. G. Eisenstein, pero volvió a Gotinga en 1849 para terminar su tesis con Gauss. Su tesis versaba sobre lo que hoy se conoce como "superficies de Riemann". Gauss se entusiasmó a tal punto con el trabajo de Riemann que hizo los arreglos para que fuera nombrado *privatdozent* en Gotinga en 1854. Para ser admitido como *privatdozent* se requería que Riemann demostrara su capacidad dictando una conferencia frente a todos los miembros de la facultad. Como lo dictaba la tradición, puso a consideración tres temas, cuya discusión dominaba en el caso de los dos primeros. Para sorpresa de Riemann, Gauss decidió que debía dictar su conferencia sobre el tercer tema: "De las hipótesis que se encuentran detrás de los fundamentos de la geometría". Después de su publicación, esta disertación tuvo un profundo efecto sobre la geometría moderna.

No obstante que Riemann contrajo tuberculosis y murió a los 39 años de edad, realizó importantes contribuciones en varias áreas: los fundamentos de la geometría, teoría de los números, análisis real y complejo, topología y física matemática.

y "*calculus integralis*", ya que para encontrar rectas tangentes se empleaban diferencias y para encontrar áreas se utlizaban sumas. Así, ambos descubrieron que la integración, siendo un proceso de sumas, era el inverso de la operación de derivación.

Durante un siglo y medio de desarrollo y depuración de las técnicas, el cálculo consistió en este par de operaciones inversas y sus aplicaciones, principalmente en problemas de física. Durante los años 1850, Bernhard Riemann adoptó una perspectiva nueva y diferente. Separó el concepto de integración de su contraparte, la derivación, y examinó el interesante proceso de sumas y límites en sí mismo. Amplió el panorama al considerar todas las funciones en un intervalo para el que este proceso de "integración" podía definirse: la clase de las funciones "integrables". El teorema fundamental del cálculo pasó a ser un resultado válido únicamente para un conjunto restringido de funciones integrables. La perspectiva de Riemann llevó a otros matemáticos a inventar otras teorías de la integración, la más significativa de las cuales es la de Lebesgue. Pero ha habido algunos avances en tiempos más recientes que amplían en grado considerable incluso la teoría de Lebesgue. En el capítulo 10 se presenta una breve introducción a estos resultados.

Se empieza definiendo el concepto de integrabilidad de Riemann de funciones con valores reales definidas en un intervalo acotado cerrado de $\mathbb{R}$, donde se usan las sumas de Riemann, familiares para el lector por sus cursos previos de cálculo. Este método tiene la ventaja de que es inmediata su generalización al caso de las funciones cuyos valores son números complejos, o vectores en el espacio $\mathbb{R}^n$. En la sección 7.2 se establece la integrabilidad de Riemann de varias clases importantes de funciones: funciones escalonadas, funciones continuas y funciones monótonas. Sin embargo, se verá también que hay funciones que *no* son Riemann integrables. El teorema fundamental del cálculo es el resultado principal de la sección 7.3. Se presentará en una forma un poco más general de lo acostumbrado y no requiere que la función sea una derivada en cada punto del intervalo. Se presentan asimismo varias consecuencias importantes del teorema fundamental. En la sección 7.3 se ofrece también un enunciado del decisivo criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann. No es común presentar este famoso resultado en libros de este nivel, ya que su demostración (incluida en el apéndice C) es un tanto complicada. Sin embargo, su enunciación está dentro del alcance de los estudiantes, quienes entenderán también el poder de este resultado. En la sección final se presentan varios métodos para aproximar integrales, un tema que ha adquirido importancia creciente durante esta era de las computadoras de alta velocidad. Aun cuando las demostraciones de estos resultados no son particularmente complicados, se posponen hasta el apéndice D.

Una interesante historia de la teoría de la integración, que incluye un capítulo sobre la integral de Riemann, se presenta en el libro de Hawkins citado en la bibliografía.

SECCIÓN 7.1 La integral de Riemann

Se sigue el procedimiento usado comúnmente en los cursos de cálculo y se define la integral de Riemann como una clase de límite de las sumas de Riemann cuando la norma de las particiones tiende a cero. Puesto que se supone que el lector se

encuentra familiarizado –al menos informalmente– con la integral por un curso de cálculo previo, no se proporciona una motivación de la integral ni se discute su interpretación como el "área bajo la gráfica" ni sus múltiples aplicaciones en física, ingeniería, economía, etc. En vez de ello, la atención se centra en los aspectos puramente matemáticos de la integral.

Sin embargo, se recordarán primero algunos términos básicos que se usarán con frecuencia.

Particiones y particiones etiquetadas

Si $I := [a, b]$ es un intervalo acotado cerrado en $\mathbb{R}$, entonces una **partición** de I es un conjunto finito ordenado $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ de puntos en I tales que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(Véase la figura 7.1.1.) Los puntos de $\mathcal{P}$ se usan para dividir $I = [a, b]$ en los subintervalos no traslapados

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], \cdots, I_n := [x_{n-1}, x_n].$$

$a = x_0$ x_1 x_2 x_3 x_{n-1} $x_n = b$

Figura 7.1.1 Una partición de $[a, b]$.

Con frecuencia se denotará la partición $\mathcal{P}$ por la notación $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$. Se define la **norma** (o **retícula**) de $\mathcal{P}$ como el número

$$\|\mathcal{P}\| := \text{máx}\,\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{1}$$

Así, la norma de una partición es tan sólo la longitud del subintervalo más grande en que la partición divide a $[a, b]$. Evidentemente, muchas particiones tienen la misma norma, por lo que la partición *no* es una función de la norma.

Si se ha seleccionado un punto t_i de cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces a los puntos se les llama las **etiquetas** de los subintervalos I_i. A un conjunto de pares ordenados

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$$

de subintervalos y las etiquetas correspondientes se le llama **partición etiquetada** de I; veáse la figura 7.1.2. (El punto sobre la $\mathcal{P}$ indica que se ha elegido una etiqueta para cada subintervalo.) Las etiquetas pueden elegirse de manera totalmente arbitraria; por ejemplo, puede elegirse que las etiquetas sean los puntos terminales izquierdos, los puntos terminales derechos o los puntos medios de los subintervalos, etc. Adviértase que un punto terminal de un subintervalo puede usarse como etiqueta para dos subintervalos consecutivos. Puesto que hay un

número infinito de maneras para elegir cada etiqueta, también hay un número infinito de maneras en que puede etiquetarse cada partición. La norma de una partición etiquetada se define como en el caso de una partición ordinaria y no depende de la elección de las etiquetas.

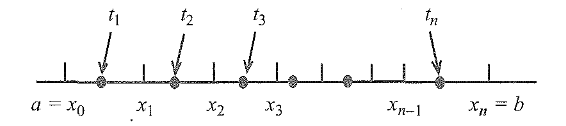


Figura 7.1.2 Una partición etiquetada de $[a, b]$.

Si $\dot{\mathcal{P}}$ es la partición etiquetada dada arriba, la **suma de Riemann** de una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ correspondiente a $\dot{\mathcal{P}}$ se define como el número

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

También se usará esta notación cuando $\dot{\mathcal{P}}$ denote un *subconjunto* de una partición y no la partición completa.

El lector se percatará de que si la función f es positiva en $[a, b]$, entonces la suma de Riemann (2) es la suma de las áreas de n rectángulos cuyas bases son los subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y cuyas alturas son $f(t_i)$. (Véase la figura 7.1.3.)

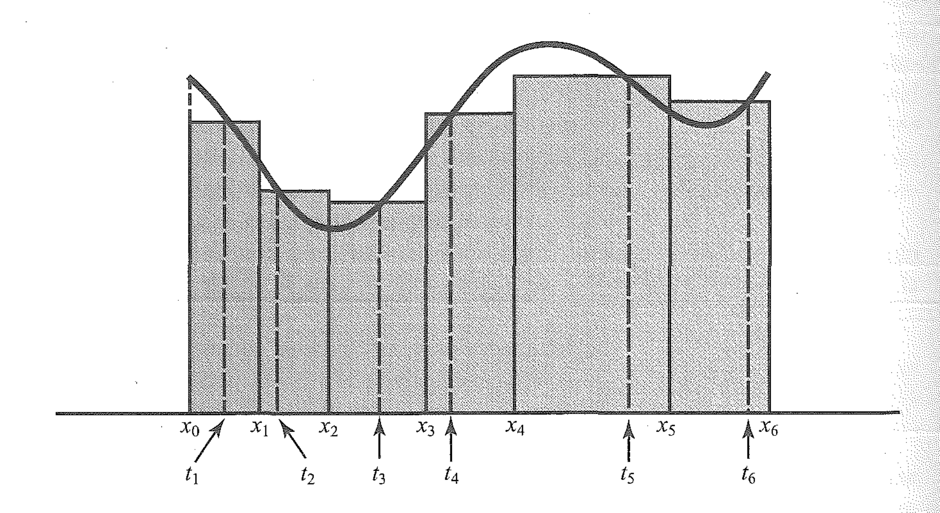


Figura 7.1.3 Una suma de Riemann.

Definición de la integral de Riemann

Se define ahora la integral de Riemann de una función f en un intervalo $[a, b]$.

7.1.1 Definición Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable** en $[a, b]$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

El conjunto de todas las funciones Riemann integrables en $[a, b]$ se denotará por $\mathcal{R}[a, b]$.

Observación En ocasiones se dice que la integral L es "el límite" de las sumas de Riemann $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ cuando la norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| \to 0$. Sin embargo, ya que $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ no es una función de $\|\dot{\mathcal{P}}\|$, este límite no es del tipo que se ha venido considerando.

Primero se demostrará que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces el número L se encuentra determinado de manera única. Se le llamará la **integral de Riemann de** f en $[a, b]$. En lugar de L, por lo general se escribirá

$$L = \int_a^b f \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Deberá entenderse que puede usarse cualquier otra letra en vez de x en la última expresión, en tanto esto no cause ninguna ambigüedad.

7.1.2 Teorema *Si* f $\in \mathcal{R}$[a, b], *entonces el valor de la integral se encuentra determinado de manera única.*

Demostración. Suponer que tanto L' como L'' satisfacen la definición y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta'_{\varepsilon/2} > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_1$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta'_{\varepsilon/2}$, entonces

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}_1) - L'| < \varepsilon/2.$$

También existe $\delta''_{\varepsilon/2} > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_2$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta''_{\varepsilon/2}$, entonces

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}_2) - L''| < \varepsilon/2.$$

Ahora sea $\delta_\varepsilon := \text{mín}\{\delta'_{\varepsilon/2}, \delta''_{\varepsilon/2}\} > 0$ y sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$. Puesto que tanto $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta'_{\varepsilon/2}$ y $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta''_{\varepsilon/2}$, entonces

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon/2,$$

de donde, por la desigualdad del triángulo, se sigue que

$$\begin{aligned} |L' - L''| &= |L' - S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L''| \\ &\le |L' - S(f;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L''| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que $L' = L''$. Q.E.D.

Algunos ejemplos

Si sólo se usa la definición para demostrar que una función f es Riemann integrable es necesario: (i) conocer (o conjeturar correctamente) el valor L de la integral, y (ii) construir una δ_ε que sea suficiente para una $\varepsilon > 0$ arbitraria. La determinación de L se hace en ocasiones calculando las sumas de Riemann y conjeturando cuál debe ser L. Es probable que la determinación de δ_ε resulte complicada.

En la práctica, por lo general se demuestra que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ haciendo uso de algunos de los teoremas que se presentarán más adelante.

7.1.3 Ejemplos **a)** Toda función constante en $[a, b]$ está en $\mathcal{R}[a, b]$.

Sea $f(x) := k$ para toda $x \in [a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$, entonces es evidente que

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

En consecuencia, para cualquier $\varepsilon > 0$ puede elegirse $\delta_\varepsilon := 1$, de tal modo que si $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - k(b-a)| = 0 < \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\int_a^b f = k(b-a)$.

b) Sea que $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ esté definida por $g(x) := 2$ para $0 \le x \le 1$ y por $g(x) := 3$ para $1 < x \le 3$. Una investigación preliminar, basada en la gráfica de g (véase la figura 7.1.4), sugiere que cabría esperar que $\int_0^3 g = 8$.

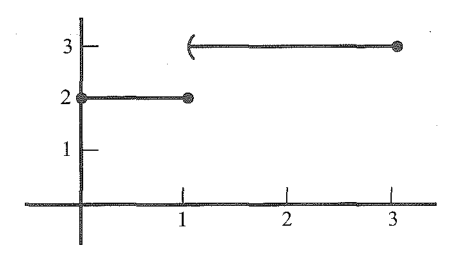


Figura 7.1.4 Gráfica de g.

Sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada de [0, 3] con norma $< \delta$; se indicará cómo determinar δ a fin de asegurar que $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - 8| < \varepsilon$. Sea $\dot{\mathcal{P}}_1$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ que tiene sus etiquetas en [0, 1], donde $g(x) = 2$, y sea $\dot{\mathcal{P}}_2$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ con sus etiquetas en (1, 3], donde $g(x) = 3$. Es obvio que se tiene

$$S(g;\dot{\mathcal{P}}) = S(g;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(g;\dot{\mathcal{P}}_2). \qquad (3)$$

Puesto que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, si $u \in [0, 1-\delta]$ y $u \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces $x_{i-1} \le 1-\delta$ de tal modo que $x_i < x_{i-1} + \delta \le 1$, de donde la etiqueta $t_i \in [0, 1]$. Por lo tanto, el intervalo $[0, 1-\delta]$ está contenido en la unión de todos los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas $t_i \in [0, 1]$. Del mismo modo, esta unión está contenida en $[0, 1+\delta]$. (¿Por qué?) Puesto que $g(t_i) = 2$ para estas etiquetas, se tiene

$$2(1-\delta) \le S(g;\dot{\mathcal{P}}_1) \le 2(1+\delta).$$

Con un razonamiento similar, se establece que la unión de todos los subintervalos con etiquetas $t_i \in (1, 3]$ contiene el intervalo $[1+\delta, 3]$ de longitud $2-\delta$, y que está contenida en $[1-\delta, 3]$ de longitud $2+\delta$. Por lo tanto,

$$3(2-\delta) \le S(g;\dot{\mathcal{P}}_2) \le 3(2+\delta).$$

Sumando estas desigualdades y usando la ecuación (3), se tiene

$$8 - 5\delta \le S(g;\dot{\mathcal{P}}) = S(g;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(g;\dot{\mathcal{P}}_2) \le 8 + 5\delta,$$

de donde se sigue que

$$\left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - 8\right| \le 5\delta.$$

Para que este término final sea menor que ε es necesario tomar $\delta_\varepsilon < \varepsilon/5$.

Al hacer esta elección (por ejemplo, si se toma $\delta_\varepsilon := \varepsilon/10$), el razonamiento puede seguirse en sentido inverso y ver que $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - 8| < \varepsilon$ cuando $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se ha demostrado que $g \in \mathcal{R}[0, 3]$ y que $\int_0^3 g = 8$, como se había anticipado.

c) Sea $h(x) := x$ para $x \in [0, 1]$; se demostrará que $h \in \mathcal{R}[0, 1]$.

Se recurre a un "truco" que permitirá conjeturar el valor del intervalo considerando una elección particular de los puntos de las etiquetas. De hecho, si $\{I_i\}_{i=1}^n$ es cualquier partición de [0, 1] y se elige la etiqueta del intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ como el punto medio $q_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$, entonces la contribución de este término a la suma de Riemann correspondiente a la partición etiquetada $\dot{\mathcal{Q}} := \{(I_i, q_i)\}_{i=1}^n$ es

$$h(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \tfrac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2).$$

Si se suman estos términos y se advierte que la suma es telescópica, se obtiene

$$S(h;\dot{Q}) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \tfrac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \tfrac{1}{2}.$$

Ahora, sea $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ una partición etiquetada arbitraria de $[0, 1]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, de modo que $x_i - x_{i-1} < \delta$ para $i = 1, \cdots, n$. Sea asimismo que $\dot{Q}$ tenga los mismos puntos de partición, pero donde se elige que la etiqueta q_i sea el punto medio del intervalo I_i. Puesto que tanto t_i como q_i pertenecen a este intervalo, se tiene $|t_i - q_i| < \delta$. Aplicando la desigualdad del triángulo, se deduce que

$$\left|S(h;\dot{\mathcal{P}}) - S(h;\dot{Q})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |t_i - q_i|(x_i - x_{i-1}) < \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta(x_n - x_0) = \delta.$$

Puesto que $S(h;\dot{Q}) = \frac{1}{2}$, se infiere que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, entonces

$$\left|S(h;\dot{\mathcal{P}}) - \tfrac{1}{2}\right| < \delta.$$

Por lo tanto, es necesario tomar $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$. Si se elige $\delta_\varepsilon := \varepsilon$, el razonamiento puede seguirse en sentido inverso para concluir que $h \in \mathcal{R}[0, 1]$ y $\int_0^1 h = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

d) Sea $F(x) := 1$ para $x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, y $F(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. Se demostrará que $F \in \mathcal{R}[0, 1]$ y que $\int_0^1 F = 0$.

En este caso hay cuatro puntos donde F no es 0, cada uno de los cuales pertenece a dos subintervalos en una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ dada. Sólo estos términos tendrán una contribución diferente de cero a $S(F;\dot{\mathcal{P}})$. Por tanto, se elige $\delta_\varepsilon := \varepsilon/8$.

Si $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, sea $\dot{\mathcal{P}}_0$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas diferentes de $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, y $\dot{\mathcal{P}}_1$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas en esos puntos. Puesto que $S(F;\dot{\mathcal{P}}_0) = 0$, se observa que $S(F;\dot{\mathcal{P}}) = S(F;\dot{\mathcal{P}}_0) + S(F;\dot{\mathcal{P}}_1) = S(F;\dot{\mathcal{P}}_1)$. Puesto que hay a lo sumo ocho términos en $S(F;\dot{\mathcal{P}}_1)$ y cada término es $< 1 \cdot \delta_\varepsilon$, se concluye que $0 \leq S(F;\dot{\mathcal{P}}) = S(F;\dot{\mathcal{P}}_1) < 8\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Por tanto, $F \in \mathcal{R}[0, 1]$ y $\int_0^1 F = 0$.

e) Sea $G(x) := 1/n$ para $x = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ y $G(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea E_ε el conjunto (finito) de puntos donde $G(x) \geq \varepsilon$, sea n_ε el número de puntos en E_ε y sea $\delta_\varepsilon := \varepsilon/(2n_\varepsilon)$. Sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada tal que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$. Sea $\dot{\mathcal{P}}_0$ el subconjunto de $\mathcal{P}$ con etiquetas fuera de E_ε y sea $\dot{\mathcal{P}}_1$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas en E_ε. Como en el inciso d), se tiene

$$0 \leq S(G;\dot{\mathcal{P}}) = S(G;\dot{\mathcal{P}}_1) < (2n_\varepsilon)\delta_\varepsilon = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $G \in \mathcal{R}[0, 1]$ y $\int_0^1 G = 0$. □

Algunas propiedades de la integral

Las dificultades presentes al determinar el valor de la integral y de δ_ε sugieren que sería de gran utilidad contar con algunos teoremas generales. El primer resultado en esta dirección permite formar ciertas combinaciones algebraicas de funciones integrables.

7.1.4 Teorema *Suponer que* f *y* g *están en* $\mathcal{R}[a, b]$. *Entonces:*
a) *Si* $k \in \mathbb{R}$, *la función* kf *está en* $\mathcal{R}[a, b]$ *y*

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

b) *La función* f + g *está en* $\mathcal{R}[a, b]$ *y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

c) *Si* $f(x) \le g(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Demostración. Si $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a, b]$, entonces es un ejercicio sencillo demostrar que

$$S(kf;\dot{\mathcal{P}}) = kS(f;\dot{\mathcal{P}}),\quad S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(g;\dot{\mathcal{P}}),$$
$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S(g;\dot{\mathcal{P}}).$$

Se le deja al lector demostrar que la afirmación del inciso a) se sigue de la primera igualdad. En calidad de ejemplo, se completarán las demostraciones de los incisos b) y c).

Dada $\varepsilon > 0$, puede recurrirse al razonamiento usado en la demostración del teorema de unicidad 7.1.2 para construir un número $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon/2 \quad\text{y}\quad \left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Para establecer el inciso b), se observa que

$$\begin{aligned}\left|S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| &= \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f - \int_a^b g\right|\\ &\le \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| + \left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right|\\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ y que su integral es la suma de las integrales de f y g.

Para establecer el inciso c), se observa que la desigualdad del triángulo aplicada a (4) implica

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < S(f; \dot{\mathcal{P}}) \text{ y } S(g; \dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b g + \varepsilon/2.$$

Si se usa el hecho de que $S(f; \dot{\mathcal{P}}) \leq S(g; \dot{\mathcal{P}})$, se tiene

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g + \varepsilon.$$

Pero, ya que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Q.E.D.

Teorema de acotabilidad

Se demuestra a continuación que una función no acotada no puede ser Riemann integrable.

7.1.5 Teorema *Si* f $\in \mathcal{R}$[a, b], *entonces* f *está acotada en* [a, b].

Demostración. Suponer que f es una función no acotada en $\mathcal{R}[a, b]$ con integral L. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, entonces se tiene $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < 1$, lo cual implica que

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}})\right| < |L| + 1. \tag{5}$$

Ahora, sea $\mathcal{Q} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{n=1}^{n}$ una partición de $[a, b]$ con $\|\mathcal{Q}\| < \delta$. Puesto que $|f|$ no está acotada en $[a, b]$, entonces existe al menos un subintervalo en $\mathcal{Q}$, digamos $[x_{k-1}, x_k]$, donde $|f|$ no está acotada –pues si $|f|$ está acotada en todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por M_i, entonces está acotada en $[a, b]$ por $\text{máx}\{M_1, \cdots, M_n\}$.

Se escogerán ahora etiquetas para $\mathcal{Q}$ que llevarán a una contradicción en (5). Se etiqueta $\mathcal{Q}$ por $t_i := x_i$ para $i \neq k$ y se escoge $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$\left|f(t_k)(x_k - x_{k-1})\right| > |L| + 1 + \left|\sum_{i \neq k}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|.$$

Por la desigualdad del triángulo (en la forma $|A + B| \geq |A| - |B|$), se tiene

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{Q}})\right| \geq \left|f(t_k)(x_k - x_{k-1})\right| - \left|\sum_{i \neq k}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| > |L| + 1,$$

que contradice (5). Q.E.D.

Se concluye esta sección con un ejemplo de una función que es discontinua en todo número racional y no es monótona, pero que, no obstante, es Riemann integrable.

7.1.6 Ejemplo Se considera la función de Thomae $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida, como en el ejemplo 5.1.5h, por $h(x) := 0$ si $x \in [0, 1]$ es irracional, $h(0) := 1$ y por $h(x) := 1/n$ si $x \in [0, 1]$ es el número racional $x = m/n$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ no tienen factores enteros comunes excepto 1. En el ejemplo 5.1.5h se vio que h es continua en todo número irracional y que es discontinua en todo número racional en [0, 1]. Se demostrará ahora que $h \in \mathcal{R}[0, 1]$.

Sea $\varepsilon > 0$; entonces el conjunto $E_\varepsilon := \{x \in [0, 1] : h(x) \geq \varepsilon/2\}$ es un conjunto finito. Se hace que n_ε sea el número de elementos en E_ε y sea $\delta_\varepsilon := \varepsilon/(4n_\varepsilon)$. Si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, sea $\dot{\mathcal{P}}_1$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ que tiene etiquetas en E_ε y sea $\dot{\mathcal{P}}_2$ el subconjunto de $\dot{\mathcal{P}}$ que tiene etiquetas en cualquier otro punto de [0, 1]. Se observa que $\dot{\mathcal{P}}_1$ tiene a lo sumo $2n_\varepsilon$ intervalos cuya longitud total es $< 2n_\varepsilon\delta_\varepsilon = \varepsilon/2$ y que $0 < h(t_i) \leq 1$ para cada etiqueta en $\dot{\mathcal{P}}_1$. La longitud total de los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}_2$ también es ≤ 1 y $h(t_i) < \varepsilon/2$ para toda etiqueta en $\dot{\mathcal{P}}_2$. Se tiene, por lo tanto,

$$\left|S(h;\dot{\mathcal{P}})\right| = S(h;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(h;\dot{\mathcal{P}}_2) < 1 \cdot 2n_\varepsilon\delta_\varepsilon + (\varepsilon/2)\cdot 1 = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que $h \in \mathcal{R}[0, 1]$ con integral 0. □

Ejercicios de la sección 7.1

1. Si $I := [0, 4]$, calcular las normas de las siguientes particiones:

   a) $\mathcal{P}_1 := (0, 1, 2, 4)$, b) $\mathcal{P}_2 := (0, 2, 3, 4)$,
   c) $\mathcal{P}_3 := (0, 1, 1.5, 2, 3.4, 4)$, d) $\mathcal{P}_4 := (0, .5, 2.5, 3.5, 4)$.

2. Si $f(x) := x^2$ para $x \in [0, 4]$, calcular las siguientes sumas de Riemann, donde $\dot{\mathcal{P}}_i$ tiene los mismos puntos de partición que en el ejercicio 1 y las etiquetas se seleccionan como se indica.

   a) $\dot{\mathcal{P}}_1$ con las etiquetas en los puntos terminales izquierdos de los subintervalos.
   b) $\dot{\mathcal{P}}_1$ con las etiquetas en los puntos terminales derechos de los subintervalos.
   c) $\dot{\mathcal{P}}_2$ con las etiquetas en los puntos terminales izquierdos de los subintervalos.
   d) $\dot{\mathcal{P}}_2$ con las etiquetas en los puntos terminales derechos de los subintervalos.

3. Demostrar que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada con norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| \leq \delta_\varepsilon$, entonces $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \leq \varepsilon$.

4. Sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada de [0, 3].

   a) Demostrar que la unión U_1 de todos los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas en [0, 1] satisface $[0, 1 - \|\dot{\mathcal{P}}\|] \subseteq U_1 \subseteq [0, 1 + \|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

b) Demostrar que la unión U_2 de todos los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas en $[1, 2]$ satisface $[1 + \|\dot{\mathcal{P}}\|, 2 - \|\dot{\mathcal{P}}\|] \subseteq U_2 \subseteq [1 - \|\dot{\mathcal{P}}\|, 2 + \|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

5. Sea $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a, b]$ y sea $c_1 < c_2$.

a) Si u pertenece a un subintervalo I_i cuya etiqueta satisface $c_1 \leq t_i \leq c_2$, demostrar que $c_1 - \|\dot{\mathcal{P}}\| \leq u \leq c_2 + \|\dot{\mathcal{P}}\|$.
b) Si $v \in [a, b]$ y satisface $c_1 + \|\dot{\mathcal{P}}\| \leq v \leq c_2 - \|\dot{\mathcal{P}}\|$, entonces la etiqueta t_i de cualquier subintervalo I_i que contiene a v satisface $t_i \in [c_1, c_2]$.

6. a) Sea $f(x) := 2$ si $0 \leq x < 1$ y $f(x) := 1$ si $1 \leq x \leq 2$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}[0, 2]$ y evaluar su integral.
b) Sea $h(x) := 2$ si $0 \leq x < 1$, $h(1) := 3$ y $h(x) := 1$ si $1 < x \leq 2$. Demostrar que $h \in \mathcal{R}[0, 2]$ y evaluar su integral.

7. Utilizar inducción matemática y el teorema 7.1.4 para demostrar que si $f_1, \cdots, f_n$ están en $\mathcal{R}[a, b]$ y si $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$, entonces la combinación lineal $f = \sum_{i=1}^n k_i f_i$ pertenece a $\mathcal{R}[a, b]$ y $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n k_i \int_a^b f_i$.

8. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in [a, b]$, demostrar que $|\int_a^b f| \leq M(b - a)$.

9. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y si $(\dot{\mathcal{P}}_n)$ es cualquier sucesión de particiones etiquetadas de $[a, b]$ tal que $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$, mostrar que $\int_a^b f = \lim_n S(f; \dot{\mathcal{P}}_n)$.

10. Sea $g(x) := 0$ si $x \in [0, 1]$ es racional y $g(x) := 1/x$ si $x \in [0, 1]$ es irracional. Explicar por qué $g \notin \mathcal{R}[0, 1]$. Sin embargo, demostrar que existe una sucesión $(\dot{\mathcal{P}}_n)$ de particiones etiquetadas de $[a, b]$ tal que $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$ y $\lim_n S(g; \dot{\mathcal{P}}_n)$ existe.

11. Suponer que f está acotada en $[a, b]$ y que existen dos sucesiones de particiones etiquetadas de $[a, b]$ tales que $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| \to 0$, pero tales que $\lim_n S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) \neq \lim_n S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)$. Demostrar que f no está en $\mathcal{R}[a, b]$.

12. Considerar la función de Dirichlet, introducida en el ejemplo 5.1.5g, definida por $f(x) := 1$ para $x \in [0, 1]$ racional y $f(x) := 0$ para $x \in [0, 1]$ irracional. Usar el ejercicio precedente para demostrar que f *no* es Riemann integrable en $[0, 1]$.

13. Suponer que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y que $f(x) = 0$ excepto para un número finito de puntos $c_1, \cdots, c_n$ en $[a, b]$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que $\int_a^b f = 0$.

14. Si $g \in \mathcal{R}[a, b]$ y si $f(x) = g(x)$ excepto para un número finito de puntos en $[a, b]$, demostrar que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

15. Suponer que $c \leq d$ son puntos en $[a, b]$. Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface $\varphi(x) = \alpha > 0$ para $x \in [c, d]$ y $\varphi(x) = 0$ en cualquier otro punto de $[a, b]$, demostrar que $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ y que $\int_a^b \varphi = \alpha(d - c)$. [*Sugerencia:* dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta_\varepsilon := \varepsilon/4\alpha$, asimismo demostrar que si $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$ entonces se tiene $\alpha(d - c - 2\delta_\varepsilon) \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) \leq \alpha(d - c + 2\delta_\varepsilon)$.]

16. Sea $0 \leq a < b$, sea $Q(x) := x^2$ para $x \in [a, b]$ y sea $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ una partición de $[a, b]$. Para toda i, sea q_i la *raíz cuadrada* positiva de

$$\tfrac{1}{3}(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2).$$

a) Demostrar que q_i satisface $0 \le x_{i-1} \le q_i \le x_i$.

b) Demostrar que $Q(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{3}(x_i^3 - x_{i-1}^3)$.

c) Si $\dot{\mathcal{Q}}$ es la partición etiquetada con los mismos subintervalos que $\mathcal{P}$ y las mismas etiquetas q_i, demostrar que $S(Q; \dot{\mathcal{Q}}) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

d) Usar el razonamiento del ejemplo 7.1.3c para demostrar que $Q \in \mathcal{R}[a, b]$ y

$$\int_a^b Q = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

17. Sean $0 \le a < b$ y $m \in \mathbb{N}$, sea $M(x) := x^m$ para $x \in [a, b]$ y sea $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ una partición de $[a, b]$. Para toda i, sea q_i la m-ésima *raíz* positiva de

$$\frac{1}{m+1}\left(x_i^m + x_i^{m-1}x_{i-1} + \cdots + x_i x_{i-1}^{m-1} + x_{i-1}^m\right).$$

a) Demostrar que q_i satisface $0 \le x_{i-1} \le q_i \le x_i$.

b) Demostrar que $M(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \dfrac{1}{m+1}(x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1})$.

c) Si $\dot{\mathcal{Q}}$ es la partición etiquetada con los mismos subintervalos que $\mathcal{P}$ y las mismas etiquetas q_i, demostrar que $S(M; \dot{\mathcal{Q}}) = \dfrac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})$.

d) Utilizar el razonamiento dado del ejemplo 7.1.3c para demostrar que $M \in \mathcal{R}[a, b]$ y que

$$\int_a^b M = \int_a^b x^m\, dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}).$$

18. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, se define g en $[a + c, b + c]$ por $g(y) := f(y - c)$. Demostrar que $g \in \mathcal{R}[a + c, b + c]$ y que $\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f$. La función g se llama la **traslación-c** de f.

SECCIÓN 7.2 Funciones Riemann integrables

Se empieza con la demostración del importante criterio de Cauchy. Se demuestra después el teorema de compresión, que se usará para establecer la integrabilidad de Riemann de varias clases de funciones (funciones escalonadas, funciones continuas y funciones monótonas). Por último, se establece el teorema de aditividad.

Se señaló ya que el uso directo de la definición requiere conocer el valor de la integral. El criterio de Cauchy elimina esta necesidad, pero con el costo de considerar dos sumas de Riemann en vez de una.

7.2.1 Criterio de Cauchy *Una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $\mathcal{R}[a, b]$ *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $\eta_\varepsilon > 0$ *tal que si* $\dot{\mathcal{P}}$ *y* $\dot{\mathcal{Q}}$ *son particiones etiquetadas cualesquiera de* $[a, b]$ *con* $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ *y* $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$, *entonces*

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})\right| < \varepsilon.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ con integral L, sea $\eta_\varepsilon := \delta_\varepsilon/2 > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$, $\dot{\mathcal{Q}}$ son particiones etiquetadas tales que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$, entonces

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - L\right| < \varepsilon/2.$$

Se tiene, por tanto,

$$\begin{aligned}\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| &\le \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L + L - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| \\ &\le \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| + \left|L - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\delta_n > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son particiones etiquetadas con normas $< \delta_n$, entonces

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| < 1/n.$$

Evidentemente, se puede suponer que $\delta_n \ge \delta_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$; de lo contrario, se reemplaza δ_n por $\delta_n' := \text{mín}\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\dot{\mathcal{P}}_n$ una partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < \delta_n$. Desde luego, si $m > n$ entonces tanto $\dot{\mathcal{P}}_m$ como $\dot{\mathcal{P}}_n$ tienen normas $< \delta_n$, de modo que

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_n) - S(f;\dot{\mathcal{P}}_m)\right| < 1/n \quad \text{para} \quad m > n. \tag{1}$$

Por consiguiente, la sucesión $(S(f;\dot{\mathcal{P}}_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por tanto, por el teorema 3.5.5, esta sucesión converge en $\mathbb{R}$ y entonces se hace $A := \text{lím}_m S(f;\dot{\mathcal{P}}_m)$.

Al pasar al límite en (1) cuando $m \to \infty$, se tiene

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_n) - A\right| \le 1/n| \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

Para ver que A es una integral de Riemann de f, dada $\varepsilon > 0$, sea $K \in \mathbb{N}$ que satisface $K > 2/\varepsilon$. Si $\dot{\mathcal{Q}}$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_K$, entonces

$$\begin{aligned}\left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - A\right| &\le \left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}}_K)\right| + \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_K) - A\right| \\ &\le 1/K + 1/K < \varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$ con integral A. Q.E.D.

Se presentan a continuación dos ejemplos sobre la utilización del criterio de Cauchy.

7.2.2 Ejemplos **a)** Sea $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ la función considerada en el ejemplo 7.1.3b. En ese ejemplo se vio que si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada de [0, 3] con norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, entonces

$$8 - 5\delta \leq S(g;\dot{\mathcal{P}}) \leq 8 + 5\delta.$$

En consecuencia, si $\dot{\mathcal{Q}}$ es otra partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, entonces

$$8 - 5\delta \leq S(g;\dot{\mathcal{P}}) \leq 8 + 5\delta.$$

Si se restan estas dos desigualdades, se obtiene

$$\left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(g;\dot{\mathcal{Q}})\right| \leq 10\delta.$$

A fin de hacer este término final $< \varepsilon$, es necesario emplear el criterio de Cauchy con $\eta_\varepsilon := \varepsilon/20$. (Se le dejan los detalles al lector.)
b) El criterio de Cauchy puede utilizarse para demostrar que una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *no* es Riemann integrable. Para ello, es necesario probar que: *existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para cualquier* $\eta > 0$ *existe en las particiones etiquetadas* $\dot{\mathcal{P}}$ *y* $\dot{\mathcal{Q}}$ *con* $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta$ *y* $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta$ *tales que* $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; (\dot{\mathcal{Q}})| \geq \varepsilon_0$.

Se aplicarán estas observaciones a la función de Dirichlet, considerada en 5.1.5g, definida por $f(x) := 1$ si $x \in [0, 1]$ es racional y por $f(x) := 0$ si $x \in [0, 1]$ es irracional.

En este caso se toma $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}$. Si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición cuyas etiquetas son en su totalidad números racionales, entonces $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = 1$, mientras que si $\dot{\mathcal{Q}}$ es cualquier partición cuyas etiquetas son en su totalidad números irracionales, entonces $S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = 0$. Puesto que es posible tomar estas particiones etiquetadas con normas arbitrariamente pequeñas, se concluye que la función de Dirichlet *no* es Riemann integrable. □

El teorema de compresión

El siguiente resultado se usará para establecer la integrabilidad de Riemann de algunas clases importantes de funciones.

7.2.3 Teorema de compresión *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existen las funciones* α_ε y ω_ε *en* $\mathcal{R}[a, b]$ *con*

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \textit{para toda} \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

y tales que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{3}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Se toma $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para toda $\varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que α_ε y ω_ε pertenecen a $\mathcal{R}[a, b]$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\varepsilon \right| < \varepsilon.$$

De estas desigualdades se sigue que

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) \quad \text{y} \quad S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Con base en la desigualdad (2), se tiene $S(\alpha_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}}) \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\varepsilon;\dot{\mathcal{P}})$, de donde

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(f;\dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Si $\dot{\mathcal{Q}}$ es otra partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces también se tiene

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(f;\dot{\mathcal{Q}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon.$$

Si se restan estas dos desigualdades y se usa (3), se concluye que

$$\begin{aligned} \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| &< \int_a^b \omega_\varepsilon - \int_a^b \alpha_\varepsilon + 2\varepsilon \\ &= \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) + 2\varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, el criterio de Cauchy implica que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Q.E.D.

Clases de funciones Riemann integrables

El teorema de compresión suele usarse con respecto a la clase de las funciones escalonadas. Se recuerda de la definición 5.4.9 que una función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una **función escalonada** si tiene tan sólo un número finito de valores diferentes, con cada valor siendo asumido en uno o más subintervalos de $[a, b]$. Para ilustraciones de funciones escalonadas, véanse las figuras 5.4.3 o 7.1.4.

7.2.4 Lema *Si* J *es un subintervalo de* [a, b] *con puntos terminales* c < d *y si* $\varphi_J(x) := 1$ *para* $x \in J$ *y* $\varphi_J(x) := 0$ *en cualquier otro punto en* [a, b], *entonces* $\varphi_J \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* $\int_a^b \varphi_J = d - c$.

Demostración. Si $J = [c, d]$ con $c \leq d$, se trata del ejercicio 7.1.15 y es posible elegir $\delta_\varepsilon := \varepsilon/4$. Puede darse una demostración similar para los otros tres subintervalos que tienen estos puntos terminales. De manera alternativa, se observa que puede escribirse

$$\varphi_{[c,d)} = \varphi_{[c,d]} - \varphi_{[d,d]},\ \varphi_{(c,d]} = \varphi_{[c,d]} - \varphi_{[c,c]} \text{ y } \varphi_{(c,d)} = \varphi_{[c,d)} - \varphi_{[c,c]}.$$

Puesto que $\int_a^b \varphi_{[c,c]} = 0$, estas cuatro funciones tienen una integral igual a $d - c$.

Q.E.D.

Es un hecho importante que toda función escalonada es Riemann integrable.

7.2.5 Teorema *Si* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función escalonada, entonces* $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$.

Demostración. A las funciones escalonadas del tipo que aparece en 7.2.4 se les llama "funciones escalonadas elementales". En el ejercicio 5 se demuestra que una función escalonada arbitraria φ puede expresarse como una combinación lineal de funciones escalonadas elementales:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} k_j \varphi_{J_j}, \tag{4}$$

donde J_j tiene puntos terminales $c_j < d_j$. El lema del teorema 7.1.4a,b implica que $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ y que

$$\int_a^b \varphi = \sum_{j=1}^{m} k_j (d_j - c_j). \tag{5}$$

Q.E.D.

Se usa a continuación el teorema de compresión para demostrar que una función continua arbitraria es Riemann integrable.

7.2.6 Teorema *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a, b]$, *entonces* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Demostración. Del teorema 5.4.3 se sigue que f es uniformemente continua en $[a, b]$. Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $u, v \in [a, b]$ y $|u - v| < \delta_\varepsilon$, entonces se tiene $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/(b - a)$.

Sea $\mathcal{P} = \{(I_i)\}_{i=1}^{n}$ una partición tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta_\varepsilon$, sea $u_i \in I_i$ un punto donde f alcanza su valor mínimo en I_i y sea $v_i \in I_i$ un punto donde f alcanza su valor máximo en I_i.

Sea α_ε la función escalonada definida por $\alpha_\varepsilon(x) := f(u_i)$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \cdots, n - 1$) y $\alpha_\varepsilon(x) := f(u_n)$ para $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Sea que ω_ε esté definida del mismo modo usando los puntos v_i en lugar de los puntos u_i. Se tiene entonces

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \text{para toda} \quad x \in [a,b].$$

Además, es evidente que

$$0 \leq \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right)(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Por lo tanto, del teorema de compresión se sigue que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Q.E.D.

Las funciones monótonas no son necesariamente continuas en todo punto, pero también son Riemann integrables.

7.2.7 Teorema *Si* f : [a, b] $\to \mathbb{R}$ *es monótona en* [a, b], *entonces* f $\in \mathbb{R}$[a, b].

Demostración. Suponer que f es creciente en el intervalo $[a, b]$, $a < b$. Si $\varepsilon > 0$ está dada, se hace que $q \in \mathbb{N}$ sea tal que

$$h := \frac{f(b) - f(a)}{q} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Sea $y_k := f(a) + kh$ para $k = 0, 1, \cdots, q$ y considerar los conjuntos $A_k := f^{-1}([y_{k-1}, y_k])$ para $k = 1, \cdots, q-1$ y $A_q := f^{-1}([y_{q-1}, y_q])$. Los conjuntos $\{A_k\}$ son disjuntos por pares y su unión es $[a, b]$. El teorema de caracterización 2.5.1 implica que cada A_k (i) es vacío, (ii) contiene un solo punto, o (iii) es un intervalo no degenerativo (no necesariamente cerrado) en $[a, b]$. Se descartan los conjuntos para los que se cumple (i) y se renombran los restantes. Si se incluyen los puntos terminales de los intervalos $\{A_k\}$ restantes, se obtienen los intervalos cerrados $\{I_k\}$. Es un ejercicio demostrar que los intervalos renombrados $\{A_k\}_{k=1}^{q}$ son disjuntos por pares, que satisfacen $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{q} A_k$ y que $f(x) \in [y_{k-1}, y_k]$ para $x \in A_k$.

Se definen ahora las funciones escalonadas α_ε y ω_ε en $[a, b]$ haciendo

$$\alpha_\varepsilon(x) := y_{k-1} \quad \text{y} \quad \omega_\varepsilon(x) := y_k \quad \text{para} \quad x \in A_k.$$

Es evidente que $\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x)$ para toda $x \in [a, b]$ y que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{q} (y_k - y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{q} h \cdot (x_k - x_{k-1}) = h \cdot (b-a) < \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, el teorema de compresión implica que $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
Q.E.D.

El teorema de aditividad

Se vuelve ahora a las funciones Riemann integrables arbitrarias. El siguiente resultado establece que la integral es una "función aditiva" del intervalo donde se integra la función. Esta propiedad no es ninguna sorpresa, pero su demostración es un tanto complicada y puede omitirse en una primera lectura.

7.2.8 Teorema de aditividad *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in (a, b)$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}(a, b)$ *si y sólo si sus restricciones a* $[a, c]$ *y* $[c, b]$ *son ambas Riemann integrables. En este caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{6}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Suponer que la restricción f_1 de f a $[a, c]$ y la restricción f_2 de f a $[c, b]$ son Riemann integrables a L_1 y L_2, respectivamente. Entonces, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_1$ es una partición etiquetada de $[a, c]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta'$, entonces $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3$. También existe $\delta'' > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_2$ es una partición etiquetada de $[c, b]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta''$ entonces $|S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3$. Si M es una cota de $|f|$, se define $\delta_\varepsilon := \text{mín}\{\delta', \delta'', \varepsilon/6M\}$ y sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ con $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$. Se demostrará que

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2) \right| < \varepsilon. \tag{7}$$

(i) Si c es un punto de partición de $\dot{\mathcal{Q}}$, se divide $\dot{\mathcal{Q}}$ en una partición $\dot{\mathcal{Q}}_1$ de $[a, c]$ y una partición $\dot{\mathcal{Q}}_2$ de $[c, b]$. Puesto que $S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) + S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2)$, y ya que $\dot{\mathcal{Q}}_1$ tiene norma $< \delta'$ y $\dot{\mathcal{Q}}_2$ tiene norma $< \delta''$, la desigualdad (7) es clara.

(ii) Si c no es un punto de partición en $\dot{\mathcal{Q}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^m$, existe $k \le m$ tal que $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Se hace que $\dot{\mathcal{Q}}_1$ sea la partición etiquetada de $[a, c]$ definida por

$$\dot{\mathcal{Q}}_1 := \{(I_1, t_1), \cdots, (I_{k-1}, t_{k-1}), ([x_{k-1}, c], c)\},$$

y que $\dot{\mathcal{Q}}_2$ sea la partición etiquetada de $[c, b]$ definida por

$$\dot{\mathcal{Q}}_2 := \{([c, x_k], c), (I_{k+1}, t_{k+1}), \cdots, (I_m, t_m)\}.$$

Un cálculo directo indica que

$$\begin{aligned} S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) &= f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(t_k) - f(c)) \cdot (x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}}_1) - S(f;\dot{\mathcal{Q}}_2)\right| \leq 2M(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon/3.$$

Pero como $\|\dot{\mathcal{Q}}_1\| < \delta \leq \delta'$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}_2\| < \delta \leq \delta''$, se sigue que

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}_1) - L_1\right| < \varepsilon/3 \text{ y } \left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}_2) - L_2\right| < \varepsilon/3,$$

de donde se obtiene (7). Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que se cumple (6).

($\Rightarrow$) Se supone que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y, dada $\varepsilon > 0$, se hace que $\eta_\varepsilon > 0$ satisfaga el criterio de Cauchy 7.2.1. Sea f_1 la restricción de f a $[a, c]$ y sean $\dot{\mathcal{P}}_1$, $\dot{\mathcal{Q}}_1$ particiones etiquetadas de $[a, c]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \eta_\varepsilon$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}_1\| < \eta_\varepsilon$. Al agregar puntos de partición y etiquetas adicionales de $[c, b]$, $\dot{\mathcal{P}}_1$ y $\dot{\mathcal{Q}}_1$ pueden ampliarse a particiones etiquetadas $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ de $[a, b]$ que satisfacen $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \eta_\varepsilon$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \eta_\varepsilon$. Si se utilizan los *mismos* puntos y las etiquetas adicionales en $[c, b]$ tanto para $\dot{\mathcal{P}}$ como para $\dot{\mathcal{Q}}$, entonces

$$S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1;\dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}}).$$

Puesto que tanto $\dot{\mathcal{P}}$ como $\dot{\mathcal{Q}}$ tienen norma $< \eta_\varepsilon$, entonces $|S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1;\dot{\mathcal{Q}}_1)| < \varepsilon$. Por lo tanto, la condición de Cauchy establece que la restricción f_1 de f a $[a, c]$ está en $\mathcal{R}[a, c]$. Del mismo modo, se observa que la restricción f_2 de f a $[c, b]$ está en $\mathcal{R}[c, d]$.

La igualdad (6) se sigue ahora de la primera parte del teorema. Q.E.D.

7.2.9 Corolario *Si* f $\in \mathcal{R}$[a, b], *y si* [c, d] $\subseteq$ [a, b], *entonces la restricción de* f *a* [c, d] *está en* $\mathcal{R}$[c, d].

Demostración. Puesto que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $c \in [a, b]$, del teorema se sigue que su restricción a $[c, b]$ está en $\mathcal{R}[c, b]$. Pero si $d \in [c, b]$, entonces otra aplicación del teorema establece que la restricción de f a $[c, d]$ está en $\mathcal{R}[c, d]$. Q.E.D.

7.2.10 Corolario *Si* f $\in \mathcal{R}$[a, b] *y si* $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$, *entonces las restricciones de* f *a cada uno de los subintervalos* $[c_{i-1}, c_i]$ *son Riemann integrables y*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Hasta este punto se ha considerado la integral de Riemann en un intervalo $[a, b]$ donde $a < b$. Es conveniente tener la integral definida en términos más generales.

7.2.11 Definición Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y si $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$, se definen

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{y} \quad \int_\alpha^\alpha f := 0.$$

7.2.12 Teorema *Si* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *y si* α, β, γ *son números reales cualesquiera en* $[a, b]$, *entonces*

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f, \tag{8}$$

en el sentido de que la existencia de cualesquiera dos de estas integrales implica la existencia de la tercera integral y la igualdad (8).

Demostración. Si cualesquiera dos de los números α, β, γ son iguales, entonces (8) se cumple. Por tanto, puede suponerse que los tres números son diferentes.

Por consideraciones de simetría, se introduce la expresión

$$L(\alpha,\beta,\gamma) := \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f + \int_\gamma^\alpha f.$$

Es claro que (8) se cumple si y sólo si $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Por lo tanto, para establecer la afirmación, es necesario demostrar que $L = 0$ para las seis permutaciones de los argumentos α, β y γ.

Se observa que el teorema de aditividad 7.2.8 implica que $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ cuando $\alpha < \gamma < \beta$. Pero es sencillo ver que tanto $L(\beta, \gamma, \alpha)$ como $L(\gamma, \alpha, \beta)$ son iguales a $L(\alpha, \beta, \gamma)$. Además, los números

$$L(\beta,\alpha,\gamma), \quad L(\alpha,\gamma,\beta), \quad \text{y} \quad L(\gamma,\beta,\alpha)$$

son todos iguales a $-L(\alpha, \beta, \gamma)$. Por lo tanto, L se anula para todas las posibles configuraciones de estos tres puntos. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 7.2

1. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ si y sólo si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen las particiones etiquetadas $\dot{\mathcal{P}}_n$ y $\dot{\mathcal{Q}}_n$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < 1/n$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| < 1/n$ tales que $|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)| \geq \varepsilon_0$.

2. Considerar la función h definida por $h(x) := x + 1$ para $x \in [0, 1]$ racional y $h(x) := 0$ para $x \in [0, 1]$ irracional. Demostrar que h no es Riemann integrable.

3. Sea $H(x) := k$ para $x = 1/k$ $(k \in \mathbb{N})$ y $H(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. Usar el ejercicio 1, o el razonamiento empleado en 7.2.2b, para demostrar que H no es Riemann integrable.

4. Si $\alpha(x) := -x$ y $\omega(x) := x$, y si $\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$ para toda $x \in [0, 1]$, ¿del teorema de compresión 7.2.3 se sigue que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$?

5. Si J es cualquier subintervalo de $[a, b]$ y si $\varphi_J(x) := 1$ para $x \in J$ y $\varphi_J(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[a, b]$, se dice que φ_J es una *función escalonada elemental* en $[a, b]$. Demostrar que toda función escalonada es una combinación lineal de funciones escalonadas elementales.

6. Si $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ asume sólo un número finito de valores diferentes, ¿es ψ una función escalonada?

7. Si $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ es cualquier suma de Riemann de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, demostrar que existe una función escalonada $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b \varphi = S(f; \dot{\mathcal{P}})$.

8. Suponer que f es continua en $[a, b]$, que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$ y que $\int_a^b f = 0$. Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$.

9. Demostrar que la hipótesis de continuidad en el ejercicio precedente no puede omitirse.

10. Si f y g son continuas en $[a, b]$ y si $\int_a^b f = \int_a^b g$, demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

11. Si f está acotada por M en $[a, b]$ y si la restricción de f a cada intervalo $[c, b]$ donde $c \in (a, b)$ es Riemann integrable, demostrar que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que $\int_c^b f \to \int_a^b f$ cuando $c \to a+$. [*Sugerencia:* sea $\alpha_c(x) := -M$ y $\omega_c(x) := M$ para $x \in [a, c)$ y $\alpha_c(x) := \omega_c(x) := f(x)$ para $x \in [c, b]$. Aplicar el teorema de compresión 7.2.3 para c lo suficientemente cerca de a.]

12. Demostrar que $g(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $g(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{R}[0, 1]$.

13. Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que esté en $\mathcal{R}[c, b]$ para toda $c \in (a, b)$ pero que no esté en $\mathcal{R}[a, b]$.

14. Suponer que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ y que las restricciones de f a $[c_{i-1}, c_i]$ pertenecen a $\mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ para $i = 1, \cdots, m$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que se cumple la fórmula del corolario 7.2.10.

15. Si f está acotada y existe un conjunto finito E tal que f es continua en todo punto de $[a, b]\backslash E$, demostrar que $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

16. Si f es continua en $[a, b]$, $a < b$, demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que se tiene $\int_a^b f = f(c)(b - a)$. Este resultado se llama el *teorema del valor medio para integrales*.

17. Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$, demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$. Demostrar que esta conclusión no se cumple si no se tiene $g(x) > 0$. (Adviértase que este resultado es una ampliación del ejercicio precedente.)

18. Sea f continua en $[a, b]$, sea $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ y sea $M_n := \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$. Demostrar que $\lim(M_n) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

19. Suponer que $a > 0$ y que $f \in \mathcal{R}[-a, a]$.

a) Si f es *par* (es decir, si $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in [0, a]$), demostrar que $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

b) Si f es *impar* (es decir, si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in [0, a]$), demostrar que $\int_{-a}^{a} f = 0$.

20. Suponer que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ y que $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{P}_n$ la partición de $[a, b]$ en n subintervalos que tienen la misma longitud, de tal modo que $x_i := a + i(b-a)/n$ para $i = 0, 1, \cdots, n$. Sea $L_n(f) := S(f; \dot{\mathcal{P}}_{n,l})$ y $R_n(f) := S(f; \dot{\mathcal{P}}_{n,r})$, donde $\dot{\mathcal{P}}_{n,l}$ tiene sus etiquetas en los puntos terminales izquierdos y $\dot{\mathcal{P}}_{n,r}$ tiene sus etiquetas en los puntos terminales derechos de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

a) Si f es creciente en $[a, b]$, demostrar que $L_n(f) \le R_n(f)$ y que

$$0 \le R_n(f) - L_n(f) = \big(f(b) - f(a)\big)\cdot \frac{(b-a)}{n}.$$

b) Demostrar que $f(a)(b-a) \le L_n(f) \le \int_a^b f \le R_n(f) \le f(b)(b-a)$.

c) Si f es decreciente en $[a, b]$, obtener una desigualdad similar a la del inciso a).

d) Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ no es monótona, demostrar que $\int_a^b f$ no necesariamente está entre $L_n(f)$ y $R_n(f)$.

21. Si f es continua en $[-a, a]$, demostrar que $\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$.

22. Si f es continua en $[-1, 1]$, hay que demostrar que $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)dx$. [*Sugerencia:* examinar ciertas sumas de Riemann.]

SECCIÓN 7.3 El teorema fundamental

Se explora a continuación la conexión entre las nociones de la derivada y la integral. De hecho, hay *dos* teoremas que se relacionan con este problema: uno tiene que ver con la integración de una derivada y el otro con la derivación de una integral. Estos teoremas, tomados en conjunto, se llaman el teorema fundamental del cálculo. En términos generales, estos teoremas implican que las operaciones de derivación e integración son inversas entre sí. Sin embargo, hay algunos puntos sutiles que no deberán pasarse por alto.

El teorema fundamental (primera forma)

La primera forma del teorema fundamental proporciona una base teórica del método para calcular una integral que el lector aprendió en cálculo. Afirma que si una función f es la derivada de una función F, *y que si* f *pertenece a* $\mathcal{R}[a, b]$, entonces la integral $\int_a^b f$ puede calcularse por medio de la evaluación $F\big|_a^b := F(b) - F(a)$. Una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$ se denomina una **antiderivada** o una **primitiva de** f en $[a, b]$. Así, cuando f tiene una antiderivada, es muy simple calcular su integral.

En la práctica, es conveniente permitir algunos puntos excepcionales c donde $F'(c)$ no existe en $\mathbb{R}$ o donde no es igual a $f(c)$. Resulta ser el caso que puede permitirse un número *finito* de tales puntos excepcionales.

7.3.1 Teorema fundamental del cálculo (primera forma) *Suponer que existe un conjunto* ***finito*** E *en* [a, b] *y las funciones* f, F : [a, b] → ℝ *tales que:*

a) F *es continua en* [a, b],
b) F′(x) = f(x) *para toda* x ∈ [a, b]\E,
c) f *pertenece a* $\mathcal{R}$[a, b].
Entonces se tiene

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Demostración. Se demuestra el teorema en el caso en que $E := \{a, b\}$. El caso general puede obtenerse descomponiendo el intervalo en la unión de un número finito de intervalos (véase el ejercicio 1).

Sea $\varepsilon > 0$ que está dada. Dado que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ por el supuesto c), existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es *cualquier* partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Si los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ son $[x_{i-1}, x_i]$, entonces el teorema del valor medio 6.2.4 aplicado a F en $[x_{i-1}, x_i]$ implica que existe $u_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(u_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n.$$

Al sumar estos términos se observa el efecto telescópico de la suma y, usando el hecho de que $F'(u_i) = f(u_i)$, se obtiene

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ahora, sea $\dot{\mathcal{P}}_u := \{([x_{i-1}, x_i], u_i)\}_{i=1}^n$, por lo que la suma de la derecha es igual a $S(f; \dot{\mathcal{P}}_u)$. Al sustituir $F(b) - F(a) = S(f; \dot{\mathcal{P}}_u)$ en (2) se concluye que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Pero como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que la ecuación (1) se cumple. Q.E.D.

Observación Si la función F es derivable en todo punto de $[a, b]$, entonces (por el teorema 6.1.2) la hipótesis a) se satisface automáticamente. Si f no está definida en algún punto $c \in E$, se toma $f(c) := 0$. Incluso cuando F es derivable en todo punto de $[a, b]$, la condición c) *no se satisface automáticamente*, ya que existen funciones F tales que F' no es Riemann integrable. (Véase el ejemplo 7.3.2e.)

7.3.2 Ejemplos **a)** Si $F(x) := \frac{1}{2}x^2$ para toda $x \in [a, b]$, entonces $F'(x) = x$ para toda $x \in [a, b]$. Además, $f = F'$ es continua y en consecuencia está en $\mathcal{R}[a, b]$. Por lo tanto, el teorema fundamental (con $E = \emptyset$) implica que

$$\int_a^b x\,dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

b) Si $G(x) := \arctan x$ para $x \in [a, b]$, entonces $G'(x) = 1/(x^2 + 1)$ para toda $x \in [a, b]$; G' también es continua y en consecuencia está en $\mathcal{R}[a, b]$. Por lo tanto, el teorema fundamental (con $E = \emptyset$) implica que

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

c) Si $A(x) := |x|$ para $x \in [-10, 10]$, entonces $A'(x) = -1$ si $x \in [-10, 0)$ y $A'(x) = +1$ si $x \in (0, 10]$. Al recordar la definición de la función signo (en 4.1.10b), se tiene $A'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ para toda $x \in [-10, 10]\backslash\{0\}$. Puesto que la función signo es una función escalonada, pertenece a $\mathcal{R}[-10, 10]$. Por lo tanto, el teorema fundamental (con $E = \{0\}$) implica que

$$\int_{-10}^{10} \operatorname{sgn}(x)\,dx = A(10) - A(-10) = 10 - 10 = 0.$$

d) Si $H(x) := 2\sqrt{x}$ para $x \in [0, b]$, entonces H es continua en $[0, b]$ y $H'(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0, b]$. Puesto que $h := H'$ no está acotada en $(0, b]$, no pertenece a $\mathcal{R}[0, b]$ sin importar cómo se defina $h(0)$. Por lo tanto, el teorema fundamental 7.3.1 no es aplicable. (Sin embargo, en el ejemplo 10.1.10a se verá que h es una función Riemann integrable *generalizada* en $[0, b]$.)

e) Sea $K(x) := x^2 \cos(1/x^2)$ para $x \in (0, 1]$ y sea $K(0) := 0$. De la regla del producto 6.1.3c y de la regla de la cadena 6.1.6 se sigue que

$$K'(x) = 2x\cos(1/x^2) + (2/x)\operatorname{sen}(1/x^2) \qquad \text{para} \qquad x \in (0, 1].$$

Además, como en el ejemplo 6.1.7d, se tiene $K'(0) = 0$. Por tanto, K es continua y derivable en *todo punto* de $[0, 1]$. Puesto que el primer término de K' es continuo en $[0, 1]$, pertenece a $\mathcal{R}[0, 1]$. Sin embargo, el segundo término de K' no está acotado, por lo que no pertenece a $\mathcal{R}[0, 1]$. Por consiguiente, $K' \notin \mathcal{R}[0, 1]$ y el teorema fundamental 7.3.1 no se aplica a K'. (Sin embargo, en el ejemplo 10.1.10b se verá que K' es una función Riemann integrable *generalizada*.) □

El teorema fundamental (segunda forma)

Se considera ahora el teorema fundamental (segunda forma) cuando se quiere derivar una integral que incluye un límite superior variable.

7.3.3 Definición Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces a la función definida por

$$F(z) := \int_a^z f \quad \text{para} \quad z \in [a, b], \tag{3}$$

se le llama la **integral indefinida** de f con **punto base** a. (En ocasiones se usa como punto base otro punto en lugar de a; véase el ejercicio 6.)

Se demuestra primero que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces su integral indefinida F satisface una condición de Lipschitz; por consiguiente, F es continua en $[a, b]$.

7.3.4 Teorema *La integral indefinida* F *definida por* (3) *es continua en* [a, b]. *De hecho, si* $|f(x)| \le M$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces* $|F(z) - F(w)| \le M|z - w|$ *para toda* $z, w \in [a, b]$.

Demostración. El teorema de aditividad 7.2.8 implica que si $z, w \in [a, b]$ y que $w \le z$, entonces

$$F(z) = \int_a^z f = \int_a^w f + \int_w^z f = F(w) + \int_w^z f,$$

de donde se tiene

$$F(z) - F(w) = \int_w^z f.$$

Ahora bien, si $-M \le f(x) \le M$ para toda $x \in [a, b]$, entonces el teorema 7.1.4c implica que

$$-M(z - w) \le \int_w^z f \le M(z - w),$$

de donde se sigue que

$$|F(z) - F(w)| \le \left|\int_w^z f\right| \le M|z - w|,$$

como se afirmó. Q.E.D.

Se demuestra a continuación que la integral indefinida F es derivable en cualquier punto donde f es continua.

7.3.5 Teorema fundamental del cálculo (segunda forma) *Sea* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *y sea* f *continua en un punto* $c \in [a, b]$. *Entonces la integral indefinida, definida por* (3), *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$.

Demostración. Se supone que $c \in [a, b)$ y se considera la derivada de la derecha de F en c. Puesto que f es continua en c, dada $\varepsilon > 0$ existe $\eta_\varepsilon > 0$ tal que si $c \le x < c + \eta_\varepsilon$, entonces

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon. \tag{4}$$

Sea h que satisfaga $0 < h < \eta_\varepsilon$. El teorema de aditividad 7.2.8 implica que f es integrable en los intervalos $[a, c]$, $[a, c + h]$ y $[c, c + h]$ y que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Ahora bien, en el intervalo $[c, c + h]$ la función f satisface la desigualdad (4), por lo que (por el teorema 7.1.4c) se tiene

$$(f(c) - \varepsilon) \cdot h \leq F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f \leq (f(c) + \varepsilon) \cdot h.$$

Al dividir entre $h > 0$ y restar $f(c)$, se obtiene

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \varepsilon.$$

Pero, dado que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que el límite por la derecha está dado por

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

Se demuestra de la misma manera que el límite por la izquierda de este cociente diferencial también es igual a $f(c)$ cuando $c \in (a, b]$, de donde se sigue la afirmación. Q.E.D.

Si f es continua en la totalidad de $[a, b]$, se obtiene el siguiente resultado.

7.3.6 Teorema *Si* f *es continua en* [a, b], *entonces la integral indefinida* F, *definida por* (3), *es derivable en* [a, b] *y* $F'(x) = f(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$.

El teorema 7.3.6 puede resumirse así: *si* f *es continua en* [a, b], *entonces su integral indefinida es una antiderivada de* f. Se verá a continuación que, en general, la integral indefinida no es necesariamente una antiderivada (sea porque la derivada de la integral indefinida no existe o porque no es igual a $f(x)$).

7.3.7 Ejemplos **a)** Si $f(x) := \operatorname{sgn} x$ en $[-1, 1]$, entonces $f \in \mathcal{R}[-1, 1]$ y tiene la integral indefinida $F(x) := |x| - 1$ con el punto base -1. Sin embargo, ya que $F'(0)$ no existe, F no es una antiderivada de f en $[-1, 1]$.

b) Si h denota la función de Thomae, considerada en 7.1.6, entonces su integral indefinida $H(x) := \int_0^x h$ es una identidad con 0 en $[0, 1]$. Aquí, la derivada de esta integral indefinida existe en todo punto y $H'(x) = 0$. Pero $H'(x) \neq h(x)$ siempre que $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, por lo que H no es una antiderivada de h en $[0, 1]$. □

Teorema de sustitución

El siguiente teorema proporciona la justificación para el método de "cambio de variable" que se usa con frecuencia para evaluar integrales. Este teorema se emplea (por lo general de manera implícita) en la evaluación por medio de procedimientos que incluyen la manipulación de "diferenciales", los cuales son comunes en cursos elementales.

7.3.8 Teorema de sustitución *Sea* $J := [\alpha, \beta]$ *y sea que* $\varphi : J \to \mathbb{R}$ *tenga derivada continua en* J. *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *es continua en un intervalo* I *que contiene a* $\varphi(J)$, *entonces*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \tag{5}$$

La demostración de este teorema se basa en la regla de la cadena 6.1.6 y sus líneas generales se describen en el ejercicio 15. Las hipótesis de que f y φ' son continuas son restrictivas, pero se usan a fin de asegurar la existencia de la integral de Riemann en el primer miembro de (5).

7.3.9 Ejemplos **a)** Considerar la integral $\displaystyle\int_1^4 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Aquí se sustituye $\varphi(t) := \sqrt{t}$ para $t \in [1, 4]$, de tal modo que $\varphi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ es continua en $[1, 4]$. Si se hace $f(x) := 2 \operatorname{sen} x$, entonces el integrando tiene la forma $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ y, así, el teorema de sustitución 7.3.8 implica que la integral es igual a $\int_1^2 2 \operatorname{sen} x\, dx = -2 \cos x|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2)$.

b) Considerar la integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Puesto que $\varphi(t) := \sqrt{t}$ no tiene derivada continua en $[0, 4]$, el teorema de sustitución 7.3.8 no es aplicable, al menos con esta sustitución. (De hecho, no es evidente que esta integral exista; sin embargo, puede aplicarse el ejercicio 7.2.11 para llegar a esta conclusión. Después podría aplicarse el teorema fundamental 7.3.1 a $F(t) := -2 \cos \sqrt{t}$ con $E := \{0\}$ para evaluar esta integral.) □

En la sección 10.1 se presenta un teorema de sustitución de mayores alcances para la integral de Riemann *generalizada*.

Criterio de integrabilidad de Lebesgue

Se presenta a continuación la enunciación del decisivo teorema debido a Henri Lebesgue (1875-1941) que da una condición necesaria y suficiente para que una función sea Riemann integrable; se presentan asimismo algunas aplicaciones de este teorema. Para establecer este resultado es necesario introducir la importante noción de conjunto nulo.

Atención Algunas personas usan el término "conjunto nulo" como sinónimo del término "conjunto vacío" en referencia a $\emptyset$ (= al conjunto que no tiene elementos). Sin embargo, aquí el término "conjunto nulo" se usa de conformidad con la siguiente definición, como es habitual en la teoría de la integración.

7.3.10 Definición **a)** Se dice que un conjunto $Z \subset \mathbb{R}$ es un **conjunto nulo** si para toda $\varepsilon > 0$ existe una colección contable $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos tales que

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq \varepsilon. \tag{6}$$

b) Si $Q(x)$ es un enunciado acerca del punto $x \in I$, se dice que $Q(x)$ se cumple **casi en todas partes** de I (o para **casi toda** $x \in I$), si existe un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que $Q(x)$ se cumple para toda $x \in I \backslash Z$. En este caso puede escribirse

$$Q(x) \quad \text{para toda} \quad x \in I.$$

Es trivial que cualquier subconjunto del conjunto nulo es también un conjunto nulo y es fácil ver que la unión de dos conjuntos nulos es un conjunto nulo. A continuación se presenta un ejemplo que puede resultar muy sorprendente.

7.3.11 Ejemplo El conjunto $\mathbb{Q}_1$ de los números racionales en $[0, 1]$ es un conjunto nulo.

Se enumera $\mathbb{Q}_1 = \{r_1, r_2, \cdots\}$. Dada $\varepsilon > 0$, se observa que el intervalo abierto $J_1 := (r_1 - \varepsilon/4, r_1 + \varepsilon/4)$ contiene a r_1 y tiene longitud $\varepsilon/2$; asimismo, el intervalo abierto $J_2 := (r_2 - \varepsilon/8, r_2 + \varepsilon/8)$ contiene a r_2 y tiene longitud $\varepsilon/4$. En general, el intervalo abierto

$$J_k := \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

contiene al punto r_k y tiene longitud $\varepsilon/2^k$. Por lo tanto, la unión $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ de estos intervalos abiertos contiene a cada punto de $\mathbb{Q}_1$; además, la suma de las longitudes es $\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon/2^k) = \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, $\mathbb{Q}_1$ es un conjunto nulo. □

El razonamiento que acaba de presentarse puede modificarse para demostrar que: *todo conjunto contable es un conjunto nulo*. Sin embargo, puede demostrarse que existen conjuntos nulos no contables en $\mathbb{R}$; por ejemplo, el conjunto de Cantor que se introduce en la definición 11.1.10.

Se formula a continuación el criterio de integrabilidad de Lebesgue, el cual afirma que una función acotada en un intervalo es Riemann integrable si y sólo si sus puntos de discontinuidad forman un conjunto nulo.

7.3.12 Criterio de integrabilidad de Lebesgue *Una función acotada* f : [a, b] → ℝ *es Riemann integrable si y sólo si es continua casi en todas partes de* [a, b].

En el apéndice C se presenta una demostración de este resultado. Sin embargo, se aplica aquí el teorema de Lebesgue a algunas funciones específicas y se muestra que algunos de los resultados previos se siguen inmediatamente de él. También se usa este teorema para obtener los importantes teoremas de composición y del producto.

7.3.13 Ejemplos **a)** La función escalonada g del ejemplo 7.1.3b es continua en todo punto excepto en $x = 1$. Por lo tanto, del criterio de integrabilidad de Lebesgue se sigue que g es Riemann integrable.

De hecho, ya que toda función escalonada tiene a lo sumo un conjunto finito de puntos de discontinuidad, entonces: *toda función escalonada en* [a, b] *es Riemann integrable.*

b) Considerando que en el teorema 5.5.4 se vio que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es contable, se concluye que: *toda función monótona en* [a, b] *es Riemann integrable.*

c) La función G del ejemplo 7.1.3e es discontinua precisamente en los puntos $D := \{1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots\}$. Puesto que se trata de un conjunto contable, es un conjunto nulo y el criterio de Lebesgue implica que G es Riemann integrable.

d) En el ejemplo 7.2.2b se demostró que la función de Dirichlet no es Riemann integrable.

Adviértase que esta función es discontinua en *todo* punto de [0, 1]. Puesto que puede demostrarse que el intervalo [0, 1] no es un conjunto nulo, con el criterio de Lebesgue se llega a la misma conclusión.

e) Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función de Thomae definida en los ejemplos 5.1.4h y 7.1.6.

En el ejemplo 5.1.4h se vio que h es continua en todo número irracional y que es discontinua en todo número racional de [0, 1]. Por el ejemplo 7.3.11, la función es discontinua en un conjunto nulo, de donde el criterio de Lebesgue implica que la función de Thomae es Riemann integrable en [0, 1], como se estableció en el ejemplo 7.1.6. □

Se obtiene ahora un resultado que permitirá tomar otras combinaciones de funciones Riemann integrables.

7.3.14 Teorema de composición *Sea* f ∈ $\mathcal{R}$[a, b] *con* f([a, b]) ⊆ [c, d] *y sea* φ : [c, d] → ℝ *continua. Entonces la composición* φ ∘ f *pertenece a* $\mathcal{R}$[a, b].

Demostración. Si f es continua en un punto $u \in [a, b]$, entonces $\varphi \circ f$ también es continua en u. Puesto que el conjunto D de puntos de discontinuidad de f es un conjunto nulo, se sigue que el conjunto $D_1 \subseteq D$ de puntos de discontinuidad de

$\varphi \circ f$ también es un conjunto nulo. Por lo tanto, la composición $\varphi \circ f$ también pertenece a $\mathcal{R}[a, b]$. Q.E.D.

En el ejercicio 22 se verá que la hipótesis de que φ sea continua no puede omitirse. El siguiente resultado es un corolario del teorema de composición.

7.3.15 Corolario *Suponer que* f $\in \mathcal{R}$[a, b]. *Entonces su valor absoluto* |f| *está en* $\mathcal{R}$[a, b] *y*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a),$$

donde $|f(x)| \leq M$ *para toda* $x \in [a, b]$.

Demostración. En el teorema 7.1.5 se vio que si f es integrable, entonces existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in [a, b]$. Sea $\varphi(t) := |t|$ para $t \in [-M, M]$; entonces el teorema de composición implica que $|f| = \varphi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$. La primera desigualdad se sigue del hecho de que $-|f| \leq f \leq |f|$ y de 7.1.4c, y la segunda del hecho de que $|f(x)| \leq M$. Q.E.D.

7.3.16 El teorema del producto *Si* f *y* g *pertenecen a* $\mathcal{R}$[a, b], *entonces el producto* fg *pertenece a* $\mathcal{R}$[a, b].

Demostración. Si $\varphi(t) := t^2$ para $t \in [-M, M]$, del teorema de composición se sigue que $f^2 = \varphi \circ f$ pertenece a $\mathcal{R}[a, b]$. Del mismo modo, $(f + g)^2$ y g^2 pertenecen a $\mathcal{R}[a, b]$. Pero dado que el producto puede escribirse como

$$fg = \tfrac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2],$$

se sigue que $fg \in \mathcal{R}[a, b]$. Q.E.D.

Integración por partes

Se concluye esta sección con una forma bastante general de la integración por partes para la integral de Riemann y con el teorema de Taylor con residuo.

7.3.17 Integración por partes *Sean* F, G *derivables en* [a, b] *y sea que* f := F′ *y* g := G′ *pertenezcan a* $\mathcal{R}$[a, b]. *Entonces*

$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg. \tag{7}$$

Demostración. Por el teorema 6.1.3c, la derivada $(FG)'$ existe en $[a, b]$ y

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg.$$

Puesto que F, G son continuas y f, g pertenecen a $\mathcal{R}[a, b]$, el teorema del producto 7.3.16 implica que fG y Fg son integrables. Por lo tanto, el teorema fundamental 7.3.1 implica que

$$FG\Big|_a^b = \int_a^b (FG)' = \int_a^b fG + \int_a^b Fg,$$

de donde se sigue (7). Q.E.D.

Un caso especial, pero útil, de este teorema es cuando f y g son continuas en $[a, b]$ y F, G son sus integrales indefinidas $F(x) := \int_a^x f$ y $G(x) := \int_a^x g$.

Se cierra esta sección con una versión del teorema de Taylor para la integral de Riemann.

7.3.18 Teorema de Taylor con el residuo *Suponer que* $f', \cdots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ *existen en* $[a, b]$ *y que* $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$. *Entonces se tiene*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n, \tag{8}$$

donde el residuo está dado por

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot(b-t)^n\, dt. \tag{9}$$

Demostración. Se aplica la integración por partes a la ecuación (9), con $F(t) := f^{(n)}(t)$ y $G(t) := (b-t)^n/n!$, de tal modo que $g(t) = -(b-t)^{n-1}/(n-1)!$, para obtener

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)\cdot(b-t)^n \Big|_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)\cdot(b-a)^{n-1}\, dt \\ &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)\cdot(b-t)^{n-1}\, dt. \end{aligned}$$

Si se continúa integrando por partes de esta manera, se obtiene (8). Q.E.D.

Ejercicios de la sección 7.3

1. Ampliar la demostración del teorema fundamental 7.3.1 al caso de un conjunto E finito arbitrario.

2. Si $n \in \mathbb{N}$ y $H_n(x) := x^{n+1}/(n+1)$ para $x \in [a, b]$, demostrar que el teorema fundamental 7.3.1 implica que $\int_a^b x^n\, dx = (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)$. ¿Cuál es el conjunto E en este caso?

3. Si $g(x) := x$ para $|x| \geq 1$ y $g(x) := -x$ para $|x| < 1$, y si $G(x) := \frac{1}{2}|x^2 - 1|$, demostrar que $\int_{-2}^3 g(x)\, dx = G(3) - G(-2) = 5/2$.

4. Sea $B(x) := -\frac{1}{2}x^2$ para $x < 0$ y sea $B(x) := \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$. Demostrar que $\int_a^b |x|\, dx = B(b) - B(a)$.

5. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ y sea $C \in \mathbb{R}$.

a) Si $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una antiderivada de f en $[a, b]$, demostrar que $\Phi_C(x) := \Phi(x) + C$ también es una antiderivada de f en $[a, b]$.

b) Si Φ_1 y Φ_2 son antiderivadas de f en $[a, b]$, demostrar que $\Phi_1 - \Phi_2$ es una función constante en $[a, b]$.

6. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $c \in [a, b]$, a la función definida por $F_c(z) := \int_c^z f$ para $z \in [a, b]$ se le denomina la **integral indefinida** de f con **punto base** c. Encontrar una relación entre F_a y F_c.

7. En el ejemplo 7.1.6 se vio que la función de Thomae está en $\mathcal{R}[0, 1]$ con integral igual a 0. ¿Puede usarse el teorema fundamental 7.3.1 para llegar a esta conclusión? Explicar la respuesta.

8. Sea que $F(x)$ esté definida para $x \geq 0$ por $F(x) := (n-1)x - (n-1)n/2$ para $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que F es continua y evaluar $F'(x)$ en los puntos donde esta derivada existe. Usar este resultado para evaluar $\int_a^b [[x]]\, dx$ para $0 \leq a < b$, donde $[[x]]$ denota el entero mayor en x, como se definió en el ejercicio 5.1.4.

9. Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y se define $F(x) := \int_a^x f$ para $x \in [a, b]$.

a) Evaluar $G(x) := \int_c^x f$ en términos de F, donde $c \in [a, b]$.

b) Evaluar $H(x) := \int_x^b f$ en términos de F.

c) Evaluar $S(x) := \int_a^{\operatorname{sen} x} f$ en términos de F.

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y también sea $v : [c, d] \to \mathbb{R}$ derivable en $[c, d]$ con $v([c, d]) \subseteq [a, b]$. Si se define $G(x) := \int_a^{v(x)} f$, demostrar que $G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x)$ para toda $x \in [c, d]$.

11. Encontrar $F'(x)$ cuando F está definida en $[0, 1]$ por:

a) $F(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1}\, dt.$ b) $F(x) := \displaystyle\int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt.$

12. Sea que $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := x$ para $0 \leq x < 1$, $f(x) := 1$ para $1 \leq x < 2$ y $f(x) := x$ para $2 \leq x \leq 3$. Obtener fórmulas para $F(x) := \int_0^x f$ y trazar las gráficas de f y F. ¿Dónde es derivable F? Evaluar $F'(x)$ en todos estos puntos.

13. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $c > 0$, definir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) := \int_{x-c}^{x+c} f(t)\, dt$. Demostrar que g es derivable en $\mathbb{R}$ y encontrar $g'(x)$.

14. Si $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y $\int_0^x f = \int_x^1 f$ para toda $x \in [0, 1]$, demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [0, 1]$.

15. Usar el siguiente razonamiento para demostrar el teorema de sustitución 7.3.8. Definir $F(u) := \int_{\varphi(\alpha)}^{u} f(x)dx$ para $u \in I$ y $H(t) := F(\varphi(t))$ para $t \in J$. Demostrar que $H'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ para $t \in J$ y que

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = F(\varphi(\beta)) = H(\beta) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)\, dt.$$

16. Usar el teorema de sustitución 7.3.8 para evaluar las siguientes integrales.

a) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt,$ b) $\int_0^2 t^2(1+t^3)^{-1/2}\,dt = 4/3,$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt,$ d) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = 2(\operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 1).$

17. En ocasiones el teorema de sustitución 7.3.8 no puede aplicarse, pero el siguiente resultado, llamado el "teorema de la segunda sustitución", es útil. Además de las hipótesis de 7.3.8, suponer que $\varphi'(t) \neq 0$ para toda $t \in J$, por lo que la función $\psi : \varphi(J) \to \mathbb{R}$ inversa de φ existe y tiene derivada $\psi'(\varphi(t)) = 1/\varphi'(t)$. Entonces

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Para demostrar esta afirmación, sea $G(t) := \int_\alpha^t f(\varphi(s))\,ds$ para $t \in J$, de tal modo que $G'(t) = f(\varphi(t))$. Adviértase que $K(x) := G(\psi(x))$ es derivable en el intervalo $\varphi(J)$ y que $K'(x) = G'(\psi(x))\,\psi'(x) = f(\varphi \circ \psi(x))\psi'(x) = f(x)\psi'(x)$. Calcular $G(\beta) = K(\varphi(\beta))$ de dos maneras para obtener la fórmula.)

18. Aplicar el teorema de la segunda sustitución para evaluar las siguientes integrales.

a) $\int_1^9 \frac{dt}{2+\sqrt{t}},$ b) $\int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} = \ln(3+2\sqrt{2}) - \ln 3,$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{t}\,dt}{1+\sqrt{t}},$ d) $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+4)} = \arctan(1) - \arctan(1/2).$

19. Explicar por qué el teorema 7.3.8 y/o el ejercicio 7.3.17 no pueden aplicarse para evaluar las siguientes integrales haciendo uso de la sustitución indicada.

a) $\int_0^4 \frac{\sqrt{t}\,dt}{1+\sqrt{t}}$ $\varphi(t) = \sqrt{t},$ b) $\int_0^4 \frac{\cos\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}}$ $\varphi(t) = \sqrt{t},$

c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1+2|t|}\,dt$ $\varphi(t) = |t|,$ d) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\varphi(t) = \operatorname{arcsen} t.$

20. a) Si Z_1 y Z_2 son conjuntos nulos, demostrar que $Z_1 \cup Z_2$ es un conjunto nulo.

b) En términos más generales, si Z_n es un conjunto nulo para toda $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\cup_{n=1}^\infty Z_n$ es un conjunto nulo. [*Sugerencia:* dadas $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ una colección contable de intervalos abiertos cuya unión contiene a Z_n y la suma de cuyas longitudes es $\leq \varepsilon/2^n$. Considerar ahora la colección contable $\{J_k^n : n, k \in \mathbb{N}\}$.]

21. Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

a) Si $t \in \mathbb{R}$, demostrar que $\int_a^b (tf \pm g)^2 \geq 0$.

b) Usar el inciso a) para demostrar que $2|\int_a^b fg| \leq t \int_a^b f^2 + (1/t) \int_a^b g^2$ para $t > 0$.

c) Si $\int_a^b f^2 = 0$, demostrar que $\int_a^b fg = 0$.

d) Demostrar ahora que $|\int_a^b fg|^2 \leq (\int_a^b |fg|)^2 \leq (\int_a^b f^2) \cdot (\int_a^b g^2)$. Esta desigualdad se conoce como la **desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** (o simplemente, la **desigualdad de Schwarz**).

22. Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función de Thomae y sea sgn la función signo. Demostrar que la función compuesta $\operatorname{sgn} \circ h$ no es Riemann integrable en $[0, 1]$.

SECCIÓN 7.4 Integración aproximada

El teorema fundamental del cálculo 7.3.1, nos proporciona un método eficaz para evaluar la integral $\int_a^b f$ *siempre que* pueda encontrarse una antiderivada F tal que $F'(x) = f(x)$ cuando $x \in [a, b]$. Sin embargo, cuando no es posible encontrar tal F, quizá el teorema fundamental no pueda usarse. No obstante, *cuando* f *es continua*, se cuenta con varias técnicas para aproximar la integral de Riemann $\int_a^b f$ usando sumas parecidas a las sumas de Riemann.

Un procedimiento muy elemental para obtener estimaciones rápidas de $\int_a^b f$, el cual se basa en el teorema 7.1.4c, consiste en observar que si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h.$$

Si las integrales de g y h pueden calcularse, entonces se tienen cotas para $\int_a^b f$. Con frecuencia estas cotas tienen la precisión suficiente para la mayoría de las necesidades.

Por ejemplo, suponer que se quiere estimar el valor de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Es fácil establecer que $e^{-x} \leq e^{-x^2} \leq 1$ para $x \in [0, 1]$, de modo que

$$\int_0^1 e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq \int_0^1 1\, dx.$$

Por consiguiente, se tiene $1 - 1/e \leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq 1$. Si se usa la media de los valores de los extremos de la desigualdad se obtiene la estimación $1 - 1/2e \approx 0.816$ para la integral con un error menor que $1/2e < 0.184$. Esta estimación es muy aproximada, pero se obtiene rápido y puede ser bastante satisfactoria para nuestras necesidades. Si se desea una mejor aproximación, puede intentarse encontrar funciones de aproximación g y h más cercanas.

Es posible usar el teorema de Taylor 6.4.1 para aproximar e^{-x^2} con un polinomio. Cuando se usa el teorema de Taylor, deben obtenerse cotas para el término del residuo para que los cálculos sean significativos. Por ejemplo, si se aplica el teorema de Taylor a e^{-y} para $0 \leq y \leq 1$, se obtiene

$$e^{-y} = 1 - y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{6}y^3 + R_3,$$

donde $R_3 = y^4 e^{-c}/24$, donde c es algún número con $0 \leq c \leq 1$. Puesto que no se cuenta con mejor información sobre la localización de c, es necesario conformarse con la estimación $0 \leq R_3 \leq y^4/24$. Se tiene, por tanto,

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + R_3,$$

donde $0 \leq R_3 \leq x^8/24$ para $x \in [0, 1]$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6)\,dx + \int_0^1 R_3\,dx \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \int_0^1 R_3\,dx.\end{aligned}$$

Puesto que se tiene $0 \leq \int_0^1 R_3\,dx \leq \frac{1}{9 \cdot 24} = \frac{1}{216} < 0.005$, se sigue que

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \tfrac{26}{35} (\approx 0.7429),$$

con un error menor que 0.005.

Particiones iguales

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, se sabe que su integral de Riemann existe. Para encontrar un valor aproximado de esta integral con la cantidad mínima de cálculos, es conveniente considerar las particiones $\mathcal{P}_n$ de $[a, b]$ en n subintervalos *iguales* con longitud $h_n := (b - a)/n$. En consecuencia, $\mathcal{P}_n$ es la partición:

$$a < a + h_n < a + 2h_n < \cdots < a + nh_n = b.$$

Si se escoge que los *puntos terminales izquierdos* y los *puntos terminales derechos* sean los puntos de las etiquetas de los subintervalos, se obtiene la **n-ésima aproximación izquierda** dada por

$$L_n(f) := h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_n),$$

y la **n-ésima aproximación derecha** dada por

$$R_n(f) := h_n \sum_{k=1}^{n} f(a + kh_n).$$

Debe advertirse que es casi igual de sencillo evaluar *ambas* aproximaciones como sólo una de ellas, ya que solamente difieren por los términos $f(a)$ y $f(b)$.

A menos que haya razones para creer que $L_n(f)$ o $R_n(f)$ está más cerca del verdadero valor de la integral que el otro, por lo general se toma su media:

$$\tfrac{1}{2}(L_n(f) + R_n(f)),$$

la cual se observa de inmediato que es igual a

$$T_n(f) := h_n(\tfrac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh_n) + \tfrac{1}{2} f(b)), \tag{1}$$

como una aproximación razonable de $\int_a^b f$.

Sin embargo, cabe señalar que si f es *creciente* en $[a, b]$, entonces a partir de un trazo de la gráfica de f resulta evidente que

$$L_n(f) \leq \int_a^b f \leq R_n(f). \tag{2}$$

En este caso, se observa de inmediato que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - T_n(f) \right| &\leq \tfrac{1}{2}(R_n(f) - L_n(f)) \\ &= \tfrac{1}{2} h_n (f(b) - f(a)) = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{(b-a)}{2n}. \end{aligned}$$

Una estimación del error como la anterior es útil, ya que proporciona una cota superior para el error de la aproximación en términos de cantidades que se conocen desde el principio. En particular, puede usarse para determinar qué tan grande deberá elegirse n a fin de tener una aproximación que sea correcta dentro de un error especificado $\varepsilon > 0$.

La discusión anterior fue válida para el caso en que f es creciente en $[a, b]$. Si f es decreciente, entonces las desigualdades en (2) deberán invertirse. Ambos casos pueden resumirse en el siguiente enunciado.

7.4.1 Teorema *Si* f : [a, b] $\to\mathbb{R}$ *es monótona y si* T_n(f) *está dada por* (1), *entonces*

$$\left|\int_a^b f - T_n(f)\right| \le |f(b)-f(a)|\cdot\frac{(b-a)}{2n}. \qquad (3)$$

7.4.2 Ejemplo Si $f(x) := e^{-x^2}$ en [0, 1], entonces f es decreciente. De (3) se sigue que si $n = 8$, entonces $|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - T_8(f)| \le (1-e^{-1})/16 < 0.04$, y si $n = 16$, entonces $|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - T_{16}(f)| \le (1-e^{-1})/32 < 0.02$. De hecho, la aproximación es considerablemente mejor, como se verá en el ejemplo 7.4.5. □

La regla del trapecio

El método de integración numérica llamado la "regla del trapecio" se basa en aproximar la función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por medio de una función continua lineal por partes. Sea $n \in \mathbb{N}$ y, como antes, sea $h_n := (b-a)/n$ y considerar la partición $\mathcal{P}_n$. Se aproxima f con la función lineal por partes g_n que pasa por los puntos $(a + kh_n, f(a + kh_n))$, donde $k = 0, 1, \cdots, n$. Parece razonable que la integral $\int_a^b f$ será "aproximadamente igual a" la integral $\int_a^b g_n$ cuando n sea lo suficientemente grande (siempre que f sea razonablemente suave).

Puesto que se sabe que el área de un trapecio con base horizontal h y lados verticales l_1 y l_2 es $\frac{1}{2}h(l_1 + l_2)$, se tiene

$$\int_{a+kh_n}^{a+(k+1)h_n} g_n = \tfrac{1}{2}h_n\cdot[f(a+kh_n)+f(a+(k+1)h_n],$$

para $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Al sumar estos términos y observar que cada punto de partición en $\mathcal{P}_n$, con excepción de a y b, pertenece a dos subintervalos adyacentes, se obtiene

$$\int_a^b g_n = h_n\left(\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h_n)+\cdots+f(a+(k-1)h_n)+\tfrac{1}{2}f(b)\right).$$

Pero el término de la derecha es precisamente $T_n(f)$, el cual se encontró en (1) como la media de $L_n(f)$ y $R_n(f)$. A $T_n(f)$ se le llama la **n-ésima aproximación del trapecio** de f.

En el teorema 7.4.1 se obtuvo una estimación del error en el caso en que f es monótona; se enuncia a continuación un resultado sin esta restricción sobre f pero en términos de la segunda derivada f'' de f.

7.4.3 Teorema *Sean* f, f' *y* f'' *continuas en* [a, b] *y sea* T_n(f) *la* n-*ésima aproximación del trapecio* (1). *Entonces existe* c $\in$ [a, b] *tal que*

$$T_n(f) - \int_a^b f = \frac{(b-a)h_n^2}{12}\cdot f''(c). \qquad (4)$$

En el apéndice D se presenta una demostración de este resultado, la cual depende de varios resultados obtenidos en los capítulos 5 y 6.

La igualdad (4) es interesante por cuanto puede dar tanto una cota superior scomo una cota inferior para la diferencia $T_n(f) - \int_a^b f$. Por ejemplo, si $f''(x) \geq A > 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces (4) implica que esta diferencia excede siempre $\frac{1}{12} A(b-a)h_n^2$. Si sólo se tiene $f''(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$, que es el caso cuando f es **convexa** (= **cóncava hacia arriba**), entonces la aproximación del trapecio es siempre *muy grande*. El lector deberá trazar una figura para visualizar este hecho. Sin embargo, generalmente es la cota superior la que es de mayor interés.

7.4.4 Corolario *Sean* f, f' *y* f'' *continuas, y sea* $|f''(x)| \leq B_2$ *para toda* $x \in [a, b]$. *Entonces*

$$\left| T_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)h_n^2}{12} \cdot B_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot B_2. \tag{5}$$

Cuando es posible encontrar una cota superior B_2, la expresión (5) puede usarse para determinar qué tan grande debe elegirse n a fin de tener la seguridad de una precisión deseada.

7.4.5 Ejemplo Si $f(x) := e^{-x^2}$ en $[0, 1]$, entonces un cálculo indica que $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, por lo que puede tomarse $B_2 = 2$. Así, si $n = 8$, entonces

$$\left| T_8(f) - \int_0^1 f \right| \leq \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0.003.$$

Por otra parte, si $n = 16$, entonces se tiene

$$\left| T_{16}(f) - \int_0^1 f \right| \leq \frac{2}{12 \cdot 256} = \frac{1}{1536} < 0.00066.$$

Por tanto, la precisión en este caso es considerablemente mejor que la que se anticipó en el ejemplo 7.4.2. □

La regla del punto medio

Un método obvio para aproximar la integral de f es tomar las sumas de Riemann evaluadas en los *puntos medios* de los subintervalos. Así, si $\mathcal{P}_n$ es la partición con el mismo espaciamiento dada antes, la **aproximación del punto medio** de f está dada por

$$\begin{aligned} M_n(f) &:= h_n(f(a + \tfrac{1}{2}h_n) + f(a + \tfrac{3}{2}h_n) + \cdots + f(a(n - \tfrac{1}{2})h_n)) \\ &= h_n \sum_{k=1}^{n} f(a + (k - \tfrac{1}{2})h_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Otro método podría consistir en usar funciones lineales por partes que sean *tangentes* a la gráfica de f en los puntos medios de estos subintervalos. A primera vista, parecería necesario conocer la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en cada uno de los puntos medios $a + (k - \frac{1}{2}h_n)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Sin embargo, es un ejercicio de geometría demostrar que el *área* del trapecio cuya parte superior es esta recta tangente en el punto medio $a + (k - \frac{1}{2})h_n$ es igual al *área* del rectángulo cuya altura es $f(a + (k - \frac{1}{2})h_n)$. (Véase la figura 7.4.1.) Por tanto, esta área está dada por (6) y la "regla del trapecio tangente" resulta ser igual que la "regla del punto medio". Se enuncia a continuación un teorema donde se establece que la regla del punto medio produce una precisión mejor que la regla del trapecio por un factor de 2.

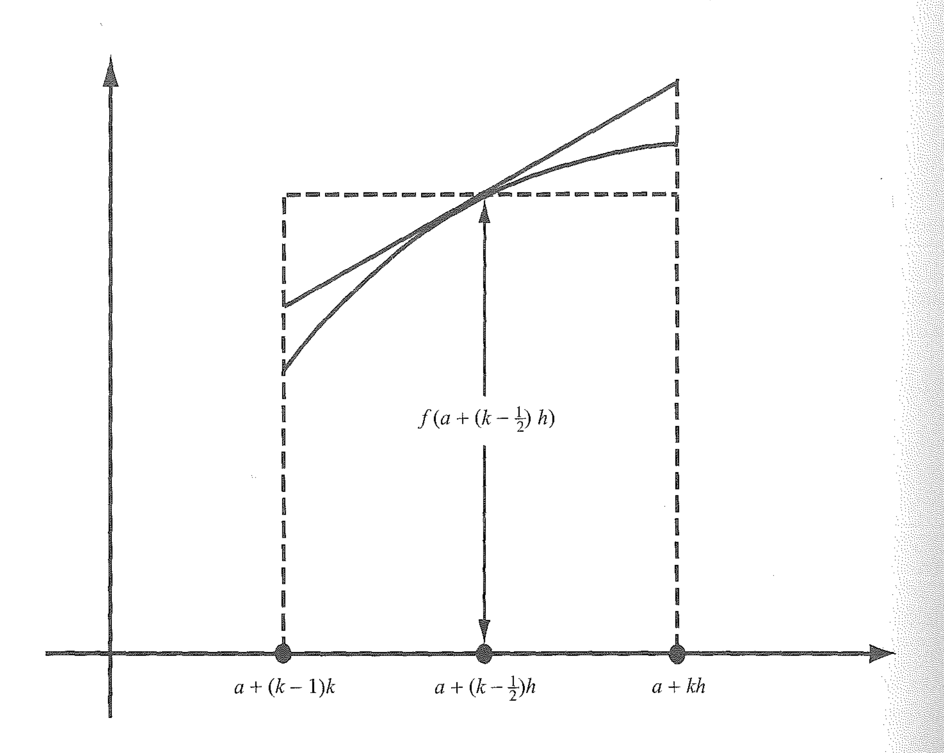


Figura 7.4.1 El trapecio tangente.

7.4.6 Teorema *Sean* f, f′ *y* f″ *continuas en* [a, b] *y sea* $M_n(f)$ *la* n-*ésima aproximación del punto medio* (6). *Entonces existe* $\gamma \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f - M_n(f) = \frac{(b-a)\,h_n^2}{24} \cdot f''(\gamma). \qquad (7)$$

La demostración de cómo se obtuvo este resultado se presenta en el apéndice D.

Como en el caso del teorema 7.4.3, la fórmula (7) puede utilizarse para dar tanto una cota superior como una cota inferior para la diferencia $\int_a^b f - M_n(f)$, aunque es una cota superior la que generalmente es de mayor interés. En contraste con la regla del trapecio, si la función es **convexa**, entonces la aproximación del punto medio es siempre muy pequeña.

El siguiente resultado es paralelo al corolario 7.4.4.

7.4.7 Corolario *Sean* f, f′ *y* f″ *continuas, y sea* $|f''(x)| \le B_2$ *para toda* $x \in [a, b]$. *Entonces*

$$\left| M_n(f) - \int_a^b f \right| \le \frac{(b-a)h_n^2}{24} \cdot B_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot B_2. \tag{8}$$

La regla de Simpson

El último procedimiento de aproximación que se considera suele dar una aproximación mejor que la regla del trapecio o que la del punto medio y en esencia no requiere cálculos adicionales. Sin embargo, la convexidad (o la concavidad) de f no proporciona información alguna acerca del error de este método.

Mientras que las reglas del trapecio y la del punto medio se basaron en la aproximación de f por medio de funciones lineales por partes, la regla de Simpson aproxima la gráfica de f por medio de arcos parabólicos. Como ayuda para motivar la fórmula, el lector puede demostrar que si están dados tres puntos

$$(-h, y_0),\ (0, y_1) \text{ y } (h, y_2)$$

entonces la función cuadrática $q(x) := Ax^2 + Bx + C$ que pasa por estos puntos tiene la propiedad de que

$$\int_{-h}^{h} q = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ahora bien, sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $n \in \mathbb{N}$ *par*, y sea $h_n := (b-a)/n$. En cada "subintervalo doble"

$$[a, a+2h_n],\ [a+2h_n, a+4h_n),\ \cdots,\ [b-2h_n, b],$$

se aproxima f con $n/2$ funciones cuadráticas que coinciden con f en los puntos

$$y_0 := f(a), \quad y_1 := f(a+h_n), \quad y_2 := f(a+2h_n), \quad \cdots, \quad y_n := f(b).$$

Estas consideraciones llevan a la n-**ésima aproximación de Simpson**, definida por

$$S_n(f) := \tfrac{1}{3}h_n(f(a) + 4f(a+h_n) + 2f(a+2h_n) + 4f(a+3h_n)$$

$$+ 2f(a+4h_n) + \cdots + 2f(b-2h_n) + 4f(b-h_n) + f(b)). \qquad (9)$$

Obsérvese que los coeficientes de los valores de f en los $n+1$ puntos de partición siguen el patrón 1, 4, 2, 4, 2, · · ·, 4, 2, 4, 1.

Se enuncia ahora un teorema que produce una estimación de la precisión de la aproximación de Simpson; incluye la *cuarta derivada* de f.

7.4.8 Teorema *Sean* $f, f', f'', f^{(3)}$ *y* $f^{(4)}$ *continuas en* $[a, b]$ *y sea* $n \in \mathbb{N}$ *par. Si* $S_n(f)$ *es la* n*-ésima aproximación de Simpson* (9), *entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$S_n(f) - \int_a^b f = \frac{(b-a)h_n^4}{180} \cdot f^{(4)}(c). \qquad (10)$$

En el apéndice D se da una demostración de este resultado.

El siguiente resultado es paralelo a los corolarios 7.4.4 y 7.4.7.

7.4.9 Corolario *Sean* $f, f', f'', f^{(3)}$ *y* $f^{(4)}$ *continuas en* $[a, b]$ *y sea* $|f^{(4)}(x)| \le B_4$ *para toda* $x \in [a, b]$. *Entonces*

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \le \frac{(b-a)h_n^4}{180} \cdot B_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot B_4. \qquad (11)$$

El uso exitoso de la estimación (11) depende de ser capaces de encontrar una cota superior para la cuarta derivada.

7.4.10 Ejemplo Si $f(x) := 4e^{-x^2}$ en $[0, 1]$, entonces con un cálculo se llega a

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3),$$

de donde se sigue que $|f^{(4)}(x)| \leq 20$ para $x \in [0, 1]$, por lo que puede tomarse $B_4 = 20$. De (11) se sigue que si $n = 8$, entonces

$$\left| S_8(f) - \int_0^1 f \right| \leq \frac{1}{180 \cdot 8^4} \cdot 20 = \frac{1}{36\ 864} < 0.000\ 03$$

y que si $n = 16$, entonces

$$\left| S_{16}(f) - \int_0^1 f \right| \leq \frac{1}{589\ 824} < 0.000\ 0017. \qquad \square$$

Observación Es posible usar la n-ésima aproximación del punto medio $M_n(f)$ para "subir" hasta las aproximaciones $(2n)$-ésima del trapecio y de Simpson utilizando las fórmulas

$$T_{2n}(f) = \tfrac{1}{2}M_n(f) + \tfrac{1}{2}T_n(f) \quad \text{y} \quad S_{2n}(f) = \tfrac{2}{3}M_n(f) + \tfrac{1}{3}T_n(f),$$

que se dan en los ejercicios. Así, una vez que se ha calculado la aproximación del trapecio inicial $T_1 = T_1(f)$, solamente es necesario encontrar las aproximaciones del punto medio $M_n = M_n(f)$. Es decir, se emplea la siguiente secuencia de cálculos:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(b-a)(f(a)+(b));$$

$$M_1 = (b-a)f(\tfrac{1}{2}(a+b)),\quad T_2 = \tfrac{1}{2}M_1 + \tfrac{1}{2}T_1,\quad S_2 = \tfrac{2}{3}M_1 + \tfrac{1}{3}T_1;$$

$$M_2,\quad T_4 = \tfrac{1}{2}M_2 + \tfrac{1}{2}T_2,\quad S_4 = \tfrac{2}{3}M_2 + \tfrac{1}{3}T_2;$$

$$M_4,\quad T_8 = \tfrac{1}{2}M_4 + \tfrac{1}{2}T_4,\quad S_8 = \tfrac{2}{3}M_4 + \tfrac{1}{3}T_4;$$

....

Ejercicios de la sección 7.4

1. Usar la aproximación del trapecio con $n = 4$ para evaluar $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$. Demostrar que $0.6866 \leq \ln 2 \leq 0.6958$ y que

$$0.0013 < \frac{1}{768} \leq T_4 - \ln 2 \leq \frac{1}{96} < 0.0105.$$

2. Usar la aproximación de Simpson con $n = 4$ para evaluar $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$. Demostrar que $0.6927 \leq \ln 2 \leq 0.6933$ y que

$$0.000\,016 < \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{1920} \leq S_4 - \ln 2 \leq \frac{1}{1920} < 0.000\,521.$$

3. Sea $f(x) := (1 + x^2)^{-1}$ para $x \in [0, 1]$. Demostrar que $f''(x) = 2(3x^2 - 1)(1 + x^2)^{-3}$ y que $|f''(x)| \leq 2$ para $x \in [0, 1]$. Usar la aproximación del trapecio con $n = 4$ para evaluar $\pi/4 = \int_0^1 f(x)\,dx$. Demostrar que $|T_4(f) - (\pi/4)| \leq 1/96 < 0.0105$.

4. Si se usa la aproximación del trapecio $T_n(f)$ para aproximar $\pi/4$ como en el ejercicio 3, demostrar que debe tomarse $n \geq 409$ a fin de asegurar que el error es menor que 10^{-6}.

5. Sea f como en el ejercicio 3. Demostrar que $f^{(4)}(x) = 24(5x^4 - 10x^2 + 1)(1 + x^2)^{-5}$ y que $|f^{(4)}(x)| \leq 96$ para $x \in [0, 1]$. Usar la aproximación de Simpson con $n = 4$ para evaluar $\pi/4$. Demostrar que $|S_4(f) - (\pi/4)| \leq 1/480 < 0.0021$.

6. Si se usa la aproximación de Simpson $S_n(f)$ para aproximar $\pi/4$ como en el ejercicio 5, demostrar que debe tomarse $n \geq 28$ a fin de asegurar que el error es menor que 10^{-6}.

7. Si p es un polinomio a lo sumo de grado 3, demostrar entonces que las aproximaciones de Simpson son exactas.

8. Demostrar que si $f''(x) \geq 0$ en $[a, b]$ (es decir, si f es convexa en $[a, b]$), entonces para cualesquier números naturales m, n se tiene $M_n(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq T_m(f)$. Si $f''(x) \leq 0$ en $[a, b]$, esta desigualdad se invierte.

9. Demostrar que $T_{2n}(f) = \frac{1}{2}[M_n(f) + T_n(f)]$.

10. Demostrar que $S_{2n}(f) = \frac{2}{3} M_n(f) + \frac{1}{3} T_n(f)$.

11. Demostrar que el número uno tiene la estimación:

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq [(b - a)^2/18n^2] B_2,$$

donde $B_2 \geq |f''(x)|$ para toda $x \in [a, b]$.

12. Obsérvese que $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\,dx = \pi/4$. Explicar por qué las estimaciones del error dadas por las fórmulas (4), (7) y (10) no pueden usarse. Demostrar que si $h(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ para x en $[0, 1]$, entonces $T_n(h) \leq \pi/4 \leq M_n(h)$. Calcular $M_8(h)$ y $T_8(h)$.

13. Si h es como en el ejercicio 12, explicar por qué $K := \int_0^{1/\sqrt{2}} h(x)\,dx = \pi/8 + 1/4$. Demostrar que $|h''(x)| \leq 2^{3/2}$ y que $|h^{(4)}(x)| \leq 9 \cdot 2^{7/2}$ para $x \in [0, 1/\sqrt{2}]$. Demostrar que $|K - T_n(h)| \leq 1/12n^2$ y que $|K - S_n(h)| \leq 1/10n^4$. Utilizar estos resultados para calcular π.

En los ejercicios 14-20, aproximar las integrales indicadas dando estimaciones del error. Utilizar una calculadora para obtener un grado alto de precisión.

14. $\int_0^2 (1+x^4)^{1/2} dx.$

15. $\int_0^2 (4+x^3)^{1/2} dx.$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$

17. $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$

18. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}.$

19. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx.$

20. $\int_0^1 \cos(x^2) dx.$

Capítulo

8 SUCESIONES DE FUNCIONES

En capítulos anteriores con frecuencia se ha hecho uso de sucesiones de números reales. En este capítulo se consideran sucesiones cuyos términos son *funciones* en vez de números reales. Las sucesiones de funciones surgen de manera natural en el análisis real y resultan de particular utilidad para obtener aproximaciones de una función dada y para definir nuevas funciones a partir de funciones conocidas.

En la sección 8.1 se introducen dos nociones diferentes de convergencia de una sucesión de funciones: la convergencia puntual y la convergencia uniforme. Este último tipo de convergencia es muy importante y será el principal centro de atención. La razón para proceder así es el hecho de que, como se establece en la sección 8.2, la convergencia uniforme "preserva" ciertas propiedades en el sentido de que si cada término de una sucesión de funciones uniformemente convergente posee estas propiedades, entonces la función límite también las posee.

En la sección 8.3 se aplica el concepto de convergencia uniforme para definir y deducir las propiedades básicas de las funciones exponencial y logarítmica. La sección 8.4 se dedica a un tratamiento similar de las funciones trigonométricas.

SECCIÓN 8.1 Convergencias puntual y uniforme

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ dado y suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una función $f_n : A \to \mathbb{R}$; se dirá que (f_n) es una **sucesión de funciones** de A a $\mathbb{R}$. Evidentemente, para toda $x \in A$, dicha sucesión da lugar a una sucesión de números reales, a saber, la sucesión

$$(f_n(x)), \tag{1}$$

obtenida al evaluar cada una de las funciones en el punto x. Para ciertos valores de $x \in A$ la sucesión (1) converge, y para otros valores de $x \in A$ esta sucesión puede divergir. Para toda $x \in A$ para la que la sucesión (1) converge existe un número real determinado de manera única lím $(f_n(x))$. En general, el valor de este límite, cuando existe, dependerá de la elección del punto $x \in A$. Por tanto, de esta manera surge una función cuyo dominio consiste en todos los números $x \in A$ para los que la sucesión (1) converge.

8.1.1 Definición Sea (f_n) una sucesión de funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, sea $A_0 \subseteq A$ y sea $f: A_0 \to \mathbb{R}$. Se dice que la **sucesión (f_n) converge a f en A_0** si, para toda $x \in A_0$, la sucesión $(f_n(x))$ converge a $f(x)$ en $\mathbb{R}$. En este caso a f se le llama el **límite de la sucesión (f_n) en A_0**. Cuando tal función f existe, se dice que la sucesión (f_n) **es convergente en A_0**, o que (f_n) **converge puntualmente en A_0**.

Del teorema 3.1.4 se sigue que, excepto para una posible modificación del dominio A_0, la función límite se encuentra determinada de manera única. Por lo general se escoge que A_0 sea el conjunto más grande posible; es decir, se toma A_0 como el conjunto de toda $x \in A$ para la cual la sucesión (1) es convergente en $\mathbb{R}$.

Para denotar que la sucesión (f_n) converge a f en A_0, algunas veces se escribe

$$f = \lim(f_n) \quad \text{en} \quad A_0, \qquad \text{o} \qquad f_n \to f \quad \text{en} \quad A_0.$$

En ocasiones, cuando f_n y f están dadas por fórmulas, se escribe

$$f(x) = \lim f_n(x) \quad \text{para} \quad x \in A_0, \qquad \text{o} \qquad f_n(x) \to f(x) \quad \text{para} \quad x \in A_0.$$

8.1.2 Ejemplos **a)** $\lim(x/n) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) := x/n$ y sea $f(x) := 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Por el ejemplo 3.1.6a, se tiene $\lim(1/n) = 0$. En consecuencia, por el teorema 3.2.3 se sigue que

$$\lim(f_n(x)) = \lim(x/n) = x \lim(1/n) = x \cdot 0 = 0$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. (Véase la figura 8.1.1.)

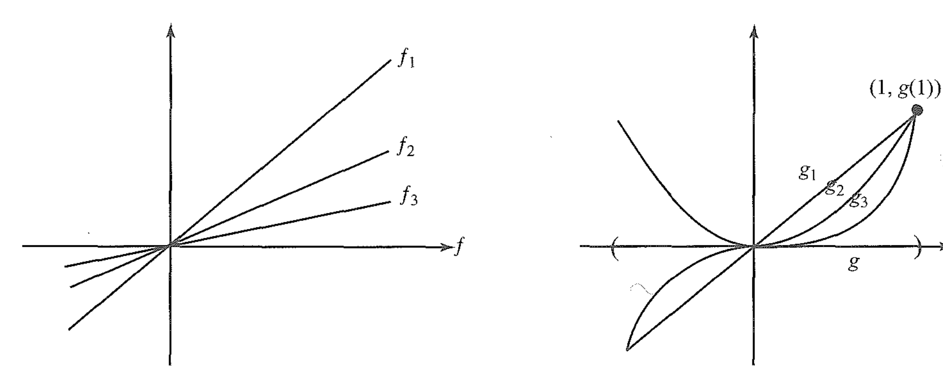


Figura 8.1.1 $f_n(x) = x/n$. **Figura 8.1.2** $g_n(x) = x^n$.

b) $\lim(x^n)$.

Sea $g_n(x) := x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. (Véase la figura 8.1.2.) Evidentemente, si $x = 1$, entonces la sucesión $(g_n(1)) = (1)$ converge a 1. Del ejemplo 3.1.11b se sigue que $\lim(x^n) = 0$ para $0 \le x < 1$ y se observa de inmediato que esto también se cumple para $-1 < x < 0$. Si $x = -1$, entonces $g_n(-1) = (-1)^n$, y en el ejemplo 3.2.8b se vio que la sucesión es divergente. Del mismo modo, si $|x| > 1$, enton-

ces la sucesión (x^n) no está acotada, por lo que no es convergente en $\mathbb{R}$. Se concluye que si

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -1 < x < 1, \\ 1 & \text{para} \quad x = 1, \end{cases}$$

entonces la sucesión (g_n) converge a g en el conjunto $(-1, 1]$.

c) $\lim ((x^2 + nx)/n) = x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Sea $h_n(x) := (x^2 + nx)/n$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $h(x) := x$ para $x \in \mathbb{R}$. (Véase la figura 8.1.3.) Puesto que se tiene $h_n(x) = (x^2/n) + x$, del ejemplo 3.1.6a y del teorema 3.2.3 se sigue que $h_n(x) \to x = h(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

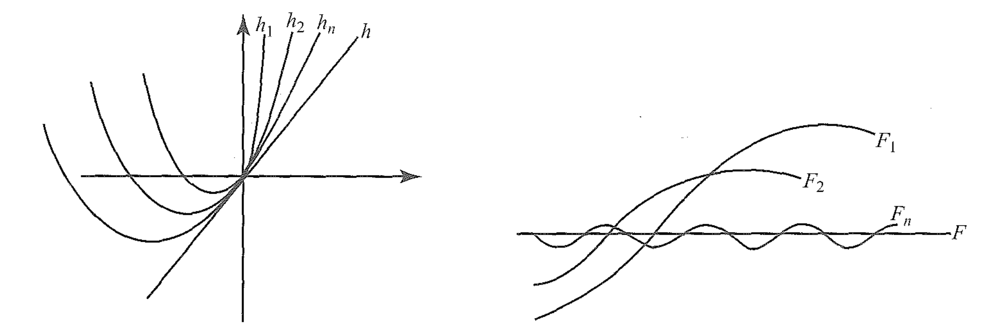


Figura 8.1.3 $h_n(x) = (x^2 + nx)/n$.

Figura 8.1.4 $F_n(x) = \text{sen}(nx + n)/n$.

d) $\lim((1/n)\,\text{sen}(nx + n)) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

Sea $F_n(x) := (1/n)\,\text{sen}(nx + n)$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $F(x) := 0$ para $x \in \mathbb{R}$. (Véase la figura 8.1.4.) Puesto que $|\text{sen}\, y| \le 1$ para toda $y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \frac{1}{n}\text{sen}(nx + n) \right| \le \frac{1}{n} \tag{2}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se sigue que $\lim (F_n(x)) = 0 = F(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. El lector deberá advertir que, dada cualquier $\varepsilon > 0$, si n es lo suficientemente grande, entonces $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ para todos los valores de x simultáneamente. □

En parte para reforzar la definición 8.1.1 y en parte para preparar el terreno para la importante noción de convergencia uniforme, la definición 8.1.1 se reformula de la siguiente manera.

8.1.3 Lema *Una sucesión* (f_n) *de funciones de* $A \subseteq \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$ *converge a una función* $f : A_0 \to \mathbb{R}$ *en* A_0 *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *y para toda* $x \in A_0$ *existe un número natural* $K(\varepsilon, x)$ *tal que si* $n \ge K(\varepsilon, x)$, *entonces*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon . \tag{3}$$

Se le deja al lector demostrar que esta formulación es equivalente a la definición 8.1.1. Queremos subrayar que el valor de $K(\varepsilon, x)$ dependerá, en general, *tanto de* $\varepsilon > 0$ *como de* $x \in A_0$. El lector deberá confirmar el hecho de que, en los ejemplos 8.1.2a-c, el valor de $K(\varepsilon, x)$ requerido para obtener una desigualdad como (3) depende tanto de $\varepsilon > 0$ como de $x \in A_0$. La razón intuitiva de este hecho es que la convergencia de la sucesión es "significativamente más rápida" en algunos puntos que en otros. Sin embargo, en el ejemplo 8.1.2d, como se vio en la desigualdad (2), si se elige n lo suficientemente grande, puede hacerse que $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ para *todos* los valores de $x \in \mathbb{R}$. Es justamente esta muy sutil diferencia la que distingue la noción de "convergencia puntual" de una sucesión de funciones (en el sentido de la definición 8.1.1) de la noción de "convergencia uniforme".

Convergencia uniforme

8.1.4 Definición Una sucesión (f_n) de funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ **converge uniformemente en** $A_0 \subseteq A$ a una función $f: A_0 \to \mathbb{R}$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\varepsilon)$ (que depende de ε pero **no** de $x \in A_0$) tal que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{para toda} \quad x \in A_0. \tag{4}$$

En este caso se dice que la sucesión (f_n) es **uniformemente convergente en** A_0. En ocasiones se escribe

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{en} \qquad A_0, \qquad \text{o} \qquad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \qquad \text{para} \qquad x \in A_0.$$

Es una consecuencia inmediata de las definiciones que si la sucesión (f_n) es uniformemente convergente a f en A_0, entonces también converge puntualmente a f en A_0 en el sentido de la definición 8.1.1. El hecho de que el recíproco no siempre se cumple se pone de manifiesto mediante un examen atento de los ejemplos 8.1.2a-c; más adelante se presentan otros ejemplos.

En ocasiones resulta conveniente contar con la siguiente condición necesaria y suficiente para que una sucesión (f_n) *no* converja uniformemente a f en A_0.

8.1.5 Lema *Una sucesión* (f_n) *de funciones de* $A \subseteq \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$ *no converge uniformemente a una función* $f: A_0 \to \mathbb{R}$ *en* $A_0 \subseteq A$ *si y sólo si para alguna* $\varepsilon_0 > 0$ *existe una subsucesión* (f_{n_k}) *de* (f_n) *y una sucesión* (x_k) *en* A_0 *tales que*

$$\left|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\right| \geq \varepsilon_0 \qquad \textit{para toda} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

La demostración de este resultado requiere tan sólo que el lector haga la negación de la definición 8.1.4; se le deja al lector como un ejercicio importante. Se indica a continuación cómo puede usarse este resultado.

8.1.6 Ejemplos **a)** Considerar el ejemplo 8.1.2a. Si se hace $n_k := k$ y $x_k := k$, entonces $f_{n_k}(x_k) = 1$, de tal modo que $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1$. Por lo tanto, la sucesión (f_n) no converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$.

b) Considerar el ejemplo 8.1.2b. Si $n_k := k$ y $x_k := (\frac{1}{2})^{1/k}$, entonces

$$\left| g_{n_k}(x_k) - g(x_k) \right| = |\tfrac{1}{2} - 0| = \tfrac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la sucesión (g_n) no converge uniformemente a g en $(-1, 1]$.
c) Considerar el ejemplo 8.1.2c. Si $n_k := k$ y $x_k := -k$, entonces $h_{n_k}(x_k) = 0$ y $h(x_k) = -k$, por lo que $|h_{n_k}(x_k) - h(x_k)| = k$. Por lo tanto, la sucesión (h_n) no converge uniformemente a h en $\mathbb{R}$. □

La norma uniforme

Al examinar la convergencia uniforme, con frecuencia resulta conveniente usar la noción de la norma uniforme en un conjunto de funciones acotadas.

8.1.7 Definición Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\varphi : A \to \mathbb{R}$ es una función, se dice que φ está **acotada en A** si el conjunto $\varphi(A)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Si φ está acotada, se define la **norma uniforme de φ en A** por

$$\|\varphi\|_A := \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\}. \tag{6}$$

Adviértase que si $\varepsilon > 0$, entonces se sigue que

$$\|\varphi\|_A \le \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\varphi(x)| \le \varepsilon \quad \text{para toda} \quad x \in A. \tag{7}$$

8.1.8 Lema *Una sucesión* (f_n) *de funciones acotadas en* $A \subseteq \mathbb{R}$ *converge uniformemente a* f *en* A *si y sólo si* $\|f_n - f\|_A \to 0$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si (f_n) converge uniformemente a f en A, entonces por la definición 8.1.4, dada cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon)$ tal que si $n \ge K(\varepsilon)$ y $x \in A$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Por la definición de supremo, se sigue que $\|f_n - f\|_A \le \varepsilon$ siempre que $n \ge K(\varepsilon)$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria esto implica que $\|f_n - f\|_A \to 0$.

$(\Leftarrow)$ Si $\|f_n - f\|_A \to 0$, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $H(\varepsilon)$ tal que si $n \ge H(\varepsilon)$ entonces $\|f_n - f\|_A \le \varepsilon$. De (7) se sigue que $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ para toda $n \ge H(\varepsilon)$ y $x \in A$. Por lo tanto, (f_n) converge uniformemente a f en A. Q.E.D.

Se ilustra a continuación el uso del lema 8.1.8 como una herramienta para examinar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones acotadas.

8.1.9 Ejemplos **a)** El lema 8.1.8 no puede aplicarse a la sucesión del ejemplo 8.1.2a debido a que la función $f_n(x) - f(x) = x/n$ no está acotada en $\mathbb{R}$.

Para fines ilustrativos, sea $A := [0, 1]$. Aun cuando la sucesión (x/n) no converge uniformemente a la función cero en $\mathbb{R}$, se demostrará que la convergencia es uniforme en A. Para ello, se observa que

$$\|f_n - f\|_A = \sup\{|x/n - 0| : 0 \le x \le 1\} = \frac{1}{n}$$

por lo que $\|f_n - f\|_A \to 0$. Por lo tanto, (f_n) es uniformemente convergente a f en A.

b) Sea $g_n(x) := x^n$ para $x \in A := [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$, y sea $g(x) := 0$ para $0 \le x < 1$ y $g(1) := 1$. Las funciones $g_n(x) - g(x)$ están acotadas en A y

$$\|g_n - g\|_A = \sup\begin{Bmatrix} x^n & \text{para} & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{para} & x = 1 \end{Bmatrix} = 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\|g_n - g\|_A$ *no* converge a 0, se infiere que la sucesión (g_n) *no* converge uniformemente a g en A.

c) El lema 8.1.8 no puede aplicarse a la sucesión del ejemplo 8.1.2c porque la función $h_n(x) - h(x) = x^2/n$ no está acotada en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, sea $A := [0, 8]$ y considerar

$$\|h_n - h\|_A = \sup\{x^2/n : 0 \le x \le 8\} = 64/n.$$

Por lo tanto, la sucesión (h_n) converge uniformemente a h en A.

d) Con referencia al ejemplo 8.1.2d, se observa a partir de (2) que $\|F_n - F\|_{\mathbb{R}} \le 1/n$. Por consiguiente, (F_n) converge uniformemente a F en $\mathbb{R}$.

e) Sea $G(x) := x^n(1 - x)$ para $x \in A := [0, 1]$. Entonces la sucesión $(G_n(x))$ converge a $G(x) := 0$ para toda $x \in A$. Para calcular la norma uniforme de $G_n - G = G_n$ en A, se encuentra la derivada y se resuelve

$$G_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$$

para obtener el punto $x_n := n/(n + 1)$. Se trata de un punto interior de $[0, 1]$ y usando el criterio de la primera derivada 6.2.8 se verifica con facilidad que G_n alcanza un máximo en $[0, 1]$ en el punto x_n. Por lo tanto, se obtiene

$$\|G_n\|_A = G_n(x_n) = (1 + 1/n)^{-n} \cdot \frac{1}{n+1},$$

que converge a $(1/e) \cdot 0 = 0$. En consecuencia, se ve que la convergencia es uniforme en A. □

Haciendo uso de la norma uniforme puede obtenerse una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme que suele ser útil.

8.1.10 Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones acotadas en* $A \subseteq \mathbb{R}$. *Entonces esta sucesión converge uniformemente a una función acotada* f *en* A *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $H(\varepsilon)$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que para toda* $m, n \ge H(\varepsilon)$, *entonces* $\|f_m - f_n\|_A \le \varepsilon$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f_n \rightrightarrows f$ en A, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $K(\frac{1}{2}\varepsilon)$ tal que si $n \geq K(\frac{1}{2}\varepsilon)$ entonces $\|f_n - f\|_A \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. En consecuencia, si $m, n \geq K(\frac{1}{2}\varepsilon)$, entonces se concluye que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

para toda $x \in A$. Por lo tanto, $\|f_m - f_n\|_A \leq \varepsilon$ para $m, n \geq K(\frac{1}{2}\varepsilon) =: H(\varepsilon)$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, suponer que para $\varepsilon > 0$ existe $H(\varepsilon)$ tal que si $m, n \geq H(\varepsilon)$, entonces $\|f_m - f_n\|_A \leq \varepsilon$. Por lo tanto, para toda $x \in A$ se tiene

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_A \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad m, n \geq H(\varepsilon). \tag{8}$$

Se sigue que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$; por lo tanto, por el teorema 3.5.5, es una sucesión convergente. Se define $f: A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := \lim(f_n(x)) \quad \text{para} \quad x \in A.$$

Si se hace que $n \to \infty$ en (8), por el teorema 3.2.6 se sigue que para toda $x \in A$ se tiene

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad m \geq H(\varepsilon).$$

Por lo tanto, la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en A. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 8.1

1. Demostrar que $\lim(x/(x + n)) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

2. Demostrar que $\lim(nx/(1 + n^2x^2)) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

3. Evaluar $\lim(nx/(1 + nx))$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

4. Evaluar $\lim(x^n/(1 + x^n))$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

5. Evaluar $\lim((\operatorname{sen} nx)/(1 + nx))$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

6. Demostrar que $\lim(\arctan nx) = (\pi/2)\operatorname{sgn} x$ para $x \in \mathbb{R}$.

7. Evaluar $\lim(e^{-nx})$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

8. Demostrar que $\lim(xe^{-nx}) = 0$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

9. Demostrar que $\lim(x^2e^{-nx}) = 0$ y que $\lim(n^2x^2e^{-nx}) = 0$ para $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.

10. Demostrar que $\lim((\cos \pi x)^{2n})$ existe para toda $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el límite?

11. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 1 es uniforme en el intervalo $[0, a]$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, \infty)$.

12. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 2 es uniforme en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, \infty)$.

13. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 3 es uniforme en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, \infty)$.

14. Demostrar que si $0 < b < 1$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 4 es uniforme en el intervalo $[0, b]$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

15. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 5 es uniforme en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, \infty)$.

16. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 6 es uniforme en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no es uniforme en el intervalo $(0, \infty)$.

17. Demostrar que si $a > 0$, entonces la convergencia de la sucesión del ejercicio 7 es uniforme en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no es uniforme en el intervalo $[0, \infty)$.

18. Demostrar que la convergencia de la sucesión del ejercicio 8 es uniforme en $[0, \infty)$.

19. Demostrar que la sucesión (x^2e^{-nx}) converge uniformemente en $[0, \infty)$.

20. Demostrar que si $a > 0$, entonces la sucesión $(n^2x^2e^{-nx})$ converge uniformemente en el intervalo $[a, \infty)$, pero que no converge uniformemente en el intervalo $[0, \infty)$.

21. Demostrar que si (f_n), (g_n) convergen uniformemente a f, g, respectivamente, en el conjunto A, entonces $(f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f + g$ en A.

22. Demostrar que si $f_n(x) := x + 1/n$ y $f(x) := x$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces (f_n) converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$, pero que la sucesión (f_n^2) no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. (Por tanto, el producto de sucesiones uniformemente convergentes de funciones pueden no converger uniformemente.)

23. Sean (f_n), (g_n) sucesiones de funciones acotadas en A que convergen uniformemente a f, g, respectivamente, en A. Demostrar que (f_ng_n) converge uniformemente a fg en A.

24. Sea (f_n) una sucesión de funciones que converge uniformemente a f en A y que satisface $|f_n(x)| \le M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $x \in A$. Si g es continua en el intervalo $[-M, M]$, demostrar que la sucesión $(g \circ f_n)$ converge uniformemente a $g \circ f$ en A.

SECCIÓN 8.2 Intercambio de límites

Con frecuencia es conveniente saber si el límite de una sucesión de funciones es una función continua, una función derivable o una función Riemann integrable. Desafortunadamente, no siempre es el caso que el límite de una sucesión de funciones posea estas útiles propiedades.

8.2.1 Ejemplos **a)** Sea $g_n(x) := x^n$ para $x \in [0, 1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como se señaló en el ejemplo 8.1.2b, la sucesión (g_n) converge puntualmente a la función

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{para} \quad x = 1. \end{cases}$$

Aun cuando todas las funciones g_n son continuas en $x = 1$, la función límite g no es continua en $x = 1$. Recuérdese que en el ejemplo 8.1.6b se demostró que esta sucesión no converge uniformemente a g en $[0, 1]$.

b) Cada una de las funciones $g_n(x) = x^n$ del inciso a) tiene derivada continua en $[0, 1]$. Sin embargo, la función límite g no tiene derivada en $x = 1$, ya que no es continua en ese punto.

c) Sea que $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ esté definida para $n \geq 2$ por

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n) & \text{para} \quad 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{para} \quad 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(Véase la figura 8.2.1.) Es evidente que cada una de las funciones f_n es continua en $[0, 1]$; en consecuencia, son Riemann integrables. Sea por medio de un cálculo directo o con referencia a la interpretación de la integral como un área, se obtiene

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

El lector puede demostrar que $f_n(x) \to 0$ para toda $x \in [0, 1]$; y en consecuencia, la función límite f se anula y es continua (y por consiguiente, integrable), y así, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Se llega así a la incómoda situación en la que:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1 = \lim \int_0^1 f_n(x)dx.$$

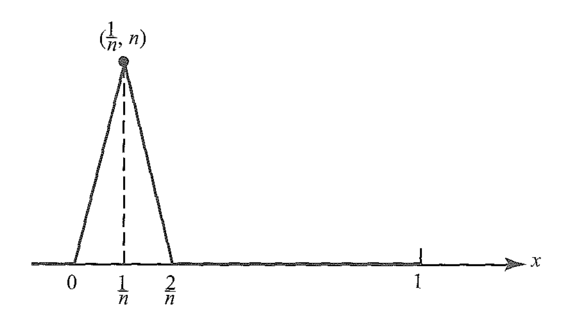


Figura 8.2.1 Ejemplo 8.2.1c.

d) Quienes consideren "artificiales" las funciones f_n del inciso c) quizá prefieran considerar la sucesión (h_n) definida por $h_n(x) := 2nxe^{-nx^2}$ para $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $h_n = H'_n$, donde $H_n(x) := -e^{-nx^2}$, por el teorema fundamental 7.3.1 se obtiene

$$\int_0^1 h_n(x)dx = H_n(1) - H_n(0) = 1 - e^{-n}.$$

Es un ejercicio demostrar que $h(x) := \lim(h_n(x)) = 0$ para toda $x \in [0, 1]$; por consiguiente,

$$\int_0^1 h(x)dx \neq \lim \int_0^1 h_n(x)dx. \qquad \square$$

Aun cuando la discontinuidad de la función límite del ejemplo 8.2.1a no es muy grande, es evidente que pueden construirse ejemplos más complicados que producirán una discontinuidad más amplia. De cualquier modo, debe abandonarse la esperanza de que el límite de una sucesión convergente de funciones continuas [o, en su caso, derivables, integrables] será continuo [o, en su caso, derivable, integrable].

Se verá a continuación que la hipótesis adicional de la convergencia uniforme es una condición suficiente para garantizar que el límite de una sucesión de funciones continuas es continuo. Se establecen asimismo resultados similares para sucesiones de funciones derivables e integrables.

Intercambio del límite y la continuidad

8.2.2 Teorema *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones continuas en un conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y suponer que* (f_n) *converge uniformemente a una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *en* A. *Entonces* f *es continua en* A.

Demostración. Por hipótesis, dada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $H := H(\frac{1}{3}\varepsilon)$ tal que si $n \geq H$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ para toda $x \in A$. Sea $c \in A$ un punto arbitrario; se demostrará que f es continua en c. Por la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned}|f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_H(x)| + |f_H(x) - f_H(c)| + |f_H(c) - f(c)| \\ &\leq \tfrac{1}{3}\varepsilon + |f_H(x) - f_H(c)| + \tfrac{1}{3}\varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que f_H es continua en c, existe un número $\delta := \delta(\frac{1}{3}\varepsilon, c, f_H) > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f_H(x) - f_H(c)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Por lo tanto, si $|x - c| < \delta$ y $x \in A$, entonces se tiene $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, con esto se establece la continuidad de f en el punto arbitrario $c \in A$. (Véase la figura 8.2.2.)

Q.E.D.

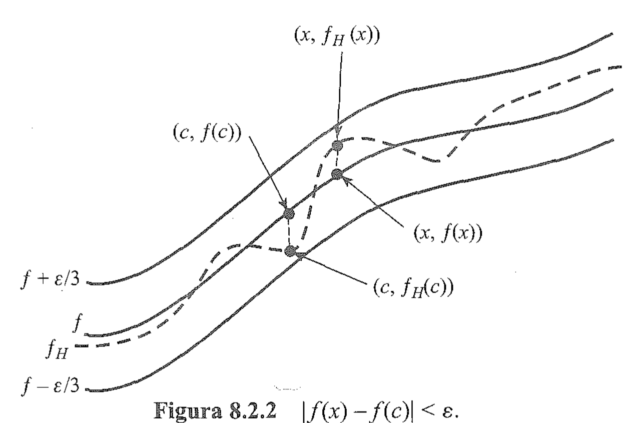


Figura 8.2.2 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Observación Aun cuando la convergencia uniforme de la sucesión de funciones continuas es condición suficiente para garantizar la continuidad de la función límite, *no* es condición necesaria. (Véase el ejercicio 2.)

Intercambio del límite y la derivada

Se mencionó en la sección 6.1 que Weierstrass demostró que la función definida por la serie

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos(3^k x)$$

es continua en todo punto pero no tiene derivada en ningún punto de $\mathbb{R}$. Al considerar las sumas parciales de esta serie, se obtiene una sucesión de funciones (f_n) que tienen derivada en todo punto y que convergen uniformemente a f. Así, aun cuando la sucesión de funciones derivables (f_n) es uniformemente convergente, no se sigue que la función límite es derivable.

Se demuestra a continuación que si la *sucesión de derivadas* (f'_n) es uniformemente convergente, entonces f_n también lo es. Si se agrega la hipótesis de que las derivadas sean continuas, entonces es posible dar una demostración corta basada en la integral. (Véase el ejercicio 11.) Sin embargo, si no se supone que las derivadas son continuas, se requiere un razonamiento un tanto más elaborado.

8.2.3 Teorema *Sea* $J \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo acotado y sea* (f_n) *una sucesión de funciones de* J *a* $\mathbb{R}$. *Suponer que existe* $x_0 \in J$ *tal que* $(f_n(x_0))$ *converge y que la sucesión* (f'_n) *de derivadas existe en* J *y converge uniformemente a una función* g *en* J.

Entonces la sucesión (f_n) *converge uniformemente a una función* f *en* J *que tiene derivada en todo punto de* J *y* $f' = g$.

Demostración. Sean $a < b$ los puntos terminales de J y sea $x \in J$ arbitraria. Si $m, n \in \mathbb{N}$, se aplica el teorema del valor medio 6.2.4 a la diferencia $f_m - f_n$ en el intervalo con puntos terminales x_0, x. Se concluye que existe un punto y (que depende de m, n) tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)\{f'_m(y) - f'_n(y)\}.$$

Se tiene por tanto

$$\|f_m - f_n\|_J \le |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a)\|f'_m - f'_n\|_J. \qquad (1)$$

Del teorema 8.1.10, de (1), y de la hipótesis de que $(f_n(x_0))$ es convergente y que (f'_n) es uniformemente convergente en J, se sigue que (f_n) es uniformemente convergente en J. El límite de la sucesión (f_n) se denota por f. Puesto que las f_n son todas continuas y la convergencia es uniforme, del teorema 8.2.2 se sigue que f es continua en J.

Para establecer la existencia de la derivada de f en un punto $c \in J$, se aplica el teorema del valor medio 6.2.4 a $f_m - f_n$ en el intervalo con puntos terminales c, x. Se concluye que existe un punto z (que depende de m, n) tal que

$$\{f_m(x) - f_n(x)\} - \{f_m(c) - f_n(c)\} = (x - c)\{f'_m(z) - f'_n(z)\}.$$

En consecuencia, si $x \neq c$, se tiene

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \|f'_m - f'_n\|_J.$$

Puesto que (f'_n) converge uniformemente en J, si $\varepsilon > 0$ está dada, existe $H(\varepsilon)$ tal que si $m, n \geq H(\varepsilon)$ y $x \neq c$, entonces

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Si se toma el límite en (2) con respecto a m y se usa el teorema 3.2.6, se tiene

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon.$$

siempre que $x \neq c$, $n \geq H(\varepsilon)$. Puesto que $g(c) = \text{lím}(f'_n(c))$, existe $N(\varepsilon)$ tal que si $n \geq N(\varepsilon)$, entonces $|f'_n(c) - g(c)| < \varepsilon$. Ahora sea $K := \sup\{H(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$. Puesto que $f'_k(c)$ existe, y existe $\delta_K(\varepsilon) > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$, entonces

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f'_K(c) \right| < \varepsilon.$$

Al combinar estas desigualdades, se concluye que si $0 < |x - c| < \delta_K(\varepsilon)$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < 3\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, con esto se demuestra que $f'(c)$ existe y que es igual a $g(c)$. Puesto que $c \in J$ es arbitraria, se concluye que $f' = g$ en J. Q.E.D.

Intercambio del límite y la integral

En el ejemplo 8.2.1c se vio que si (f_n) es una sucesión $\mathcal{R}[a, b]$ que converge en $[a, b]$ a una función f en $\mathcal{R}[a, b]$, entonces no necesariamente ocurre que

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n . \tag{3}$$

Se demostrará a continuación que la *convergencia uniforme* de la sucesión es una condición suficiente para garantizar que esta igualdad se cumple.

8.2.4 Teorema *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones en* $\mathcal{R}[a, b]$ *y suponer que* (f_n) *converge* ***uniformemente*** *a* f *en* [a, b]. *Entonces* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* (3) *se cumple.*

Demostración. Del criterio de Cauchy 8.1.10 se sigue que, dada $\varepsilon > 0$, existe $H(\varepsilon)$ tal que si $m > n \geq H(\varepsilon)$, entonces

$$-\varepsilon \leq f_m(x) - f_n(x) \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in [a, b].$$

El teorema 7.1.4 implica que

$$-\varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f_m - \int_a^b f_n \leq \varepsilon(b-a).$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, la sucesión $(\int_a^b f_m)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge a algún número, digamos $A \in \mathbb{R}$.

Se demuestra ahora que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ con integral A. Si $\varepsilon > 0$ está dada, sea $K(\varepsilon)$ tal que si $m > K(\varepsilon)$, entonces $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$ y si $m > K(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} |S(f_m;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= \left| \sum_{i=1}^n \{f_m(t_i) - f(t_i)\}(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f_m(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Se elige ahora $r \geq K(\varepsilon)$ tal que $|\int_a^b f_r - A| < \varepsilon$ y se hace que $\delta_{r,\varepsilon} > 0$ sea tal que $|\int_a^b f_r - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})| < \varepsilon$ siempre que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_{r,\varepsilon}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - A| &\leq |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})| + \left| S(f_r;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_r \right| + \left| \int_a^b f_r - A \right| \\ &\leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2). \end{aligned}$$

Pero como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\int_a^b f = A$. Q.E.D.

La hipótesis de convergencia uniforme es muy rígida y restringe la utilidad de este resultado. En la sección 10.4 se llega a generalizaciones de largo alcance del teorema 8.2.4. Por el momento, se enuncia un resultado que no requiere la unifor-

midad de la convergencia, pero sí que la función límite sea Riemann integrable. Se omite la demostración.

8.2.5 Teorema de convergencia acotada *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathcal{R}[a, b]$ *que converge en* $[a, b]$ *a una función* $f \in \mathcal{R}[a, b]$. *Suponer asimismo que existe* $B > 0$ *tal que* $|f_n(x)| \leq B$ *para toda* $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. *Entonces se cumple la ecuación* (3).

Teorema de Dini

Se concluye esta sección con un famoso teorema debido a Ulisse Dini (1845-1918) que ofrece un recíproco parcial del teorema 8.2.2 cuando la sucesión es monótona. Se presenta una demostración utilizando medidas no constantes (véase la sección 5.5).

8.2.6 Teorema de Dini *Suponer que* (f_n) *es una sucesión monótona de funciones continuas en* $I := [a, b]$ *que converge a una función continua* f *en* I. *Entonces la convergencia de la sucesión es uniforme.*

Demostración. Se supone que la sucesión (f_n) es decreciente y sea $g_m := f_m - f$. Entonces (g_m) es una sucesión decreciente de funciones continuas que convergen a la función 0 en I. Se demostrará que la convergencia es uniforme en I.

Dadas $\varepsilon > 0$ y $t \in I$, existe $m_{\varepsilon,t} \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq g_{m_{\varepsilon,t}}(t) < \varepsilon/2$. Puesto que $g_{m_{\varepsilon,t}}$ es continua en t, existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que $0 \leq g_{m_{\varepsilon,t}}(x) < \varepsilon$ para toda $x \in I$ que satisface $|x - t| \leq \delta_\varepsilon(t)$. Por tanto, δ_ε es una medida sobre I, y si $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición fina-δ_ε, se hace $M_\varepsilon := \text{máx}\{m_{\varepsilon,t_1}, \cdots, m_{\varepsilon,t_n}\}$. Si $m \geq M_\varepsilon$ y $x \in I$, entonces (por el lema 5.5.3) existe un índice i con $|x - t_i| \leq \delta_\varepsilon(t_i)$ y en consecuencia

$$0 \leq g_m(x) \leq g_{m,t_i}(x) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión (g_m) converge uniformemente a la función 0. Q.E.D.

En los ejercicios se verá que no es posible descartar ninguna de las tres hipótesis: (i) las funciones f_n son continuas, (ii) la función límite f es continua, (iii) I es un intervalo acotado cerrado.

Ejercicios de la sección 8.2

1. Demostrar que la sucesión $((x^n/(1 + x^n))$ no converge uniformemente en $[0, 2]$ estableciendo que la función límite no es continua en $[0, 2]$.

2. Demostrar que la sucesión del ejemplo 8.2.1c es un caso de una sucesión de funciones continuas que converge de manera no uniforme a un límite continuo.

3. Construir una sucesión de funciones en $[0, 1]$, cada una de las cuales sea discontinua en todo punto de $[0, 1]$ y cada una de las cuales converja uniformemente a una función que es continua en todo punto.

4. Suponer que (f_n) es una sucesión de funciones continuas en un intervalo I que converge uniformemente a una función f en I. Si $(x_n) \subseteq I$ converge a $x_0 \in I$, demostrar que $\lim(f_n(x_n)) = f(x_0)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en $\mathbb{R}$ y sea $f_n(x) := f(x + 1/n)$ para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que (f_n) converge uniformemente a f en $\mathbb{R}$.

6. Sea $f_n(x) := 1/(1 + x)^n$ para $x \in [0, 1]$. Encontrar el límite puntual f de la sucesión (f_n) en $[0, 1]$. ¿Converge uniformemente (f_n) a f en $[0, 1]$?

7. Suponer que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en el conjunto A y suponer que cada f_n está acotada en A. (Es decir, para toda n existe una constante M_n tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para toda $x \in A$.) Demostrar que la función f está acotada en A.

8. Sea $f_n(x) := nx/(1 + nx^2)$ para $x \in A := [0, \infty)$. Demostrar que cada f_n está acotada en A, pero el límite puntual f de la sucesión no está acotado en A. ¿Converge uniformemente (f_n) a f en A?

9. Sea $f_n(x) := x^n/n$ para $x \in [0, 1]$. Demostrar que la sucesión (f_n) de funciones derivables converge uniformemente a una función derivable f en $[0, 1]$ y que la sucesión (f_n') converge en $[0, 1]$ a una función g, pero que $g(1) \neq f'(1)$.

10. Sea $g_n(x) := e^{-nx}/n$ para $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Examinar la relación entre $\lim(g_n)$ y $\lim(g_n')$.

11. Sea $I := [a, b]$ y sea (f_n) una sucesión de funciones en $I \to \mathbb{R}$ que converge a f en I. Suponer que cada derivada f_n' es continua en I y que la sucesión (f_n') es uniformemente convergente a g en I. Demostrar que $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\, dt$ y que $f'(x) = g(x)$ para toda $x \in I$.

12. Demostrar que $\lim \int_1^2 e^{-nx^2} dx = 0$.

13. Si $a > 0$, demostrar que $\lim \int_a^{\pi} (\text{sen } nx)/(nx)\, dx = 0$. ¿Qué ocurre si $a = 0$?

14. Sea $f_n(x) := nx/(1 + nx)$ para $x \in [0, 1]$. Demostrar que (f_n) converge de manera no uniforme a una función integrable f y que $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

15. Sea $g_n(x) := nx(1 - x)^n$ para $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Discutir la convergencia de (g_n) y $(\int_0^1 g_n\, dx)$.

16. Sea $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ una enumeración de los números racionales en $I := [0, 1]$ y sea que $f_n : I \to \mathbb{R}$ esté definida como 1 si $x = r_1, \cdots, r_n$ y como 0 en caso contrario. Demostrar que f_n es Riemann integrable para toda $n \in \mathbb{N}$, que $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots$, y que $f(x) := \lim(f_n(x))$ es la función de Dirichlet, la cual no es Riemann integrable en $[0, 1]$.

17. Sea $f_n(x) := 1$ para $x \in (0, 1/n)$ y $f_n(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. Demostrar que (f_n) es una sucesión decreciente de funciones discontinuas que converge a una función límite continua, pero la convergencia no es uniforme en $[0, 1]$.

18. Sea $f_n(x) := x^n$ para $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (f_n) es una sucesión decreciente de funciones continuas que converge a una función que no es continua, pero la convergencia no es uniforme en $[0, 1]$.

19. Sea $f_n(x) := x/n$ para $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que (f_n) es una sucesión decreciente de funciones continuas que converge a una función límite continua, pero la convergencia no es uniforme en $[0, \infty)$.

20. Dar un ejemplo de una sucesión decreciente (f_n) de funciones continuas en $[0, 1]$ que converja a una función límite continua, pero que la convergencia no es uniforme en $[0, 1)$.

SECCIÓN 8.3 Las funciones exponencial y logarítmica

Se introducen a continuación las funciones exponencial y logarítmica y se deducen algunas de sus propiedades más importantes. En secciones anteriores de este libro se supuso cierta familiaridad con estas funciones con el fin de examinar los ejemplos. Sin embargo, en algún punto es necesario asentar estas funciones sobre bases firmes a fin de establecer su existencia y determinar sus propiedades básicas. Ello se hace aquí. Hay varios enfoques alternativos que pueden adoptarse para conseguir este objetivo. Se procede demostrando primero la existencia de una función que es la derivada *de sí misma*. A partir de este resultado básico, se obtienen las principales propiedades de la función exponencial. La función logaritmo se introduce después como la inversa de la función exponencial y esta relación inversa se usa para deducir las propiedades de la función logaritmo.

La función exponencial

Se empieza estableciendo el fundamental resultado de existencia para la función exponencial.

8.3.1 Teorema *Existe una función* $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que:*

(i) $\mathrm{E}'(x) = \mathrm{E}(x)$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mathrm{E}(0) = 1$.

Demostración. Se define inductivamente una sucesión (E_n) de funciones continuas como sigue:

$$E_1(x) := 1 + x, \tag{1}$$

$$E_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x E_n(t)\,dt, \tag{2}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Evidentemente, E_1 es continua en $\mathbb{R}$ y en consecuencia es integrable en cualquier intervalo acotado. Si se ha definido E_n y es continua en $\mathbb{R}$, entonces es integrable en cualquier intervalo acotado, por lo que E_{n+1} está bien definida por la fórmula anterior. Además, del teorema fundamental (segunda forma) 7.3.5 se sigue que E_{n+1} es derivable en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ y que

$$E'_{n+1}(x) = E_n(x) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Mediante un razonamiento de inducción matemática (el cual se le deja al lector) se establece que

$$E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Sea $A > 0$ que está dada; entonces si $|x| \leq A$ y $m > n > 2A$, se tiene

$$\begin{aligned} |E_m(x) - E_n(x)| &= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \right| \\ &\leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \left[1 + \frac{A}{n} + \cdots + \left(\frac{A}{n} \right)^{m-n-1} \right] \\ &< \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Puesto que $\text{lím}(A^n/n!) = 0$, se sigue que la sucesión (E_n) converge uniformemente en el intervalo $[-A, A]$, donde $A > 0$ es arbitraria. En particular esto significa que $(E_n(x))$ converge para toda $x \in \mathbb{R}$. Se define $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$E(x) := \text{lím}\, E_n(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puesto que toda $x \in \mathbb{R}$ está contenida dentro de algún intervalo $[-A, A]$, del teorema 8.2.2 se sigue que E es continua en x. Además, es evidente a partir de (1) y (2) que $E_n(0) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $E(0) = 1$, con lo que se demuestra (ii).

En cualquier intervalo $[-A, A]$ se tiene la convergencia uniforme de la sucesión (E_n). Con base en (3), se tiene también la convergencia uniforme de la sucesión (E_n') de las derivadas. Se sigue, por lo tanto, por el teorema 8.2.3, que la función límite E es derivable en $[-A, A]$ y que

$$E'(x) := \text{lím}\,(E_n'(x)) = \text{lím}\,(E_{n-1}(x)) = E(x)$$

para toda $x \in [-A, A]$. Puesto que $A > 0$ es arbitraria, el enunciado (i) queda establecido. Q.E.D.

8.3.2 Corolario *La función* E *tiene derivadas de todos los órdenes y* $E^{(n)}(x) = E(x)$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $n = 1$, el enunciado es simplemente la propiedad (i). Se sigue para $n \in \mathbb{N}$ arbitraria por inducción matemática. Q.E.D.

8.3.3 Corolario *Si* $x > 0$, *entonces* $1 + x < E(x)$.

Demostración. Por (4) es claro que si $x > 0$, entonces la sucesión $(E_n(x))$ es estrictamente creciente. En consecuencia, $E_1(x) < E(x)$ para toda $x > 0$. Q.E.D.

Se demuestra enseguida que la función E, cuya existencia se estableció en el teorema 8.3.1, es única.

8.3.4 Teorema *La función* E : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisface* (i) *y* (ii) *del teorema* 8.3.1 *es única.*

Demostración. Sean E_1 y E_2 dos funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que satisfacen las propiedades (i) y (ii) del teorema 8.3.1 y sea $F := E_1 - E_2$. Entonces

$$F'(x) = E_1'(x) - E_2'(x) = E_1(x) - E_2(x) = F(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$ y

$$F(0) = E_1(0) - E_2(0) = 1 - 1 = 0.$$

Resulta evidente (por inducción matemática) que F tiene derivadas de todos los órdenes y, de hecho, que $F^{(n)}(x) = F(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitraria y sea I_x el intervalo cerrado con puntos terminales $0, x$. Puesto que F es continua en I_x, existe $K > 0$ tal que $|F(t)| \leq K$ para toda $t \in I_x$. Si se aplica el teorema de Taylor 6.4.1 a F en el intervalo I_x y se usa el hecho de que $F^{(k)}(0) = F(0) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, se sigue que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $c_n \in I_x$ tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{F^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}x^n \\ &= \frac{F(c_n)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto

$$|F(x)| \leq \frac{K|x|^n}{n!} \qquad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pero como $\lim(|x|^n/n!) = 0$, se concluye que $F(x) = 0$. Puesto que $x \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se infiere que $E_1(x) - E_2(x) = F(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

La terminología y la notación convencionales para la función E (de la cual se sabe ahora que existe y es única) se dan en la siguiente definición.

8.3.5 Definición A la función única $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $E'(x) = E(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $E(0) = 1$ se le llama la **función exponencial**. Al número $e := E(1)$ se le llama el **número de Euler**. Con frecuencia se escribirá

$$\exp(x) := E(x) \qquad \text{o} \qquad e^x := E(x) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

El número e puede obtenerse como un límite, y por consiguiente aproximarse, de varias maneras diferentes. [Véanse los ejercicios 1 y 10, y el ejemplo 3.3.6.]

El uso de la notación e^x para $E(x)$ se justifica por la propiedad (v) del siguiente teorema, donde se establece que si r es un número racional, entonces $E(r)$ y e^r coinciden. (Los exponentes racionales se examinaron en la sección 5.6.) Así, la función E puede considerarse como una ampliación de la idea de exponenciación de números racionales a números reales arbitrarios. Para una definición de a^x para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ arbitraria, véase la definición 8.3.10.

8.3.6 Teorema *La función exponencial satisface las siguientes propiedades:*

(iii) $E(x) \neq 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$;

(iv) $E(x + y) = E(x)E(y)$ *para toda* $x, y \in \mathbb{R}$;

(v) $E(r) = e^r$ *para toda* $r \in \mathbb{Q}$.

Demostración. (iii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = 0$ y sea J_α el intervalo cerrado con puntos terminales $0, \alpha$. Sea $K \geq |E(t)|$ para toda $t \in J_\alpha$. El teorema de Taylor 6.4.1 implica que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $c_n \in J_\alpha$ tal que

$$1 = E(0) = E(\alpha) + \frac{E'(\alpha)}{1!}(-\alpha) + \cdots + \frac{E^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(-\alpha)^{n-1}$$
$$+ \frac{E^{(n)}(\alpha)}{(n)!}(-\alpha)^n = \frac{E(c_n)}{n!}(-\alpha)^n.$$

Se tiene, por tanto, $0 < 1 \leq (K/n!)|\alpha|^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Pero como $\text{lím}(|\alpha|^n/n!) = 0$, esto es una contradicción.

(iv) Sea y fija; por (iii) se tiene $E(y) \neq 0$. Sea que $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por

$$G(x) := \frac{E(x+y)}{E(y)} \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente, se tiene $G'(x) = E'(x + y)/E(y) = E(x + y)/E(y) = G(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y $G(0) = E(0 + y)/E(y) = 1$. De la unicidad de E, demostrada en el teorema 8.3.4, se sigue que $G(x) = E(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia, $E(x + y) = E(x)E(y)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Puesto que $y \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se obtiene (iv).

(v) De (iv) y por inducción matemática se sigue que si $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$E(nx) = E(x)^n.$$

Si se hace $x = 1/n$, esta relación implica que

$$e = E(1) = E\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n,$$

de donde se sigue que $E(1/n) = e^{1/n}$. Se tiene asimismo $E(-m) = 1/E(m) = 1/e^m = e^{-m}$ para $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$E(m/n) = (E(1/n))^m = (e^{1/n})^m = e^{m/n}.$$

Con esto se establece (v). Q.E.D.

8.3.7 Teorema *La función exponencial* E *es estrictamente creciente en* $\mathbb{R}$ *y tiene codominio igual a* $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. *Además, se tiene*

(vi) $\lim_{x \to -\infty} E(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to \infty} E(x) = \infty$.

Demostración. Se sabe que $E(0) = 1 > 0$ y que $E(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Puesto que E es continua en $\mathbb{R}$, del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 se sigue que $E(x) > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $E'(x) = E(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$, por lo que E es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Del corolario 8.3.3 se sigue que $2 < e$ y que $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$. Asimismo, si $z > 0$, entonces como $0 < E(-z) = 1/E(z)$ se sigue que $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio 5.3.7, toda $y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ pertenece al codominio de E. Q.E.D.

La función logaritmo

Se ha visto que la función exponencial E es una función derivable estrictamente creciente con dominio $\mathbb{R}$ y codominio $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. (Véase la figura 8.3.1.) Se sigue que E tiene una función inversa.

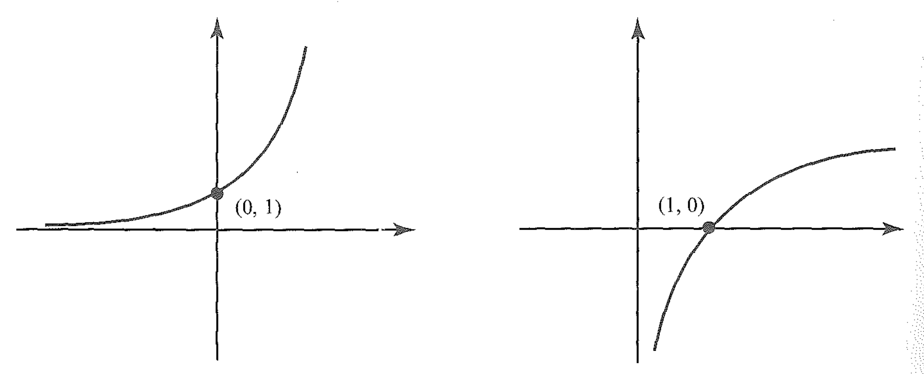


Figura 8.3.1 Gráfica de E. **Figura 8.3.2** Gráfica de L.

8.3.8 Definición La función inversa de $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama el **logaritmo** (o el **logaritmo natural**). (Véase la figura 8.3.2.) Se denotará por L o por ln.

Puesto que E y L son funciones inversas, se tiene

$$(L \circ E)(x) = x \qquad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R}$$

y

$$(E \circ L)(y) = y \qquad \text{para toda} \quad y \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Estas fórmulas también pueden escribirse en la forma

$$\ln e^x = x, \qquad e^{\ln y} = y.$$

8.3.9 Teorema *El logaritmo es una función* L *estrictamente creciente con dominio* $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ *y codominio* $\mathbb{R}$. *La derivada de* L *está dada por*

(vii) $L'(x) = 1/x$ *para* $x > 0$.

El logaritmo satisface la ecuación funcional

(viii) $\mathrm{L}(\mathrm{xy}) = \mathrm{L}(\mathrm{x}) + \mathrm{L}(\mathrm{y})$ *para* $\mathrm{x} > 0$, $\mathrm{y} > 0$.

Además, se tiene

(ix) $\mathrm{L}(1) = 0$ *y* $\mathrm{L}(\mathrm{e}) = 1$,

(x) $\mathrm{L}(\mathrm{x}^{\mathrm{r}}) = \mathrm{rL}(\mathrm{x})$ *para* $\mathrm{x} > 0$, $\mathrm{r} \in \mathbb{Q}$.

(xi) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0+} \mathrm{L}(\mathrm{x}) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{L}(\mathrm{x}) = \infty$.

Demostración. El que L es una función estrictamente creciente con dominio $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y codominio $\mathbb{R}$ se sigue del hecho de que E es estrictamente creciente con dominio $\mathbb{R}$ y codominio $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.

(vii) Puesto que $E'(x) = E(x) > 0$, del teorema 6.1.9 se sigue que L es derivable en $(0, \infty)$ y que

$$L'(x) = \frac{1}{(E' \circ L)(x)} = \frac{1}{(E \circ L)(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{para} \quad x \in (0, \infty).$$

(viii) Si $x > 0$, $y > 0$, sea $u := L(x)$ y $v := L(y)$. Entonces se tiene $x = E(u)$ y $y = E(v)$. De la propiedad (iv) del teorema 8.3.6 se sigue que

$$xy = E(u)E(v) = E(u + v),$$

de donde $L(xy) = (L \circ E)(u + v) = u + v = L(x) + L(y)$. Con esto se establece (viii).

Las propiedades de (ix) se siguen de las relaciones $E(0) = 1$ y $E(1) = e$.

(x) Este resultado se sigue de (viii) y por inducción matemática para $n \in \mathbb{N}$, y se amplía a $r \in \mathbb{Q}$ mediante razonamientos similares a los de la demostración de 8.3.6(v).

Para establecer la propiedad (xi) se observa primero que como $2 < e$, entonces $\lim(e^n) = \infty$ y $\lim(e^{-n}) = 0$. Puesto que $L(e^n) = n$ y $L(e^{-n}) = -n$, del hecho de que L es estrictamente creciente se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \lim L(e^n) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0+} L(x) = \lim L(e^{-n}) = -\infty. \quad \text{Q.E.D.}$$

Funciones potencia

En la definición 5.6.6 se abordó la función potencia $x \mapsto x^r$, $x > 0$, donde r es un número racional. Mediante el uso de las funciones exponencial y logaritmo es posible ampliar la noción de funciones potencia de potencias racionales a potencias reales arbitrarias.

8.3.10 Definición Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, el número x^α se define como

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x} = E(\alpha L(x)).$$

A la función $x \mapsto x^\alpha$ para $x > 0$ se le llama la **función potencia** con exponente α.

Nota Si $x > 0$ y $\alpha = m/n$, donde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces en la sección 5.6 se definió $x^\alpha := (x^m)^{1/n}$. Se tiene por tanto $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$, de donde $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Por consiguiente, la definición 8.3.10 es congruente con la definición dada en la sección 5.6.

Se enuncian a continuación algunas de las propiedades de las funciones potencia. Sus demostraciones son consecuencias inmediatas de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo y se dejan al lector.

8.3.11 Teorema *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* x, y *pertenecen a* $(0, \infty)$, *entonces:*

a) $1^\alpha = 1$, **b)** $x^\alpha > 0$,

c) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, **d)** $(x/y)^\alpha = x^\alpha/y^\alpha$.

8.3.12 Teorema *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $x \in (0, \infty)$, *entonces:*

a) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, **b)** $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha$,

c) $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$, **d)** *si* $\alpha < \beta$, *entonces* $x^\alpha < x^\beta$ *para* $x > 1$.

El siguiente resultado se refiere a la derivabilidad de las funciones potencia.

8.3.13 Teorema *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces la función* $x \mapsto x^\alpha$ *de* $(0, \infty)$ *a* $\mathbb{R}$ *es continua y derivable, y*

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \textit{para} \quad x \in (0, \infty).$$

Demostración. Por la regla de la cadena se tiene

$$Dx^\alpha = De^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x} \cdot D(\alpha \ln x)$$
$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{para} \quad x \in (0, \infty).$$

Q.E.D.

En un ejercicio se verá que si $\alpha > 0$, la función potencia $x \mapsto x^\alpha$ es estrictamente creciente de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$ y que si $\alpha < 0$, la función $x \mapsto x^\alpha$ es estrictamente decreciente. (¿Qué ocurre si $\alpha = 0$?)

Las gráficas de las funciones $x \mapsto x^\alpha$ de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$ son similares a las de la figura 5.6.8.

La función $\log_a$

Si $a > 0$, $a \neq 1$, en ocasiones resulta conveniente definir la función $\log_a$.

8.3.14 Definición Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Se define

$$\log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{para} \quad x \in (0, \infty).$$

Para $x \in (0, \infty)$, al número $\log_a(x)$ se le llama **el logaritmo de** x **base** a. El caso $a = e$ produce la función logaritmo (o logaritmo natural) de la definición 8.3.8. El

caso $a = 10$ produce la función logaritmo base 10 (o logaritmo común) $\log_{10}$ usada con frecuencia en cálculos. Las propiedades de las funciones $\log_a$ se presentan en los ejercicios.

Ejercicios de la sección 8.3

1. Demostrar que si $x > 0$ y si $n > 2x$, entonces

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \right| < \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Usar esta fórmula para demostrar que $2\frac{2}{3} < e < 2\frac{3}{4}$ y que, por lo tanto, e no es un entero.

2. Calcular e con cinco cifras decimales de precisión.

3. Demostrar que si $0 \leq x \leq a$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^a x^n}{n!}.$$

4. Demostrar que si $n \geq 2$, entonces

$$0 < en! - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) n! < \frac{e}{n+1} < 1.$$

Usar esta desigualdad para demostrar que e no es un número racional.

5. Si $x \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Usar este resultado para demostrar que

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt$$

y que

$$\left| \ln(x+1) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \right) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

6. Usar la fórmula del ejercicio precedente para calcular $\ln 1.1$ y $\ln 1.4$ con cuatro cifras decimales de precisión. ¿Qué tan grande debe elegirse n en esta desigualdad para calcular $\ln 2$ con cuatro cifras decimales de precisión?

7. Demostrar que $\ln(e/2) = 1 - \ln 2$. Usar este resultado para calcular $\ln 2$ con cuatro cifras decimales de precisión.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Ke^x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

9. Sea $a_k > 0$ para $k = 1, \cdots, n$ y sea $A := (a_1 + \cdots + a_n)/n$ la media aritmética de estos números. Para cada k, incorporar $x_k := a_k/A - 1$ en la desigualdad $1 + x \leq e^x$ (válida para $x \geq 0$). Multiplicar los términos resultantes para demostrar la desigualdad de la media aritmética-geométrica

$$\left(a_1 \cdots a_n\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n). \tag{6}$$

Además, demostrar que la igualdad en (6) se cumple si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

10. Evaluar $L'(1)$ utilizando la sucesión $(1 + 1/n)$ y el hecho de que $e = \lim((1 + 1/n)^n)$.

11. Establecer las afirmaciones del teorema 8.3.11.

12. Establecer las afirmaciones del teorema 8.3.12.

13. a) Demostrar que si $\alpha > 0$, entonces la función $x \longmapsto x^\alpha$ es estrictamente creciente de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$ y que $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$.
b) Demostrar que si $\alpha < 0$, entonces la función $x \longmapsto x^\alpha$ es estrictamente decreciente de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$ y que $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = 0$.

14. Demostrar que si $a > 0$, $a \neq 1$, entonces $a^{\log_a x} = x$ para toda $x \in (0, \infty)$ y $\log_a(a^y) = y$ para toda $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función $x \longmapsto \log_a x$ de $(0, \infty)$ a $\mathbb{R}$ es la inversa de la función $y \longmapsto a^y$ en $\mathbb{R}$.

15. Si $a > 0$, $a \neq 1$, demostrar que la función $x \longmapsto \log_a x$ es derivable en $(0, \infty)$ y que, asimismo, $D \log_a x = 1/(x \ln a)$ para $x \in (0, \infty)$.

16. Si $a > 0$, $a \neq 1$, y x y y pertenecen a $(0, \infty)$, demostrar que $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

17. Si $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, $b \neq 1$, demostrar que

$$\log_a x = \left(\frac{\ln b}{\ln a}\right) \log_b x \qquad \text{para} \qquad x \in (0, \infty).$$

En particular, demostrar que $\log_{10} x = (\ln e/\ln 10) \ln x = (\log_{10} e) \ln x$ para $x \in (0, \infty)$.

SECCIÓN 8.4 Las funciones trigonométricas

Junto con las funciones exponencial y logarítmica, hay otra colección muy importante de funciones trascendentales conocidas como las “funciones trigonométricas”. Éstas son las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. En cursos elementales suelen introducirse con base en una perspectiva geométrica en términos de triángulos, o bien del círculo unitario. En esta sección las funciones trigonométricas se introducen de manera analítica y después se establecen algunas de sus propiedades básicas. En particular, las diferentes propiedades de las funciones trigonométricas que se usaron en los ejemplos de partes anteriores de este libro se deducen con rigor matemático en esta sección.

Basta considerar las funciones seno y coseno ya que las demás funciones trigonométricas se definen en términos de estas dos funciones. El tratamiento del seno y el coseno usado aquí es similar en esencia al que se empleó con la función exponencial por cuanto se establece primero la existencia de las funciones que satisfacen ciertas propiedades de derivación.

8.4.1 Teorema *Existen las funciones* $\mathrm{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\mathrm{S} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que*

(i) $\mathrm{C}''(\mathrm{x}) = -\mathrm{C}(\mathrm{x})$ *y* $\mathrm{S}''(\mathrm{x}) = -\mathrm{S}(\mathrm{x})$ *para toda* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathrm{C}(0) = 1$, $\mathrm{C}'(0) = 0$ *y* $\mathrm{S}(0) = 0$, $\mathrm{S}'(0) = 1$.

Demostración. Se definen de manera inductiva las sucesiones (C_n) y (S_n) de funciones continuas de la siguiente manera:

$$C_1(x) := 1, \qquad S_1(x) := x, \tag{1}$$

$$S_n(x) := \int_0^x C_n(t)\,dt, \tag{2}$$

$$C_{n+1}(x) := 1 - \int_0^x S_n(t)\,dt, \tag{3}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Se observa por inducción matemática que las funciones C_n y S_n son continuas en $\mathbb{R}$ y, por tanto, son integrables en cualquier intervalo acotado; en consecuencia, estas funciones están bien definidas por las fórmulas anteriores. Además, del teorema fundamental 7.3.5 se sigue que S_n y C_{n+1} son derivables en todo punto y que

$$S_n'(x) = C_n(x) \quad \text{y} \quad C_{n+1}'(x) = -S_n(x) \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Por razonamientos de inducción matemática (que se le dejan al lector) se demuestra que

$$C_{n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S_{n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sea $A > 0$ que está dada. Entonces si $|x| \leq A$ y $m > n > 2A$, se tiene que (dado que $A/2n < 1/4$):

$$\begin{aligned} |C_m(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \cdots \pm \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} \right| \\ &\leq \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left[1 + \left(\frac{A}{2n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2n-2}\right] \\ &< \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{16}{15}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Puesto que $\lim(A^{2n}/(2n)!) = 0$, la sucesión (C_n) converge uniformemente en el intervalo $[-A, A]$, donde $A > 0$ es arbitraria. En particular, esto significa que $(C_n(x))$ converge para toda $x \in \mathbb{R}$. Se define $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$C(x) := \lim C_n(x) \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Del teorema 8.2.2 se sigue que C es continua en $\mathbb{R}$ y, como $C_n(0) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, que $C(0) = 1$.

Si $|x| \leq A$ y $m \geq n > 2A$, de (2) se sigue que

$$S_m(x) - S_n(x) = \int_0^x \{C_m(t) - C_n(t)\}\,dt.$$

Si se usa (5) y el corolario 7.3.15, se concluye que

$$\left|S_m(x) - S_n(x)\right| \leq \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{16}{15}A\right),$$

de donde la sucesión (S_n) converge uniformemente en $[-A, A]$. Se define $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$S(x) := \lim S_n(x) \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Del teorema 8.2.2 se sigue que S es continua en $\mathbb{R}$ y, como $S_n(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, que $S(0) = 0$.

Puesto que $C_n'(x) = -S_{n-1}(x)$ para $n > 1$, de lo anterior se sigue que la sucesión (C_n') converge uniformemente en $[-A, A]$. En consecuencia, por el teorema 8.2.3, la función límite C es derivable en $[-A, A]$ y

$$C'(x) = \lim C_n'(x) = \lim(-S_{n-1}(x)) = -S(x) \qquad \text{para} \quad x \in [-A, A].$$

Puesto que $A > 0$ es arbitraria, se tiene

$$C'(x) = -S(x) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Con un razonamiento similar, basado en el hecho de que $S_n'(x) = C_n(x)$, se demuestra que S es derivable en $\mathbb{R}$ y que

$$S'(x) = C(x) \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (6) y (7) se sigue que

$$C''(x) = -(S(x))' = -C(x) \qquad \text{y} \qquad S''(x) = (C(x))' = -S(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Además, se tiene

$$C'(0) = -S(0) = 0, \qquad S'(0) = C(0) = 1.$$

Por tanto, los enunciados (i) y (ii) quedan demostrados. Q.E.D.

8.4.2 Corolario *Si* C, S *son las funciones del teorema* 8.4.1, *entonces*

(iii) $C'(x) = -S(x)$ *y* $S'(x) = C(x)$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Además, estas funciones tienen derivadas de todos los órdenes.

Demostración. Las fórmulas (iii) se establecieron en (6) y (7). La existencia de las derivadas de orden superior se sigue por inducción matemática. Q.E.D.

8.4.3 Corolario *Las funciones* C *y* S *satisfacen la identidad de Pitágoras:*

(iv) $(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $f(x) := (C(x))^2 + (S(x))^2$ para $x \in \mathbb{R}$, de tal modo que

$$f'(x) = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)(C(x)) = 0 \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Se sigue por tanto que $f(x)$ es una constante para toda $x \in \mathbb{R}$. Pero como $f(0) = 1 + 0 = 1$, se concluye que $f(x) = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

Se establece ahora la unicidad de las funciones C y S.

8.4.4 Teorema *Las funciones* C *y* S *que satisfacen las propiedades* (i) *y* (ii) *del teorema* 8.4.1 *son únicas.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 dos funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ que satisfacen $C_j''(x) = -C_j(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $C_j(0) = 1$, $C_j'(0) = 0$ para $j = 1, 2$. Si se hace $D := C_1 - C_2$, entonces $D''(x) = -D(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $D(0) = 0$ y $D^{(k)}(0) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora sea $x \in \mathbb{R}$ arbitraria y sea I_x el intervalo con puntos terminales 0, x. Puesto que $D = C_1 - C_2$ y $T := S_1 - S_2 = C_2' - C_1'$ son continuas en I_x, entonces existe $K > 0$ tal que $|D(t)| \le K$ y $|T(t)| \le K$ para toda $t \in I_x$. Si se aplica el teorema de Taylor 6.4.1 a D en I_x y se usa el hecho de que $D(0) = 0$, $D^{(k)}(0) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$, se sigue que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $c_n \in I_x$ tal que

$$\begin{aligned} D(x) &= D(0) + \frac{D'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{D^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{D^{(n)}(c_n)}{n!}x^n \\ &= \frac{D^{(n)}(c_n)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

Ahora bien, o $D^{(n)}(c_n) = \pm D(c_n)$ o $D^{(n)}(c_n) = \pm T(c_n)$. En cualquiera de los dos casos se tiene

$$|D(x)| \le \frac{K|x|^n}{n!}$$

Pero como $\lim(|x|^n/n!) = 0$, se concluye que $D(x) = 0$. Puesto que $x \in \mathbb{R}$ es arbitraria, se infiere que $C_1(x) - C_2(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Con un razonamiento similar se demuestra que si S_1 y S_2 son dos funciones en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $S_j''(x) = -S_j(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y que $S_j(0) = 0$, $S_j'(0) = 1$ para $j = 1, 2$, entonces se tiene $S_1(x) = S_2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

Ahora que se ha establecido la existencia y unicidad de las funciones C y S, se dará a estas funciones sus nombres conocidos.

8.4.5 Definición A las funciones únicas $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $C''(x) = -C(x)$ y $S''(x) = -S(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ con $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$ y $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$, se les llama la **función coseno** y la **función seno**, respectivamente. Acostumbra escribirse

$$\cos x := C(x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x := S(x) \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Las propiedades de derivación presentadas en (i) del teorema 8.4.1 no llevan por sí mismas a funciones determinadas de manera única. Se tiene la siguiente relación.

8.4.6 Teorema *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que*

$$f''(x) = -f(x) \qquad \textit{para} \qquad x \in \mathbb{R},$$

entonces existen los números reales α, β *tales que*

$$f(x) = \alpha C(x) + \beta S(x) \qquad \textit{para} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $g(x) := f(0)C(x) + f'(0)S(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Se observa de inmediato que $g''(x) = -g(x)$ y que $g(0) = f(0)$, y como

$$g'(x) = -f(0)S(x) + f'(0)C(x),$$

que $g'(0) = f'(0)$. Por lo tanto, la función $h := f - g$ es tal que $h''(x) = -h(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Por tanto, de la demostración del teorema precedente se sigue que $h(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Q.E.D.

A continuación se deducen algunas de las propiedades básicas de las funciones coseno y seno.

8.4.7 Teorema *La función* C *es par y* S *es impar en el sentido de que*

(v) $C(-x) = C(x)$ *y* $S(-x) = -S(x)$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Si $x, y \in \mathbb{R}$, *entonces se tienen las "fórmulas de adición"*

(vi) $C(x + y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$, $\quad S(x + y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$.

Demostración. (v) Si $\varphi(x) := C(-x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces un cálculo demuestra que $\varphi''(x) = -\varphi(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Además, $\varphi(0) = 1$ y $\varphi'(0) = 0$, de donde $\varphi = C$. Por consiguiente, $C(-x) = C(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En una forma similar se demuestra que $S(-x) = -S(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

(vi) Sea $y \in \mathbb{R}$ dada y sea $f(x) := C(x + y)$ para $x \in \mathbb{R}$. Un cálculo indica que $f''(x) = -f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, por el teorema 8.4.6, existen los números reales α, β tales que

$$f(x) = C(x + y) = \alpha C(x) + \beta S(x) \qquad \text{y}$$
$$f'(x) = -S(x + y) = -\alpha S(x) + \beta C(x)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Si se hace $x = 0$, se obtiene $C(y) = \alpha$ y $-S(y) = \beta$, de donde se sigue la primera fórmula de (vi). La segunda fórmula se demuestra de manera similar.

Q.E.D.

Las siguientes desigualdades se usaron antes (véase el ejemplo en 4.2.8).

8.4.8 Teorema *Si* $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, *entonces se tiene*

(vii) $-x \leq S(x) \leq x$; **(viii)** $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1$;

(ix) $x - \frac{1}{6}x^3 \leq S(x) \leq x$; **(x)** $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

Demostración. El corolario 8.4.3 implica que $-1 \leq C(t) \leq 1$ para $t \in \mathbb{R}$, por lo que si $x \geq 0$, entonces

$$-x \leq \int_0^x C(t)dt \leq x,$$

de donde se tiene (vii). Si se integra (vii), se obtiene

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq \int_0^x S(t)dt \leq \frac{1}{2}x^2,$$

de donde se tiene

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq -C(x) + 1 \leq \frac{1}{2}x^2.$$

Se tiene por tanto $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq C(x)$, que implica (viii).

La desigualdad (ix) se establece integrando (viii) y, asimismo, (x) se obtiene integrando (ix).

Q.E.D.

El número π se obtiene a partir del siguiente lema.

8.4.9 Lema *Existe una raíz* γ *de la función coseno en el intervalo* $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. *Además,* $C(x) > 0$ *para* $x \in [0, \gamma)$. *El número* 2γ *es la menor raíz positiva de* S.

Demostración. La desigualdad (x) del teorema 8.4.8 implica que C tiene una raíz entre la raíz positiva $\sqrt{2}$ de $x^2 - 2 = 0$ y la menor raíz positiva de $x^4 - 12x^2 + 24 = 0$, que es $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}} < \sqrt{3}$. Se hace que γ sea la menor de esta raíz de C.

De la segunda fórmula presentada en (vi) con $x = y$ se sigue que $S(2x) = 2S(x)C(x)$. Esta relación implica que $S(2\gamma) = 0$, por lo que 2γ es una raíz positiva de S. La misma relación implica que si $2\delta > 0$ es la menor raíz positiva de S, entonces $C(\delta) = 0$. Puesto que γ es la menor raíz positiva de C, se tiene $\delta = \gamma$.
Q.E.D.

8.4.10 Definición Sea que $\pi := 2\gamma$ denote la menor raíz positiva de S.

Nota La desigualdad $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ implica que $2.828 < \pi < 3.185$.

8.4.11 Teorema *Las funciones* C *y* S *tienen periodo* 2π *en el sentido de que*

(xi) $C(x + 2\pi) = C(x)$ *y* $S(x + 2\pi) = S(x)$ *para* $x \in \mathbb{R}$.

Además, se tiene

(xii) $S(x) = C(\frac{1}{2}\pi - x) = -C(x + \frac{1}{2}\pi)$, $C(x) = S(\frac{1}{2}\pi - x) = S(x + \frac{1}{2}\pi)$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. (xi) Puesto que $S(2x) = 2S(x)C(x)$ y $S(\pi) = 0$, entonces $S(2\pi) = 0$. Además, si $x = y$ en (vi) se obtiene $C(2x) = (C(x))^2 - (S(x))^2$. Por lo tanto, $C(2\pi) = 1$. En consecuencia, (vi) con $y = 2\pi$ da como resultado

$$C(x + 2\pi) = C(x)C(2\pi) - S(x)S(2\pi) = C(x),$$

y

$$S(x + 2\pi) = S(x)C(2\pi) + C(x)S(2\pi) = S(x).$$

(xii) Se observa que $C(\frac{1}{2}\pi) = 0$ y es un ejercicio demostrar que $S(\frac{1}{2}\pi) = 1$. Si estos resultados se emplean junto con las fórmulas (vi), se obtienen las relaciones deseadas.
Q.E.D.

Ejercicios de la sección 8.4

1. Calcular cos(0.2), sen(0.2) y cos 1, sen 1 con cuatro cifras decimales de precisión.

2. Demostrar que $|\operatorname{sen} x| \le 1$ y $|\cos x| \le 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

3. Demostrar que la propiedad (vii) del teorema 8.4.8 no se cumple si $x < 0$, pero que se tiene $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demostrar también que $|\operatorname{sen} x - x| \le |x|^3/6$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

4. Demostrar que si $x > 0$, entonces

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Usar esta desigualdad para establecer una cota inferior para π.

5. Calcular π aproximando el menor cero positivo de sen. (Proceder por bisección de intervalos o usando el método de Newton de la sección 6.4.)

6. Definir de manera inductiva las sucesiones (c_n) y (s_n) por $c_1(x) := 1$, $s_1(x) := x$, y

$$s_n(x) := \int_0^x c_n(t)\,dt, \qquad c_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x s_n(t)\,dt$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Seguir un razonamiento como el de la demostración del teorema 8.4.1 para concluir que existen las funciones $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que j) $c''(x) = c(x)$ y $s''(x) = s(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y jj) $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$ y $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$. Además, $c'(x) = s(x)$ y $s'(x) = c(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

7. Demostrar que las funciones c, s del ejercicio precedente tienen derivadas de todos los órdenes y que satisfacen la identidad $(c(x))^2 - (s(x))^2 = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Además, son las únicas funciones que satisfacen j) y jj). (Las funciones c, s se llaman las **funciones coseno hiperbólico** y **seno hiperbólico**, respectivamente.)

8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $f''(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, demostrar que existen los números reales α, β tales que $f(x) = \alpha c(x) + \beta s(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Aplicar el resultado anterior a las funciones $f_1(x) := e^x$ y $f_2(x) := e^{-x}$ para $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $c(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ y $s(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ para $x \in \mathbb{R}$.

9. Demostrar que las funciones c, s de los ejercicios precedentes son par e impar, respectivamente, y que

$$c(x + y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \qquad s(x + y) = s(x)c(y) + c(x)s(y),$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}$.

10. Demostrar que $c(x) \geq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, que tanto c como s son estrictamente crecientes en $(0, \infty)$ y que $\lim\limits_{x \to \infty} c(x) = \lim\limits_{x \to \infty} s(x) = \infty$.

Capítulo 9

SERIES INFINITAS

En la sección 3.7 se presentó una breve introducción a la teoría de las series infinitas. Se recomienda al lector volver a dicha sección ahora, ya que no se repetirán las definiciones ni los resultados que se dieron en ella.

En la sección 9.1 se introduce la importante noción de la "convergencia absoluta" de una serie. En la sección 9.2 se presentan algunos "criterios" para la convergencia absoluta que probablemente le resultarán familiares al lector por sus cursos de cálculo. En la tercera sección se abordan las series que no son absolutamente convergentes. En la última sección se estudian las series de funciones y se establecen las propiedades básicas de las series de potencias, las cuales son de gran importancia en las aplicaciones.

SECCIÓN 9.1 Convergencia absoluta

Se han visto ya (en la sección 3.7) varias series infinitas que son convergentes y otras que son divergentes. Así, en el ejemplo 3.7.6b se vio que la **serie armónica**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente porque la sucesión de sus sumas parciales $s_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) no está acotada. Por otra parte, en el ejemplo 3.7.6f se vio que la **serie armónica alternada**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente debido a la sustracción que tiene lugar. Puesto que

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

estas dos series ilustran el hecho de que una serie $\sum x_n$ puede ser convergente, pero la serie $\sum |x_n|$ obtenida al tomar los valores absolutos de los términos puede ser divergente. Esta observación lleva a una importante definición.

9.1.1 Definición Sea $X := (x_n)$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Se dice que la serie $\sum x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum |x_n|$ es convergente en $\mathbb{R}$. Se dice que una serie es **condicionalmente** (o **no absolutamente**) **convergente** si es convergente, pero no absolutamente convergente.

Es trivial que una serie de *términos positivos* es absolutamente convergente si y sólo si es convergente. Se señaló antes que la serie armónica alternada es condicionalmente convergente.

9.1.2 Teorema *Si una serie en $\mathbb{R}$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

Demostración. Puesto que $\sum |x_n|$ es convergente, el criterio de Cauchy 3.7.4 implica que, dada $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq M(\varepsilon)$, entonces

$$|x_{n+1}| + |x_{n+1}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon.$$

Sin embargo, por la desigualdad del triángulo, el lado izquierdo de esta expresión domina

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m|.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, el criterio de Cauchy implica que $\sum x_n$ converge.

Q.E.D.

Agrupamiento de series

Dada una serie $\sum x_n$, es posible construir muchas otras series $\sum y_k$ dejando fijo el orden de los términos x_n, pero insertando paréntesis para agrupar un número finito de términos. Por ejemplo, la serie indicada por

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{9} - \cdots + \frac{1}{13}\right) - \cdots$$

se obtiene **agrupando** los términos de la serie armónica alternada. Es interesante el hecho de que tal agrupamiento no afecta la convergencia ni el valor de una serie convergente.

9.1.3 Teorema *Si una serie $\sum x_n$ es convergente, entonces cualquier serie obtenida a partir de ella mediante el agrupamiento de los términos también es convergente y converge al mismo valor.*

Demostración. Suponer que se tiene

$$y_1 := x_1 + \cdots + x_{k_1}, \qquad y_2 := x_{k_1+1} + \cdots + x_{k_2}, \; \cdots.$$

Si s_n denota la n-ésima suma parcial de $\sum x_n$ y t_k denota la k-ésima suma parcial de $\sum y_k$, entonces se tiene

$$t_1 = y_1 = s_{k_1}, \qquad t_2 = y_1 + y_2 = s_{k_2}, \; \cdots$$

Por tanto, la sucesión (t_k) de las sumas parciales de la serie agrupada $\sum y_k$ es una subsucesión de la sucesión (s_n) de las sumas parciales de $\sum x_n$. Puesto que se supuso que esta última serie es convergente, también lo es la serie agrupada $\sum y_k$. Q.E.D.

Es evidente que el recíproco de este teorema no es verdadero. De hecho, el agrupamiento

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

produce una serie convergente de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, que en el ejemplo 3.7.2b se vio que es divergente ya que los términos no tienden a 0.

Reordenamientos de series

En términos generales, un "reordenamiento" de una serie es otra serie que se obtiene a partir de la serie dada mediante el uso de todos los términos exactamente una vez, pero variando el orden en que se toman los términos. Por ejemplo, la serie armónica tiene los reordenamientos

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\cdots,$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots.$$

El primer reordenamiento se obtiene a partir de la serie armónica intercambiando el primero y el segundo términos, el tercero y el cuarto, y así sucesivamente. El segundo reordenamiento se obtiene a partir de la serie armónica tomando un "término impar", dos "términos pares", tres "términos impares", y así sucesivamente. Es obvio que hay un número infinito de otros reordenamientos posibles de la serie armónica.

9.1.4 Definición Una serie $\sum y_k$ en $\mathbb{R}$ es un **reordenamiento** de una serie $\sum x_n$ si hay una biyección f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tal que $y_k = x_{f(k)}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

En tanto que el agrupamiento de una serie no afecta su convergencia, hacer reordenamientos puede hacerlo. De hecho, hay una notable observación, hecha por Riemann, de que si $\sum s_n$ es una serie condicionalmente convergente en $\mathbb{R}$ y si $c \in \mathbb{R}$ es un número arbitrario, entonces hay un reordenamiento de $\sum x_n$ que converge a c.

Para demostrar esta afirmación, se observa primero que una serie condicionalmente convergente debe contener un número infinito de términos positivos y un número infinito de términos negativos (véase el ejercicio 1), y que tanto la serie de términos positivos como la de términos negativos divergen (véase el ejercicio 2). Para construir una serie que converge a c, se toman términos positivos hasta que la suma parcial sea mayor que c, después se toman términos negativos hasta que la suma parcial sea menor que c, después se toman términos positivos hasta que la suma parcial sea mayor que c, etcétera.

Cuando se opera con series, por lo general querrá tenerse la seguridad de que los reordenamientos no afectarán la convergencia ni el valor de las series. A esto se debe la importancia del siguiente resultado.

9.1.5 Teorema de reordenamiento *Sea* $\sum x_n$ *una serie absolutamente convergente en* $\mathbb{R}$. *Entonces cualquier reordenamiento* $\sum y_k$ *de* $\sum x_n$ *converge al mismo valor.*

Demostración. Suponer que $\sum x_n$ converge a $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$, sea N tal que si $n, q > N$ y $s_n := x_1 + \cdots + x_n$, entonces

$$|x - s_n| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=N+1}^{q} |x_k| < \varepsilon.$$

Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos $x_1, \cdots, x_N$ estén contenidos como sumandos de $t_M := y_1 + \cdots + y_M$. Se sigue que si $m \geq M$, entonces $t_m - s_n$ es la suma de un número finito de términos x_k con índice $k > N$. Por consiguiente, para alguna $q > N$, se tiene

$$|t_m - s_n| \leq \sum_{k=N+1}^{q} |x_k| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si $m \geq M$, se tiene entonces

$$|t_m - x| \leq |t_m - s_n| + |s_n - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $\sum y_k$ converge a x. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 9.1

1. Demostrar que si una serie convergente contiene sólo un número finito de términos negativos, entonces es absolutamente convergente.

2. Demostrar que si una serie es condicionalmente convergente, entonces la serie obtenida a partir de sus términos positivos es divergente y la serie obtenida a partir de sus términos negativos es divergente.

3. Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, dar un razonamiento para demostrar que existe un reordenamiento cuyas sumas parciales divergen a ∞.

4. ¿Dónde se usa el hecho de que la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente en la demostración de 9.1.5?

5. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, ¿se cumple que cualquier reordenamiento de $\sum a_n$ también es absolutamente convergente?

6. Encontrar una expresión explícita para la n-ésima suma parcial de $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - 1/n^2)$ a fin de demostrar que esta serie converge a $-\ln 2$. ¿Esta convergencia es absoluta?

7. a) Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente y (b_n) es una sucesión acotada, demostrar que $\sum a_n b_n$ es absolutamente convergente.

   b) Dar un ejemplo para demostrar que si la convergencia de $\sum a_n$ es condicional y (b_n) es una sucesión acotada, entonces $\sum a_n b_n$ puede divergir.

8. Dar un ejemplo de una serie convergente $\sum a_n$ tal que $\sum a_n^2$ no sea convergente. (Comparar este resultado con el ejercicio 3.7.8.)

9. Si (a_n) es una sucesión decreciente de números estrictamente positivos y si $\sum a_n$ es convergente, demostrar que $\lim(na_n) = 0$.

10. Dar un ejemplo de una serie divergente $\sum a_n$ con (a_n) decreciente y tal que $\lim(na_n) = 0$.

11. Si (a_n) es una sucesión y si $\lim(n^2 a_n)$ existe en $\mathbb{R}$, demostrar que $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

12. Sea $a > 0$. Demostrar que la serie $\sum(1 + a^n)^{-1}$ es divergente si $0 < a \leq 1$ y es convergente si $a > 1$.

13. a) ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ converge?

b) ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right)$ converge?

14. Si (a_{n_k}) es una subsucesión de (a_n), entonces a la serie $\sum a_{n_k}$ se le llama una **subserie** de $\sum a_n$. Demostrar que $\sum a_n$ es absolutamente convergente si y sólo si toda subserie es convergente.

15. Sea $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y escribir $a_{ij} := a(i, j)$. Si $A_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y si $A := \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, se dice entonces que A es una **suma iterada** de las a_{ij} y se escribe $A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$. Se define la otra suma iterada, denotada por $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$, de manera similar.

Suponer ahora que $a_{ij} \geq 0$ para $i, j \in \mathbb{N}$. Si (c_k) es cualquier enumeración de $\{a_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$, demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) La suma iterada $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge a B.
(ii) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge a C.

En este caso se tiene $B = C$.

16. Las afirmaciones del ejercicio precedente pueden no cumplirse si los términos no son positivos. Por ejemplo, sea $a_{ij} := +1$ si $i - j = 1$, $a_{ij} := -1$ si $i - j = -1$ y $a_{ij} := 0$ en los demás puntos. Demostrar que las sumas iteradas

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

existen pero no son iguales.

SECCIÓN 9.2 Criterios de convergencia absoluta

En la sección 3.7 se dieron algunos resultados referentes a la convergencia de series infinitas; a saber, el criterio del n-ésimo término, el hecho de que una serie de términos positivos es convergente si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales

está acotada, el criterio de Cauchy y los criterios de comparación y de comparación de límites.

Se presentan a continuación algunos resultados adicionales que pueden ser familiares para el lector por cursos de cálculo previos. Estos resultados son de particular utilidad para establecer la convergencia absoluta.

9.2.1 Criterio de comparación de límites, II *Suponer que* $X := (x_n)$ *y que* $Y := (y_n)$ *son sucesiones reales diferentes de cero, y suponer que el siguiente límite existe en* $\mathbb{R}$:

$$r := \lim \left| \frac{x_n}{y_n} \right|. \tag{1}$$

a) *Si* $r \neq 0$, *entonces* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente si y sólo si* $\sum y_n$ *es absolutamente convergente.*
b) *Si* $r = 0$ *y si* $\sum y_n$ *es absolutamente convergente, entonces* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente.*

Demostración. Este resultado se sigue de inmediato del teorema 3.7.8. Q.E.D.

Los criterios de la raíz y del cociente

El siguiente criterio se debe a Cauchy.

9.2.2 Criterio de la raíz *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$.

a) *Si existen* $r \in \mathbb{R}$ *con* $r < 1$ *y* $K \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$|x_n|^{1/n} \leq r \quad \text{para} \quad n \geq K, \tag{2}$$

entonces la serie $\sum x_n$ *es absolutamente convergente.*
b) *Si existe* $K \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n|^{1/n} \geq 1 \quad \text{para} \quad n \geq K, \tag{3}$$

entonces la serie $\sum x_n$ *es divergente.*

Demostración. a) Si (2) es válida, entonces se tiene $|x_n| \leq r^n$ para $n \geq K$. Puesto que la serie geométrica $\sum r^n$ es convergente para $0 \leq r < 1$, el criterio de comparación 3.7.7 implica que $\sum |x_n|$ es convergente.

b) Si (3) es válida, entonces $|x_n| \geq 1$ para $n \geq K$, por lo que los términos no tienden a 0 y se aplica el criterio del n-ésimo término 3.7.3. Q.E.D.

En cursos de cálculo es frecuente encontrarse con la siguiente versión del criterio de la raíz.

9.2.3 Corolario *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *y suponer que el límite*

$$r := \lim |x_n|^{1/n} \tag{4}$$

existe en $\mathbb{R}$. *Entonces* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente cuando* $r < 1$ *y es divergente cuando* $r > 1$.

Demostración. Si el límite en (4) existe y $r < 1$, entonces existen r_1 con $r < r_1 < 1$ y $K \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n|^{1/n} \leq r_1$ para $n > K$. En este caso puede aplicarse 9.2.2a.

Si $r > 1$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^{1/n} > 1$ para $n \geq K$ y se aplica el criterio del n-ésimo término. Q.E.D.

Nota No puede llegarse a ninguna conclusión en el corolario 9.2.3 cuando $r = 1$, porque tanto la convergencia como la divergencia son posibles. Véase el ejemplo 9.2.7b.

El siguiente criterio se debe a D'Alembert.

9.2.4 Criterio del cociente *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión de números reales diferentes de cero.*

a) *Si existen* $r \in \mathbb{R}$ *con* $0 < r < 1$ *y* $K \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r \qquad \textit{para} \quad n \geq K, \tag{5}$$

entonces la serie $\sum x_n$ *es absolutamente convergente.*

b) *Si existe* $K \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \qquad \textit{para} \quad n \geq K, \tag{6}$$

entonces la serie $\sum x_n$ *es divergente.*

Demostración. a) Si (5) es válida, mediante un razonamiento por inducción matemática se demuestra que $|x_{K+m}| \leq |x_K| r^m$ para $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, para $n \geq K$ los términos en $\sum |x_n|$ son dominados por un múltiplo fijo de los términos de la serie geométrica $\sum r^m$ con $0 < r < 1$. Entonces el criterio de comparación 3.7.7 implica que $\sum |x_n|$ es convergente.

b) Si (6) es válida, mediante un razonamiento por inducción matemática se demuestra que $|x_{K+m}| \geq |x_K|$ para $m \in \mathbb{N}$ y se aplica el criterio del n-ésimo término. Q.E.D.

Se tiene una vez más un resultado conocido del cálculo.

9.2.5 Corolario *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión de elementos de* $\mathbb{R}$ *diferentes de cero y suponer que el límite*

$$r := \lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \tag{7}$$

existe en $\mathbb{R}$. *Entonces* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente cuando* $r < 1$ *y es divergente cuando* $r > 1$.

Demostración. Si $r < 1$ y $r < r_1 < 1$, entonces existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_{n+1}/x_n| < r_1$ para $n \geq K$. En consecuencia, el teorema 9.2.4a se aplica para establecer la convergencia absoluta de $\sum x_n$.

Si $r > 1$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+1}/x_n| > 1$ para $n \geq K$, de donde se sigue que $|x_k|$ no converge a 0 y se aplica el criterio del n-ésimo término. Q.E.D.

Nota No puede llegarse a ninguna conclusión en el corolario 9.2.5 cuando $r = 1$, porque tanto la convergencia como la divergencia son posibles. Véase el ejemplo 9.2.7c.

El criterio de la integral

El siguiente resultado –de grandes alcances– hace uso de la noción de la integral impropia, la cual se define como sigue: si f está en $\mathcal{R}[a, b]$ para toda $b > a$ y si el límite $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt$ existe en $\mathbb{R}$, entonces la **integral impropia** $\int_a^\infty f(t)\,dt$ se define como este límite.

9.2.6 Criterio de la integral *Sea* f *una función decreciente positiva en* $\{t : t \geq 1\}$. *Entonces la serie* $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ *converge si y sólo si la integral impropia*

$$\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(t)dt$$

existe. En el caso de la convergencia, la suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ *y la suma* $s = \sum_{k=1}^\infty f(k)$ *satisfacen la estimación*

$$\int_{n+1}^\infty f(t)\,dt \leq s - s_n \leq \int_n^\infty f(t)\,dt. \tag{8}$$

Demostración. Puesto que f es decreciente y positiva en el intervalo $[k-1, k]$, se tiene

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k-1). \tag{9}$$

Al sumar esta desigualdad para $k = 2, 3, \cdots, n$, se obtiene

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq s_{n-1},$$

expresión que establece que los límites

$$\lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)dt$$

o existen ambos o no existe ninguno de ellos. Si existen, entonces al sumar (9) para $k = n+1, \cdots, m$, se obtiene

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)dt \leq s_{m-1} - s_{n-1},$$

de donde se sigue que

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)\,dt \leq s_m - s_n \leq \int_{n}^{m} f(t)\,dt.$$

Si se toma el límite en esta última desigualdad cuando $m \to \infty$, se obtiene (8).

Q.E.D.

Se indica a continuación cómo pueden aplicarse los resultados de los teoremas 9.2.1-9.2.6 a las series p, las cuales se introdujeron en el ejemplo 3.7.6d,e.

9.2.7 Ejemplos **a)** Considerar el caso $p = 2$; es decir, la serie $\sum 1/n^2$. Ésta se compara con la serie convergente $\sum 1/(n(n+1))$ del ejemplo 3.7.2c. Puesto que

$$\left|\frac{1}{n^2} \div \frac{1}{n(n+1)}\right| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

el criterio de comparación de límites 9.2.1 implica que la serie $\sum 1/n^2$ es convergente.

b) Se demuestra que el criterio de la raíz falla con la serie p. Adviértase que

$$\left|\frac{1}{n^p}\right|^{1/n} = \frac{1}{(n^p)^{1/n}} = \frac{1}{(n^{1/n})^p}.$$

Como se sabe que $n^{1/n} \to 1$ (véase el ejemplo 3.1.11d), se tiene $r = 1$ en el corolario 9.2.3 y el teorema no proporciona ninguna información.

c) Se aplica el criterio del cociente a la serie p. Puesto que

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p} \div \frac{1}{n^p}\right| = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{(1+1/n)^p} \to 1,$$

el criterio del cociente, en la forma del corolario 9.2.5, no proporciona ninguna información.

d) Por último, se aplica el criterio de la integral a la serie p. Sea $f(t) := 1/t^p$ para $t \geq 1$ y se recuerda que

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln n - \ln 1,$$

$$\int_1^n \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right) \qquad \text{para} \quad p \neq 1.$$

A partir de estas relaciones se observa que la serie p converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$, como se había visto ya en 3.7.6d,e. □

Criterio de Raabe

Se ha visto que cuando los límites $\lim |x_n|^{1/n}$ y $\lim(|x_{n+1}/x_n|)$ que se usan en los corolarios 9.2.3 y 9.2.5 son iguales a 1, estos criterios no proporcionan ninguna

información acerca de la convergencia o divergencia de las series. En este caso con frecuencia es útil emplear un criterio más riguroso. Se presenta a continuación uno que con frecuencia resulta de utilidad.

9.2.8 Criterio de Raabe *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión de números reales diferentes de cero.*

a) *Si existen los números* $a > 1$ *y* $K \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le 1 - \frac{a}{n} \quad \text{para} \quad n \ge K, \tag{10}$$

entonces $\sum x_n$ *es absolutamente convergente.*

b) *Si existen los números reales* $a \le 1$ *y* $K \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge 1 - \frac{a}{n} \quad \text{para} \quad n \ge K, \tag{11}$$

entonces $\sum x_n$ *no es absolutamente convergente.*

Demostración. a) Si la desigualdad (10) es válida, entonces se tiene (después de sustituir n por k y de multiplicar)

$$k\,|x_{k+1}| \le (k-1)|x_k| - (a-1)|x_k| \qquad \text{para} \quad k \ge K.$$

Al reordenar la desigualdad, se tiene

$$(k-1)|x_k| - k\,|x_{k+1}| \ge (a-1)|x_k| > 0 \qquad \text{para} \quad k \ge K, \tag{12}$$

de donde se deduce que la sucesión $(k|x_{k+1}|)$ es decreciente para $k \ge K$. Si se suma (12) para $k = K, \cdots, n$ y se advierte que el primer miembro es telescópico, se obtiene

$$(K-1)|x_k| - n\,|x_{n+1}| \ge (a-1)\big(|x_K| + \cdots + |x_n|\big).$$

Con esto se demuestra (¿por qué?) que las sumas parciales de $\sum |x_n|$ están acotadas y se establece la convergencia absoluta de la serie.

b) Si la relación (11) es válida para $n \ge K$, entonces como $a \le 1$, se tiene

$$n\,|x_{n+1}| \ge (n-a)|x_n| \ge (n-1)|x_n| \qquad \text{para} \quad n \ge K.$$

Por lo tanto, la sucesión $(n|x_{n+1}|)$ es creciente para $n \ge K$ y existe un número $c > 0$ tal que $|x_{n+1}| > c/n$ para $n \ge K$. Pero como la serie armónica $\sum 1/n$ diverge, la serie $\sum |x_n|$ también diverge. Q.E.D.

En la aplicación del criterio de Raabe, con frecuencia resulta conveniente usar la siguiente forma en términos de límites.

9.2.9 Corolario *Sea* $X := (x_n)$ *una sucesión diferente de cero en* $\mathbb{R}$ *y sea*

$$a := \lim\left(n\left(1-\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)\right), \qquad (13)$$

siempre que este límite exista. Entonces $\sum x_n$ *es absolutamente convergente cuando* $a > 1$ *y no es absolutamente convergente cuando* $a < 1$.

Demostración. Suponer que el límite en (13) existe y que $a > 1$. Si a_1 es cualquier número con $a > a_1 > 1$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 < n(1 - |x_{n+1}/x_n|)$ para $n > K$. Por lo tanto, $|x_{n+1}/x_n| < 1 - a_1/n$ para $n \geq K$ y el criterio de Raabe 9.2.8a se aplica.

El caso cuando $a < 1$ es similar y se le deja al lector. Q.E.D.

Nota No puede llegarse a ninguna conclusión cuando $a = 1$; la convergencia o la divergencia son posibles, como el lector puede demostrar.

9.2.10 Ejemplos **a)** Se considera de nuevo la serie p a la luz del criterio de Raabe. Al aplicar la regla de L'Hôpital cuando $p \geq 1$, se obtiene (¿por qué?)

$$a = \lim\left(n\left[1-\frac{n^p}{(n+1)^p}\right]\right) = \lim\left(n\left[\frac{(n+1)^p - n^p}{(n+1)^p}\right]\right)$$

$$= \lim\left(\frac{(1+1/n)^p - 1}{1/n}\right) \cdot \lim\left(\frac{1}{(1+1/n)^p}\right) = p \cdot 1 = p.$$

Se concluye que si $p > 1$ entonces la serie p es convergente, y si $0 < p < 1$ entonces la serie es divergente (ya que los términos son positivos). Sin embargo, si $p = 1$ (¡la serie armónica!), el corolario 9.2.9 no proporciona ninguna información.

b) Se considera ahora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

Con un cálculo sencillo se establece que $\lim(x_{n+1}/x_n) = 1$, por lo que no se aplica el corolario 9.2.5. Asimismo, se tiene $\lim(n(1 - x_{n+1}/x_n)) = 1$, por lo que el corolario 9.2.9 tampoco se aplica. Sin embargo, es un ejercicio establecer la desigualdad $x_{n+1}/x_n \geq (n-1)/n$, de donde, por el criterio de Raabe 9.2.8b, se sigue que la serie es divergente. (Desde luego, el criterio de la integral o el criterio de comparación de límites, con $(y_n) = (1/n)$, pueden aplicarse en este caso.)

□

Aun cuando la forma en términos de límites 9.2.9 del criterio de Raabe es mucho más sencilla de aplicar, el ejemplo 9.2.10b indica que la forma 9.2.8 es más sólida que la 9.2.9.

Ejercicios de la sección 9.2

1. Establecer la convergencia o divergencia de las series cuyo n-ésimo término es:

a) $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$,

c) $2^{-1/n}$, d) $n/2^n$.

2. Establecer la convergencia o divergencia de las series cuyo n-ésimo término es:

a) $(n(n+1))^{-1/2}$, b) $(n^2(n+1))^{-1/2}$,

c) $n!/n^n$, d) $(-1)^n n/(n+1)$.

3. Examinar la convergencia o divergencia de las series cuyo n-ésimo término (para n suficientemente grande) está dado por

a) $(\ln n)^{-p}$, b) $(\ln n)^{-n}$,

c) $(\ln n)^{-\ln n}$, d) $(\ln n)^{-\ln \ln n}$,

e) $(n \ln n)^{-1}$, f) $(n(\ln n)(\ln \ln n)^2)^{-1}$,

4. Examinar la convergencia o divergencia de las series con n-ésimo término

a) $2^n e^{-n}$, b) $n^n e^{-n}$,

c) $e^{-\ln n}$, d) $(\ln n)\, e^{-\sqrt{n}}$,

e) $n!e^{-n}$, f) $n!e^{-n^2}$.

5. Demostrar que la serie $1/1^2 + 1/2^3 + 1/3^2 + 1/4^3 + \cdots$, es convergente, pero que no se aplican los criterios del cociente ni de la raíz.

6. Si a y b son números positivos, entonces $\sum(an + b)^{-p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \le 1$.

7. Examinar las series cuyo n-ésimo término es

a) $\dfrac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$, b) $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$,

c) $\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$, d) $\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}$.

8. Sea $0 < a < 1$ y considerar la serie

$$a^2 + a + a^4 + a^3 + \cdots + a^{2n} + a^{2n-1} + \cdots.$$

Demostrar que se aplica el criterio de la raíz, pero no el criterio del cociente.

9. Si $r \in (0, 1)$ satisface (2) en el criterio de la raíz 9.2.2, demostrar que las sumas parciales s_n de $\sum x_n$ son una aproximación de su límite s de acuerdo con la estimación $|s - s_n| \le r^{n+1}/(1 - r)$ para $n \ge K$.

10. Si $r \in (0, 1)$ satisface (5) en el criterio del cociente 9.2.4, demostrar que $|s - s_n| \le r|x_n|/(1 - r)$ para $n \ge K$.

11. Si $a > 1$ satisface (10) en el criterio de Raabe 9.2.8, demostrar que $|s - s_n| \le n|x_n|/(a - 1)$ para $n \ge K$.

12. Para cada una de las series del ejercicio 1 que converge, estimar el residuo si sólo se toman cuatro términos. Si sólo se toman diez. Si quiere determinarse la suma de la serie dentro de 1/1000, ¿cuántos términos deben tomarse?

13. Responder las preguntas del ejercicio 12 para las series dadas en el ejercicio 2.

14. Demostrar que la serie $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + - \cdots$ es divergente.

15. Para $n \in \mathbb{N}$, sea que c_n esté definida por $c_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n - \ln n$. Demostrar que (c_n) es una sucesión decreciente de números positivos. Al límite C de esta sucesión se le llama la **constante de Euler** y es aproximadamente igual a 0.577. Demostrar que si se escribe

$$b_n := \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n},$$

entonces la sucesión (b_n) converge a $\ln 2$. [*Sugerencia:* $b_n = c_{2n} - c_n + \ln 2$.]

16. Sea que $\{n_1, n_2, \cdots\}$ denote la colección de números naturales que no incluyen el dígito 6 en sus desarrollos decimales. Demostrar que $\sum 1/n_k$ converge a un número menor que 80. Si $\{m_1, m_2, \cdots\}$ es la colección de números que terminan en 6, entonces $\sum 1/m_k$ diverge. Si $\{p_1, p_2, \cdots\}$ es la colección de números que no terminan en 6, entonces $\sum 1/p_k$ diverge.

17. Si $p > 0$, $q > 0$, demostrar que la serie

$$\sum \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}$$

converge para $q > p + 1$ y diverge para $q \leq p + 1$.

18. Suponer que ninguno de los números a, b, c es un entero negativo ni cero. Demostrar que la **serie hipergeométrica**

$$\frac{ab}{1!c} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} + \cdots$$

es absolutamente convergente para $c > a + b$ y que es divergente para $c < a + b$.

19. Sea $a_n > 0$ y suponer que $\sum a_n$ converge. Construir una serie convergente $\sum b_n$ con $b_n > 0$ tal que $\lim(a_n/b_n) = 0$; en consecuencia, $\sum b_n$ converge menos rápido que $\sum a_n$. [*Sugerencia:* sea (A_n) las sumas parciales de $\sum a_n$ y A su límite. Definir $b_1 := \sqrt{A} - \sqrt{A - A_1}$ y $b_n := \sqrt{A - A_{n-1}} - \sqrt{A - A_n}$ para $n \geq 1$.]

20. Sea (a_n) una sucesión decreciente de números reales que converge a 0 y suponer que $\sum a_n$ diverge. Construir una serie divergente $\sum b_n$ con $b_n > 0$ tal que $\lim(b_n/a_n) = 0$; en consecuencia, $\sum b_n$ diverge menos rápido que $\sum a_n$. [*Sugerencia:* sea $b_n := a_n/\sqrt{A_n}$, donde A_n es la n-ésima suma parcial de $\sum a_n$.]

SECCIÓN 9.3 Criterios para convergencia no absoluta

Los criterios de convergencia que se examinaron en la sección anterior se enfocaron principalmente en establecer la convergencia absoluta de una serie. Dado que hay muchas series, tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

que son convergentes pero no absolutamente convergentes, es conveniente contar con algunos criterios para este caso. En esta breve sección se presenta primero el criterio para series alternadas y después los criterios para series más generales debidos a Dirichlet y Abel.

Series alternadas

El criterio más conocido para series no absolutamente convergentes es el que se debe a Leibniz, el cual puede aplicarse a series que son "alternadas" en el siguiente sentido.

9.3.1 Definición Se dice que una sucesión $X := (x_n)$ de números reales diferentes de cero es **alternada** si los términos $(-1)^{n+1}x_n$, $n \in \mathbb{N}$, son todos números reales positivos (o todos negativos). Si la sucesión $X = (x_n)$ es alternada, se dice que la serie $\sum x_n$ que genera es una **serie alternada**.

En el caso de una serie alternada, es útil hacer $x_n = (-1)^{n+1}z_n$ [o $x_n = (-1)^n z_n$], donde $z_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

9.3.2 Criterio para series alternadas *Sea* $Z := (z_n)$ *una sucesión decreciente de números estrictamente positivos con* $\lim(z_n) = 0$. *Entonces la serie alternada* $\sum(-1)^{n+1}z_n$ *es convergente.*

Demostración. Puesto que se tiene

$$s_{2n} = (z_1 - z_2) + (z_3 - z_4) + \cdots + (z_{2n-1} - z_{2n}),$$

y puesto que $z_k - z_{k+1} \geq 0$, se sigue que la subsucesión (s_{2n}) de sumas parciales es creciente. Puesto que

$$s_{2n} = z_1 - (z_2 - z_3) - \cdots - (z_{2n-2} - z_{2n-1}) - z_{2n},$$

se sigue también que $s_{2n} \leq z_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Del teorema de convergencia monótona 3.3.2 se sigue que la subsucesión (s_{2n}) converge a algún número $s \in \mathbb{R}$.

Se demuestra ahora que la sucesión completa (s_n) converge a s. De hecho, si $\varepsilon > 0$, sea K tal que si $n \geq K$ entonces $|s_{2n} - s| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ y $|z_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Se sigue que si $n \geq K$ entonces

$$\begin{aligned} |s_{2n+1} - s| &= |s_{2n} + z_{2n+1} - s| \\ &\leq |s_{2n} - s| + |z_{2n+1}| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, toda suma parcial de un número impar de términos también está dentro de ε unidades de s si n es lo suficientemente grande. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, la convergencia de (s_n) y en consecuencia la de $\sum(-1)^{n+1}z_n$ queda establecida. Q.E.D.

Nota Es un ejercicio demostrar que si s es la suma de la serie alternada y si s_n es su n-ésima suma parcial, entonces

$$|s - s_n| \leq z_{n+1}. \tag{2}$$

Es evidente que este criterio para series alternadas establece la convergencia de las dos series ya mencionadas en (1).

Los criterios de Dirichlet y Abel

Se presentan ahora otros dos criterios que pueden aplicarse en gran cantidad de situaciones. Se basan en el siguiente lema, al que en ocasiones se le llama la **fórmula de sumas parciales**, ya que corresponde a la conocida fórmula de la integración por partes.

9.3.3 Lema de Abel *Sean* $X := (x_n)$ *y* $Y := (y_n)$ *sucesiones en* $\mathbb{R}$ *y sea que las sumas parciales de* $\sum y_n$ *se denoten por* (s_n) *con* $s_0 := 0$. *Si* $m > n$, *entonces*

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k = (x_m s_m - x_{n+1} s_n) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) s_k. \tag{3}$$

Demostración. Puesto que $y_k = s_k - s_{k-1}$ para $k = 1, 2, \cdots$, se observa que el primer miembro de (3) es igual a $\sum_{k=n+1}^{m} x_k(s_k - s_{k-1})$. Si se agrupan los términos multiplicando $s_n, s_{n+1}, \cdots, s_m$, se obtiene el segundo miembro de (3). Q.E.D.

Se aplica ahora el lema de Abel a fin de obtener criterios para la convergencia de series de la forma $\sum x_n y_n$.

9.3.4 Criterio de Dirichlet *Si* $X := (x_n)$ *es una sucesión decreciente con* $\lim x_n = 0$ *y si las sumas parciales* (s_n) *de* $\sum y_n$ *están acotadas, entonces la serie* $\sum x_n y_n$ *es convergente.*

Demostración. Sea $|s_n| \leq B$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$, del lema de Abel 9.3.3 y del hecho de que $x_k - x_{k+1} \geq 0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k\right| &\leq (x_m + x_{n+1})\, B + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) B \\ &= [(x_m + x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_m)] B \\ &= 2x_{n+1} B.\end{aligned}$$

Puesto que $\lim(x_k) = 0$, la convergencia de $\sum x_k y_k$ se sigue del criterio de convergencia de Cauchy 3.7.4. Q.E.D.

9.3.5 Criterio de Abel *Si* $X := (x_n)$ *es una sucesión monótona convergente y la serie* Σy_n *es convergente, entonces la serie* $\Sigma x_n y_n$ *también es convergente.*

Demostración. Si (x_n) es decreciente con límite x, sea $u_n := x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$, de tal modo que (u_n) decrece a 0. Entonces $x_n = x + u_n$, de donde $x_n y_n = xy_n + u_n y_n$. Del criterio de Dirichlet 9.3.4 se sigue que $\Sigma u_n y_n$ es convergente y, como $\Sigma x y_n$ converge (debido a la convergencia supuesta de la serie Σy_n), se concluye que $\Sigma x_n y_n$ es convergente.

Si (x_n) es creciente con límite x, sea $v_n := x - x_n$, $n \in \mathbb{N}$, de tal modo que (v_n) decrece a 0. Aquí $x_n = x - v_n$, de donde $x_n y_n = xy_n - v_n y_n$, y se sigue el mismo razonamiento que antes. Q.E.D.

9.3.6 Ejemplos **a)** Puesto que se tiene

$$2(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x)(\cos x + \cdots + \cos nx) = \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x,$$

se sigue que si $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$, entonces

$$|\cos x + \cdots + \cos nx| = \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right|}{\left|2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right|} \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right|}.$$

Por lo consiguiente, el criterio de Dirichlet implica que si (a_n) es decreciente con $\lim(a_n) = 0$, entonces la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ converge siempre que $x \neq 2k\pi$.

b) Puesto que se tiene

$$2(\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x)(\operatorname{sen} x + \cdots + \operatorname{sen} nx) = \cos\tfrac{1}{2}x - \cos(n+\tfrac{1}{2})x,$$

se sigue que si $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$, entonces

$$|\operatorname{sen} x + \cdots + \operatorname{sen} nx| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right|}.$$

Como se afirmó antes, si (a_n) es decreciente y si $\lim(a_n) = 0$, entonces la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ converge para $x \neq 2k\pi$ (y también converge para estos valores). □

Ejercicios de la sección 9.3

1. Examinar las siguientes series para la convergencia y la convergencia absoluta.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n+2}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$.

2. Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie alternada $\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z_n$ y si s denota la suma de esta serie, demostrar que $|s - s_n| \leq z_{n+1}$.

3. Dar un ejemplo que muestre que el criterio para series alternadas 9.3.2 puede fallar si (z_n) no es una sucesión decreciente.

4. Demostrar que el criterio para series alternadas es una consecuencia del criterio de Dirichlet 9.3.4.

5. Considerar la serie

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}++--\cdots,$$

donde los signos están por pares. ¿Es convergente?

6. Sea $a_n \in \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ y sea $p < q$. Si la serie $\sum a_n/n^p$ es convergente, demostrar que la serie $\sum a_n/n^q$ también es convergente.

7. Si p y q son números positivos, demostrar que $\sum(-1)^n(\ln n)^p/n^q$ es una serie convergente.

8. Examinar las series cuyo n-ésimo término es:

a) $(-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$,
b) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$,
c) $(-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$,
d) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

9. Si las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ converge para $t > 0$.

10. Si las sumas parciales s_n de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ están acotadas, demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge a $\sum_{n=1}^{\infty} s_n/n(n+1)$.

11. ¿Puede aplicarse el criterio de Dirichlet para establecer la convergencia de

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots$$

donde el número de signos se incrementa en uno en cada "bloque"? En caso contrario, usar otro método para establecer la convergencia de esta serie.

12. Demostrar que la hipótesis de que la sucesión $X := (x_n)$ es decreciente en el criterio de Dirichlet 9.3.4 puede reemplazarse con la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$ es convergente.

13. Si (a_n) es una sucesión decreciente acotada y (b_n) es una sucesión creciente acotada, y si $x_n := a_n + b_n$ para $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{n+1}|$ es convergente.

14. Demostrar que si las sumas parciales s_n de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ satisfacen $|s_n| \leq Mn^r$ para alguna $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ converge.

15. Suponer que $\sum a_n$ es una serie convergente de números reales. Demostrar que $\sum b_n$ converge o bien dar un contraejemplo, cuando b_n se define por

a) a_n/n,
b) $\sqrt{a_n}/n \quad (a_n \geq 0)$,
c) $a_n \operatorname{sen} n$,
d) $\sqrt{a_n/n} \quad (a_n \geq 0)$,
e) $n^{1/n} a_n$,
f) $a_n/(1+|a_n|)$.

SECCIÓN 9.4 Series de funciones

Debido a la frecuencia con que aparecen y a su importancia, se consideran a continuación las series infinitas de funciones. Puesto que la convergencia de una serie infinita se aborda examinando la sucesión de sumas parciales, las preguntas referentes a series de funciones se responden examinando las preguntas correspondientes para sucesiones de funciones. Por esta razón, una parte de la presente sección es tan sólo una transposición a la terminología de series de hechos ya establecidos para sucesiones de funciones. Sin embargo, en la segunda parte de la sección, donde se examinan las series de potencias, surgen nuevas variantes debido al carácter especial de las funciones que intervienen.

9.4.1 Definición Si (f_n) es una sucesión de funciones definidas en un subconjunto D de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, la sucesión de **sumas parciales** (s_n) de la serie infinita $\sum f_n$ está definida para x en D por

$$\begin{aligned} s_1(x) &:= f_1(x), \\ s_2(x) &:= s_1(x) + f_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n+1}(x) &:= s_n(x) + f_{n+1}(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

En caso de que la sucesión (s_n) de funciones converja a una función f en D, se dice que la serie infinita de funciones $\sum f_n$ **converge** a f en D. Con frecuencia se escribirá

$$\sum f_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

para denotar la serie o la función límite, cuando existe.

Si la serie $\sum |f_n(x)|$ converge para toda x en D, se dice que $\sum f_n$ es **absolutamente convergente** en D. Si la sucesión (s_n) de sumas parciales es uniformemente convergente a f en D, se dice que $\sum f_n$ es **uniformemente convergente en** D o que **converge a** f **uniformemente en** D.

Una de las razones principales del interés en las series de funciones uniformemente convergentes es la validez de los siguientes resultados, en los cuales se presentan las condiciones que justifican el cambio de orden de la sumatoria y otras operaciones con límites.

9.4.2 Teorema *Si* f_n *es continua de* $D \subseteq \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y si* $\sum f_n$ *converge a* f *uniformemente en* D, *entonces* f *es continua en* D.

Se trata de una transposición directa para series del teorema 8.2.2. El siguiente resultado es una transposición del teorema 8.2.4.

9.4.3 Teorema *Suponer que las funciones* f_n *con valores reales,* $n \in \mathbb{N}$, *son Riemann integrables en el intervalo* $J := [a, b]$. *Si la serie* $\sum f_n$ *converge a* f *uniformemente en* J, *entonces* f *es Riemann integrable y*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n. \tag{1}$$

Enseguida se considera el teorema correspondiente relativo a la derivación. Se supone aquí la convergencia uniforme de la serie obtenida después de derivar término a término la serie en cuestión. Este resultado es una consecuencia inmediata del teorema 8.2.3.

9.4.4 Teorema *Para toda* $n \in \mathbb{N}$, *sea* f_n *una función con valores reales en* $J := [a, b]$ *que tiene derivada* f_n' *en* J. *Suponer que la serie* $\sum f_n$ *converge al menos en un punto de* J *y que la serie de las derivadas* $\sum f_n'$ *converge uniformemente en* J.

Entonces existe una función con valores reales f *en* J *tal que* $\sum f_n$ *converge uniformemente a* f *en* J. *Además,* f *tiene derivada en* J *y* $f' = \sum f_n'$.

Criterios de convergencia uniforme

Puesto que se han enunciado algunas consecuencias de la convergencia uniforme de series, a continuación se presentan algunos criterios que pueden usarse para establecer la convergencia uniforme.

9.4.5 Criterio de Cauchy *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones de* $D \subseteq \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$. *La serie* $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* D *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $M(\varepsilon)$ *tal que si* $m > n \geq M(\varepsilon)$, *entonces*

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon \qquad \textit{para toda} \qquad x \in D.$$

9.4.6 Criterio *M* de Weierstrass *Sea* (M_n) *una sucesión de números reales positivos tal que* $|f_n(x)| \leq M_n$ *para* $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$. *Si la serie* $\sum M_n$ *es convergente, entonces* $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* D.

Demostración. Si $m > n$, se tiene la relación

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_m \qquad \text{para} \qquad x \in D.$$

Se aplican ahora 3.7.4, 9.4.5 y la convergencia de $\sum M_n$. Q.E.D.

En el apéndice E se usa el criterio *M* de Weierstrass para construir dos interesantes ejemplos.

Series de potencias

Se considera a continuación el examen de las series de potencias. Se trata de una importante clase de series de funciones que posee propiedades que *no* son válidas para las series de funciones generales.

9.4.7 Definición Se dice que una serie de funciones reales $\sum f_n$ es una **serie de potencias alrededor de** $x = c$ si la función f_n tiene la forma

$$f_n(x) = a_n(x - c)^n,$$

donde a_n y c pertenecen a $\mathbb{R}$, y donde $n = 0, 1, 2, \cdots$.

A fin de simplificar la notación, sólo se trata el caso en que $c = 0$. Sin embargo, obrar así no es en detrimento de la validez general de los resultados, ya que la transposición $x' = x - c$ reduce una serie de potencias alrededor de c a una serie de potencias alrededor de 0. En consecuencia, siempre que se haga referencia a una serie de potencias, se entenderá una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{2}$$

Aun cuando las funciones que aparecen en (2) están definidas en la totalidad de $\mathbb{R}$, no debe esperarse que la serie (2) convergerá para toda x en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, utilizando el criterio de cociente 9.2.4 puede demostrarse que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!,$$

convergen para la x que está en los conjuntos

$$\{0\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}, \qquad \mathbb{R},$$

respectivamente. Por consiguiente, el conjunto donde una serie de potencias converge puede ser pequeño, mediano o grande. Sin embargo, un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$ no puede ser el conjunto exacto en el que una serie de potencias converge, como se demuestra más adelante.

Si (b_n) es una sucesión acotada de números reales no negativos, entonces el **límite superior** de (b_n) se define como el ínfimo de los números v tales que $b_n \leq v$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Este ínfimo se encuentra determinado de manera única y se denota por lím sup(b_n). Los únicos hechos que es necesario conocer son (i) que si $v >$ lím sup(b_n), entonces $b_n \leq v$ para toda $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, y (ii) que si $w <$ lím sup(b_n), entonces $w \leq b_n$ para un número infinito de $n \in \mathbb{N}$.

9.4.8 Definición Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias. Si la sucesión $(|a_n|^{1/n})$ está acotada, se hace $\rho :=$ lím sup$(|a_n|^{1/n})$; si esta sucesión no está acotada, se hace $\rho = +\infty$. Se define que el **radio de convergencia** de $\sum a_n x^n$ está dado por

$$R := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho = +\infty, \\ 1/\rho & \text{si} \quad 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty & \text{si} \quad \rho = 0. \end{cases}$$

El **intervalo de convergencia** es el intervalo abierto $(-R, R)$.

A continuación se justifica el término "radio de convergencia".

9.4.9 Teorema de Cauchy-Hadamard *Si* R *es el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum a_n x^n$, *entonces la serie es absolutamente convergente si* $|x| < R$ *y es divergente si* $|x| > R$.

Demostración. Sólo se trata el caso en que $0 < R < +\infty$ y se dejan como ejercicios los casos $R = 0$ y $R = +\infty$. Si $0 < |x| < R$, entonces existe un número positivo $c < 1$ tal que $|x| < cR$. Por lo tanto, $\rho < c/|x|$, de donde se sigue que si n es lo suficientemente grande, entonces $|a_n|^{1/n} \le c/|x|$. Esta expresión es equivalente a decir que

$$|a_n x^n| \le c^n \tag{3}$$

para toda n lo suficientemente grande. Puesto que $c < 1$, la convergencia absoluta de $\sum a_n x^n$ se sigue del criterio de comparación 3.7.7.

Si $|x| > R = 1/\rho$, entonces hay un número infinito de $n \in \mathbb{N}$ para las cuales $|a_n|^{1/n} > 1/|x|$. Por lo tanto, $|a_n x^n| > 1$ para un número infinito de n, por lo que la sucesión $(a_n x^n)$ no converge a cero. Q.E.D.

Observación Se habrá advertido que el teorema de Cauchy-Hadamard no establece si la serie de potencias converge cuando $|x| = R$. De hecho, puede ocurrir cualquier cosa, como lo indican los ejemplos

$$\sum x^n, \quad \sum \frac{1}{n} x^n, \quad \sum \frac{1}{n^2} x^n,$$

Puesto que $\text{lím}(n^{1/n}) = 1$, cada una de estas series de potencias tiene radio de convergencia igual a 1. La primera serie de potencias no converge en ninguno de los puntos $x = -1$ y $x = +1$; la segunda serie converge en $x = -1$ pero diverge en $x = +1$, y la tercera serie de potencias converge tanto en $x = -1$ como en $x = +1$. (Encontrar una serie de potencias con $R = 1$ que converge en $x = +1$ pero que diverge en $x = -1$.)

Es un ejercicio demostrar que el radio de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ también está dado por

$$\text{lím}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{4}$$

siempre que este límite exista. Con frecuencia resulta más conveniente usar (4) en lugar de la definición 9.4.8.

El razonamiento empleado en la demostración del teorema de Cauchy-Hadamard establece la convergencia uniforme de la serie de potencias en cualquier intervalo fijo cerrado y acotado en el intervalo de convergencia $(-R, R)$.

9.4.10 Teorema *Sea* R *el radio de convergencia de* $\sum a_n x^n$ *y sea* K *un intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo de convergencia* $(-R, R)$. *Entonces la serie de potencias converge uniformemente en* K.

Demostración. La hipótesis de que $K \subseteq (-R, R)$ implica que existe una constante positiva $c < 1$ tal que $|x| < cR$ para toda $x \in K$. (¿Por qué?) Del razonamien-

to empleado en 9.4.9 se infiere que para n lo suficientemente grande, la estimación (3) es válida para toda $x \in K$. Puesto que $c < 1$, la convergencia uniforme de $\sum a_n x^n$ en K es una consecuencia directa del criterio M de Weierstrass con $M_n := c^n$. Q.E.D.

9.4.11 Teorema *El límite de una serie de potencias es continuo en el intervalo de convergencia. Una serie de potencias puede integrarse término a término en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo de convergencia.*

Demostración. Si $|x_0| < R$, entonces el resultado precedente afirma que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en cualquier vecindad cerrada y acotada de x_0 contenida en $(-R, R)$. La continuidad en x_0 se sigue entonces del teorema 9.4.2 y la integración término a término se justifica por el teorema 9.4.3. Q.E.D.

Se demuestra ahora que una serie de potencias puede derivarse término a término. A diferencia de la situación para series generales, no es necesario suponer que la serie que se deriva es uniformemente convergente. Por consiguiente, este resultado es más sólido que el teorema 9.4.4.

9.4.12 Teorema de derivación *Una serie de potencias puede derivarse término a término dentro del intervalo de convergencia. De hecho, si*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \textit{entonces} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \textit{para} \qquad |x| < R.$$

Ambas series tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración. Puesto que $\lim (n^{1/n}) = 1$, la sucesión $(|na_n|^{1/n})$ está acotada si y sólo si la sucesión $(|a_n|^{1/n})$ está acotada. Además, es fácil ver que

$$\lim \sup\left(|na_n|^{1/n}\right) = \lim \sup\left(|a_n|^{1/n}\right).$$

En consecuencia, el radio de convergencia de las dos series es el mismo, por lo que la serie derivada formalmente es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo de convergencia. Entonces puede aplicarse el teorema 9.4.4 para concluir que la serie derivada formalmente converge a la derivada de la serie dada. Q.E.D.

Observación Es necesario advertir que el teorema no hace ninguna afirmación acerca de los puntos terminales del intervalo de convergencia. Si una serie es convergente en uno de los puntos terminales, entonces la serie derivada puede ser o no convergente en este punto. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ converge en ambos puntos terminales $x = -1$ y $x = +1$. Sin embargo, la serie derivada dada por $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}/n$ converge en $x = -1$ pero diverge en $x = +1$.

Mediante la aplicación repetida del resultado anterior, se concluye que si $k \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ puede derivarse término a término k veces para obtener

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}. \tag{5}$$

Además, esta serie converge absolutamente a $f^{(k)}(x)$ para $|x| < R$ y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado en el intervalo de convergencia. Si se sustituye $x = 0$ en (5), se obtiene la importante fórmula

$$f^{(k)}(0) = k!a_k.$$

9.4.13 Teorema de unicidad *Si* $\sum a_n x^n$ *y* $\sum b_n x^n$ *convergen en algún intervalo* $(-r, r)$, $r > 0$, *a la misma función* f, *entonces*

$$a_n = b_n \qquad \textit{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Las observaciones precedentes indican que $n!a_n = f^{(n)}(0) = n!b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Series de Taylor

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en un punto c en $\mathbb{R}$, entonces pueden calcularse los coeficientes de Taylor con $a_0 := f(c)$, $a_n := f^{(n)}(c)/n!$ para $n \in \mathbb{N}$ para obtener así una serie de potencias con estos coeficientes. Sin embargo, no se cumple necesariamente que la serie de potencias resultante converge a la función f en un intervalo alrededor de c. (Véase el ejercicio 12 para un ejemplo.) La cuestión de la convergencia se resuelve mediante el término del residuo R_n del teorema de Taylor 6.4.1. Se escribirá

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{6}$$

para $|x - c| < R$ si y sólo si la sucesión $(R_n(x))$ de los residuos converge a 0 para toda x en algún intervalo $\{x : |x - c| < R\}$. En este caso se dice que la serie de potencias (6) es la **expansión de Taylor** de f en c. Cabe señalar que los polinomios de Taylor para f examinados en la sección 6.4 no son sino las sumas parciales de la expansión de Taylor (6) de f. (Recordar que $0! = 1$.)

9.4.14 Ejemplos **a)** Si $f(x) := \text{sen}\, x$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \text{sen}\, x$ y $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Al hacer la evaluación en $c = 0$, se obtienen los coeficientes de Taylor $a_{2n} = 0$ y $a_{2n+1} = (-1)^n/(2n + 1)!$ para $n \in \mathbb{N}$. Dado que $|\text{sen}\, x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$ para toda x, entonces $|R_n(x)| \leq |x|^n/n!$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. Puesto que $\lim(R_n(x)) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, se obtiene la expansión de Taylor

$$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{para toda} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La aplicación del teorema 9.4.12 produce la expansión de Taylor

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{para toda} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Si $g(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $g^{(n)}(x) = e^x$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia los coeficientes de Taylor están dados por $a_n = 1/n!$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}$ dada, se tiene $|R_n(x)| \leq e^{|x|}|x|^n/n!$ y por lo tanto $(R_n(x))$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, se obtiene la expansión de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{para toda} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Es posible obtener la expansión de Taylor en una $c \in \mathbb{R}$ arbitraria mediante el recurso de sustituir x por $x - c$ en (7) y reparando en que

$$e^x = e^c \cdot e^{x-c} = e^c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n \quad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Ejercicios de la sección 9.4

1. Examinar la convergencia y la convergencia uniforme de la serie $\sum f_n$, donde $f_n(x)$ está dada por:

   a) $(x^2 + n^2)^{-1}$,
   b) $(nx)^{-2}$ $(x \neq 0)$,
   c) $\operatorname{sen}(x/n^2)$,
   d) $(x^n + 1)^{-1}$ $(x \neq 0)$,
   e) $x^n/(x^n + 1)$ $(x \geq 0)$,
   f) $(-1)^n(n + x)^{-1}$ $(x \geq 0)$.

2. Si $\sum a_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces la serie $\sum a_n \operatorname{sen} nx$ es absoluta y uniformemente convergente.

3. Sea (c_n) una sucesión decreciente de números positivos. Si $\sum c_n \operatorname{sen} nx$ es uniformemente convergente, entonces $\lim(nc_n) = 0$.

4. Examinar los casos $R = 0$, $R = +\infty$ en el teorema de Cauchy-Hadamard 9.4.9.

5. Demostrar que el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum a_n x^n$ está dado por $\lim(|a_n/a_{n+1}|)$ siempre que este límite exista. Dar un ejemplo de una serie de potencias para la que este límite no existe.

6. Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$, donde a_n está dada por:

   a) $1/n^n$,
   b) $n^{\alpha}/n!$,
   c) $n^n/n!$,
   d) $(\ln n)^{-1}$, $n \geq 2$,
   e) $(n!)^2/(2n)!$,
   f) $n^{-\sqrt{n}}$.

7. Si $a_n := 1$ cuando n es el cuadrado de un número natural y $a_n := 0$ en caso contrario, encontrar el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$. Si $b_n := 1$ cuando $n = m!$ para $m \in \mathbb{N}$ y $b_n := 0$ en caso contrario, encontrar el radio de convergencia de la serie $\sum b_n x^n$.

8. Demostrar en detalle que $\lim\sup(|na_n|^{1/n}) = \lim\sup(|a_n|^{1/n})$.

9. Si $0 < p \leq |a_n| \leq q$ para toda $n \in \mathbb{N}$, encontrar el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$.

10. Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ para $|x| < R$. Si $f(x) = f(-x)$ para toda $|x| < R$, demostrar que $a_n = 0$ para toda n impar.

11. Demostrar que si f está definida para $|x| < r$ y si existe una constante B tal que $|f^{(n)}(x)| \le B$ para toda $|x| < r$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la expansión de la serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

converge a $f(x)$ para $|x| < r$.

12. Demostrar por inducción matemática que la función dada por $f(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, $f(0) := 0$, tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto y que todas estas derivadas se anulan en $x = 0$. En consecuencia, esta función no está dada por su expansión de Taylor alrededor de $x = 0$.

13. Dar un ejemplo de una función que sea igual a su expansión de la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para $x \ge 0$, pero la cual no sea igual a su expansión de Taylor alrededor de $x < 0$.

14. Usar la forma de Lagrange del residuo para justificar la expansión binomial general

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \quad \text{para} \quad 0 \le x < 1.$$

15. (Series geométricas) Demostrar directamente que si $|x| < 1$, entonces $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

16. Demostrar integrando la serie para $1/(1+x)$ que si $|x| < 1$, entonces

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n .$$

17. Demostrar que si $|x| < 1$, entonces $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

18. Demostrar que si $|x| < 1$, entonces $\operatorname{arcsen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

19. Encontrar una expansión en serie para $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ para $x \in \mathbb{R}$.

20. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|k| < 1$, a la integral $F(\alpha, k) := \int_0^{\alpha} (1 - k^2 (\operatorname{sen} x)^2)^{-1/2}\, dx$ se le llama la **integral elíptica del primer tipo.** Demostrar que

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 k^{2n} \quad \text{para} \quad |k| < 1.$$

Capítulo 10

LA INTEGRAL DE RIEMANN GENERALIZADA

En el capítulo 7 se presentó una discusión bastante completa de la integral de Riemann de una función en un intervalo acotado cerrado definiendo la integral como el límite de las sumas de Riemann de la función. Se trata de la integral (y de la forma de llegar a ella) que el lector conoció en los cursos de cálculo; es también la integral que se usa con mayor frecuencia en aplicaciones de ingeniería y otras áreas. Se ha visto que las funciones continuas y monótonas en $[a, b]$ son Riemann integrables, por lo que la mayoría de las funciones que surgen en el cálculo se encuentran incluidas en esta categoría.

Sin embargo, hacia fines del siglo XIX algunas insuficiencias en la teoría de integración de Riemann habían salido a relucir. Estas debilidades se derivaron principalmente del hecho de que la colección de las funciones Riemann integrables se hizo inconvenientemente reducida a medida que las matemáticas se desarrollaban. Por ejemplo, el conjunto de funciones para las que la fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

es válida no incluye *todas* las funciones derivables. Asimismo, los límites de sucesiones de funciones Riemann integrables no son necesariamente Riemann integrables. Estas insuficiencias llevaron a otros matemáticos a inventar otras teorías de la integración, la más conocida de las cuales se debe a Henri Lebesgue (1875-1941) y fue desarrollada en los albores del siglo XX. (Para una relación de la historia del desarrollo de la integral de Lebesgue, el lector puede consultar el libro de Hawkins citado en la bibliografía.)

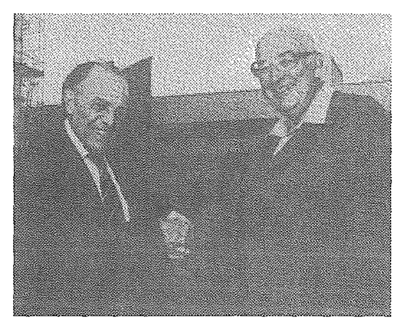
De hecho, la teoría de integración de Lebesgue ha adquirido un papel preeminente en la investigación matemática contemporánea, ya que permite integrar una colección mucho más grande de funciones y tomar límites de integrales con mayor libertad. Sin embargo, la integral de Lebesgue también tiene varias insuficiencias y dificultades: 1) existen funciones F que son derivables en $[a, b]$ pero tales que F' no es Lebesgue integrable; 2) algunas "integrales impropias", como la importante integral de Dirichlet:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx,$$

no existen como integrales de Lebesgue, y 3) la mayor parte de los tratamientos de la integral de Lebesgue incluyen numerosos prerrequisitos y salen del alcance del estudiante de licenciatura de matemáticas.

Tan importantes como lo es la integral de Lebesgue, hay teorías de la integración aún más incluyentes. Una de ellas fue desarrollada de manera independiente a fines de los años 1950 por el matemático checo Jaroslav Kurzweil (n. 1926) y por el matemático inglés Ralph Henstock (n. 1923). Sorprendentemente, su enfoque es apenas ligeramente diferente del que usó Riemann, no obstante lo cual produce una integral (a la que se llamará la *integral de Riemann generalizada*) que incluye tanto las integrales de Riemann como las de Lebesgue como casos especiales. Puesto que el enfoque es tan similar al de Riemann, resulta técnicamente mucho más simple que la integral de Lebesgue convencional –no obstante lo cual su alcance es considerablemente mayor–; en particular, incluye funciones que son derivadas e incluye asimismo todas las "integrales impropias".

Ralph Henstock y Jaroslav Kurzweil



Ralph Henstock (a la izquierda en la fotografía) nació el 2 de junio de 1923 en Nottinghamshire, Inglaterra; era hijo de un minero. A temprana edad dejó constancia de que era un escolar dotado en matemáticas y ciencia. Ingresó al St. John's College, Cambridge, en 1941, estudiando bajo la tutela de J. D. Bernal, G. H. Hardy y J. C. Burkhill, y fue clasificado *Wrangler* (disertador) en la Parte II de los Exámenes Tripos en 1943. Obtuvo su licenciatura por Cambridge en 1944 y su doctorado por la Universidad de Londres en 1948. Su investigación se centra en la sumabilidad, el análisis lineal y la teoría de la integración. La mayor parte de su trabajo docente lo ha realizado en Irlanda del Norte. En la actualidad es profesor emérito en el campus Coleraine de la Universidad de Ulster.

Jaroslav Kurzweil (a la derecha en la fotografía) nació en Praga el 7 de mayo de 1926. Alumno de V. Jarník, ha realizado un número considerable de investigaciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales y en la teoría de la integración, combinadas con un serio interés en la enseñanza de las matemáticas. En 1964 se le otorgó el premio Klement Gottwald y en 1981 fue galardonado con la medalla Bolzano de la Academia Checoslovaca de Ciencias. Desde 1989 ha sido director del Instituto de Matemáticas de la Academia Checa de Ciencias en Praga y ha ejercido una profunda influencia sobre los matemáticos de su país.

En este capítulo se presenta una exposición de la integral de Riemann generalizada. En la sección 10.1 se verá que la teoría básica es casi exactamente la misma que para la integral de Riemann ordinaria. Sin embargo, se han omitido las demostraciones de algunos resultados cuando son en exceso complicadas. En la breve sección 10.2 se indica que las integrales impropias en $[a, b]$ se encuentran incluidas en la teoría generalizada. La clase de las funciones Lebesgue integrables se introduce como aquellas funciones integrables generalizadas f cuyo valor absoluto $|f|$ también es integrable en el sentido generalizado; se trata de un enfoque muy diferente de la integral de Lebesgue al que se acostumbra utilizar, pero produce la misma clase de funciones. En la sección 10.3 se integran funciones en intervalos cerrados *no acotados*. En la sección final se examinan los teoremas de límites que son válidos para las integrales de Riemann y Lebesgue generalizadas y se presentan algunas aplicaciones interesantes de estos teoremas. Asimismo, se define lo que se entiende por una "función medible" y se relaciona dicha noción con la integrabilidad generalizada.

Los lectores que deseen estudiar las demostraciones que se omiten aquí deberán consultar el primer libro del autor, *A Modern Theory of Integration*, al que se hace referencia como [MTI], o los libros de DePree y Swartz, Gordon, y McLeod incluidos en la bibliografía.

SECCIÓN 10.1 Definición y propiedades principales

En la definición 5.5.2 se definió una **medida** sobre $[a, b]$ como una función estrictamente positiva $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$. Además, se dice que una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ de $[a, b]$, donde $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, es **fina-δ** cuando

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Lo anterior se ilustra en la figura 5.5.1. Adviértase que: (i) sólo una partición etiquetada puede ser fina-δ, y (ii) la finura-δ de una partición etiquetada depende de la elección de las etiquetas t_i así como de los valores $\delta(t_i)$.

En los ejemplos 5.5.4 se dieron casos específicos de medidas y en el teorema 5.5.5 se estableció que si δ es cualquier medida sobre $[a, b]$, entonces existen particiones etiquetadas finas-δ de $[a, b]$.

Se define ahora la integral de Riemann generalizada (o de "Henstock-Kurzweil"). Se verá que la definición es *muy similar* a la de la integral de Riemann ordinaria y que muchas de las demostraciones son, en esencia, las mismas. De hecho, la única diferencia entre las definiciones de estas integrales es que la noción de la pequeñez de una partición etiquetada se especifica por medio de una medida en vez de usar su norma. Se verá que esta diferencia –en apariencia menor– resulta en una clase mucho mayor de funciones integrables. A fin de evitar algunas complicaciones, se omitirán algunas demostraciones; éstas pueden encontrarse en [MTI].

Antes de iniciar nuestro estudio, es apropiado preguntar: *¿por qué las medidas son más útiles que las normas?* Brevemente, la razón es que la norma de una partición es una medición muy burda de la finura de la partición, pues es tan sólo la longitud del subintervalo más grande en la partición. Por otra parte, las medidas pueden proporcionar un control más pormenorizado de los subintervalos en las particiones al requerir el uso de subintervalos pequeños cuando la función está variando con rapidez pero permitiendo el uso de subintervalos más grandes cuando la función se encuentra muy cerca de ser constante. Además, las medidas pueden usarse para forzar a que puntos específicos sean etiquetas; esto resulta útil con frecuencia cuando se presenta algún comportamiento inusual en uno de estos puntos. Puesto que las medidas son más flexibles que las normas, su uso permite que una clase más grande de funciones sean integrables.

10.1.1 Definición Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable *generalizada*** en $[a, b]$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida δ_ε sobre $[a, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición fina-δ_ε de $[a, b]$, entonces

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L \right| < \varepsilon.$$

La colección de todas las funciones Riemann integrables generalizadas se denotará casi siempre por $\mathcal{R}^*[a, b]$.

Se demostrará que si $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, entonces el número L se encuentra determinado de manera única; se le llamará la **integral de Riemann generalizada de** f en $[a, b]$. Se demostrará asimismo que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y el valor de las dos integrales es el mismo. Por lo tanto, no será motivo de ambigüedad alguna si la integral de Riemann generalizada de $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ se denota también por los símbolos

$$\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)dx.$$

El primer resultado que se presenta establece la unicidad del valor de la integral de Riemann generalizada. Aun cuando su demostración es casi idéntica a la del teorema 7.1.2, se desarrollará a fin de ilustrar la forma en que se usan las medidas en vez de las normas de particiones.

10.1.2 Teorema de unicidad *Si* f $\in \mathcal{R}^*$[a, b], *entonces el valor de la integral está determinado de manera única.*

Demostración. Suponer que tanto L' como L'' satisfacen la definición y sea $\varepsilon > 0$. Por tanto, existe una medición $\delta'_{\varepsilon/2}$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_1$ es cualquier partición fina-$\delta'_{\varepsilon/2}$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}_1) - L'| < \varepsilon/2.$$

También existe una medición $\delta''_{\varepsilon/2}$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_2$ es cualquier partición fina-$\delta''_{\varepsilon/2}$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}_2) - L''| < \varepsilon/2.$$

Se define δ_ε por $\delta_\varepsilon(t) := \text{mín}\{\delta'_{\varepsilon/2}(t), \delta''_{\varepsilon/2}(t)\}$ para $t \in [a, b]$, de tal modo que δ_ε es una medida sobre $[a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición fina-δ_ε, entonces la partición $\dot{\mathcal{P}}$ es tanto fina-$\delta'_{\varepsilon/2}$ como fina-$\delta''_{\varepsilon/2}$, por lo que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon/2,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} |L' - L''| &\le |L' - S(f; \dot{\mathcal{P}})| + |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L''| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que $L' = L''$. Q.E.D.

Se demuestra a continuación que toda función f Riemann integrable es tambien Riemann integrable generalizada y con el mismo valor para la integral. Esto se hace utilizando una medida que es una *función constante*.

10.1.3 Teorema de conformidad *Si* f $\in \mathcal{R}$[a, b] *con integral* L, *entonces también* f $\in \mathcal{R}^*$[a, b] *con integral* L.

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, es necesario construir una medida apropiada sobre $[a, b]$. Puesto que $f \in \mathcal{R}[a, b]$, existe un número $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier

partición etiquetada con $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, entonces $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$. Se define la función $\delta_\varepsilon^*(t) := \frac{1}{4}\delta_\varepsilon$ para $t \in [a, b]$, de tal modo que δ_ε^* es una medida sobre $[a, b]$.

Si $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$, donde $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, es una partición fina-δ_ε^*, entonces como

$$I_i \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon^*(t_i), t_i + \delta_\varepsilon^*(t_i)] = [t_i - \tfrac{1}{4}\delta_\varepsilon, t_i + \tfrac{1}{4}\delta_\varepsilon],$$

fácilmente se nota que $0 < x_i - x_{i-1} \le \frac{1}{2}\delta_\varepsilon < \delta_\varepsilon$ para toda $i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto, esta partición también satisface $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$ y, en consecuencia, $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$.

Entonces toda partición fina-δ_ε^* en $\dot{\mathcal{P}}$ también satisface $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que f es Riemann integrable generalizada a L. Q.E.D.

Por los teoremas 7.2.5, 7.2.6 y 7.2.7, se concluye que: *toda función escalonada, toda función continua y toda función monótona pertenece a* $\mathcal{R}^*$[a, b]. Se demuestra a continuación que la función de Dirichlet, para la cual se demostró que no es Riemann integrable en 7.2.2b y 7.3.13d, es Riemann integrable *generalizada*.

10.1.4 Ejemplos **a)** La función de Dirichlet f pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$ y tiene integral 0.

Se enumeran los números racionales en $[0, 1]$ como $\{r_k\}_{k=1}^\infty$. Dada $\varepsilon > 0$, se definen $\delta_\varepsilon(r_k) := \varepsilon/2^{k+2}$ y $\delta_\varepsilon(x) := 1$ cuando x es irracional. Por lo tanto, δ_ε es una medida sobre $[0, 1]$, y si la partición $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ es fina-δ_ε, entonces se tiene $x_i - x_{i-1} \le 2\delta_\varepsilon(t_i)$. Puesto que las únicas contribuciones diferentes de cero a $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ provienen de las etiquetas racionales $t_i = r_k$, donde

$$0 < f(r_k)(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

y como cada una de estas etiquetas puede ocurrir a lo sumo en dos intervalos, se tiene

$$0 \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $f \in \mathcal{R}^*[0,1]$ y $\int_0^1 f = 0$.

b) Sea que $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$ esté definida por $H(1/k) := k$ para $k \in \mathbb{N}$ y $H(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$.

Puesto que H no está acotada en $[0, 1]$, del teorema de acotabilidad 7.1.5 se sigue que no es Riemann integrable en $[0, 1]$. Se demuestra a continuación que H es Riemann integrable *generalizada* a 0.

De hecho, dada $\varepsilon > 0$, se define $\delta_\varepsilon(1/k) := \varepsilon/(k2^{k+2})$ y se hace $\delta_\varepsilon(x) := 1$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$, de modo que δ_ε es una medida sobre $[0, 1]$. Si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición fina-δ_ε de $[0, 1]$, entonces $x_i - x_{i-1} \le 2\delta_\varepsilon(t_i)$. Puesto que las únicas contribuciones diferentes de cero a $S(H;\dot{\mathcal{P}})$ provienen de las etiquetas $t_i = 1/k$, donde

$$0 < H(1/k)(x_i - x_{i-1}) = k \cdot (x_i - x_{i-1}) \le k \cdot \frac{2\varepsilon}{k2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

y como cada una de estas etiquetas puede ocurrir a lo sumo en dos intervalos, se tiene

$$0 \le S(H;\dot{\mathcal{P}}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $H \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ y $\int_0^1 H = 0$. □

El siguiente resultado corresponde exactamente al teorema 7.1.4.

10.1.5 Teorema *Suponer que* f *y* g *están en* $\mathcal{R}^*[a, b]$. *Entonces:*

a) *Si* $k \in \mathbb{R}$, *la función* kf *está en* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *y*

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

b) *La función* f + g *está en* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

c) *Si* $f(x) \le g(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Demostración. **b)** Dada $\varepsilon > 0$, puede usarse el razonamiento de la demostración del teorema de unicidad 10.1.2 para construir una medida δ_ε sobre $[a, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición fina-δ_ε de $[a, b]$, entonces

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad \left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| < \varepsilon/2.$$

Puesto que $S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(g;\dot{\mathcal{P}})$, se infiere, como en la demostración del teorema 7.1.4b, que

$$\begin{aligned}\left|S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| &\le \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| + \left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $f + g \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y su integral es la suma de las integrales de f y g.

Las demostraciones de los incisos a) y c) son análogas y se le dejan al lector.

Q.E.D.

Cabría esperar que podría usarse un razonamiento similar al que se presentó en el teorema 7.1.5 para demostrar que una función en $\mathcal{R}^*[a, b]$ necesariamente está acotada. Sin embargo, *no* es éste el caso; de hecho, se ha encontrado ya una función no acotada en $\mathcal{R}^*[0, 1]$ en el ejemplo 10.1.4b y se encontrarán otros casos más adelante. Sin embargo, es un ejercicio ilustrativo para el lector determinar exactamente la parte de la demostración del teorema 7.1.5 donde ésta deja de ser válida para una función en $\mathcal{R}^*[a, b]$.

El criterio de Cauchy

Hay una forma análoga del criterio de Cauchy para funciones en $\mathcal{R}^*[a, b]$. Es importante porque elimina la necesidad de conocer el valor de la integral. Su demostración es en esencia la misma que la del teorema 7.2.1.

10.1.6 Criterio de Cauchy *Una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una medida* η_ε *sobre* $[a, b]$ *tal que si* $\dot{\mathcal{P}}$ *y* $\dot{\mathcal{Q}}$ *son particiones cualesquiera de* $[a, b]$ *que son finas-*η_ε*, entonces*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon.$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ con integral L, sea $\delta_{\varepsilon/2}$ una medida sobre $[a, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son particiones finas-$\delta_{\varepsilon/2}$ de $[a, b]$, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - L| < \varepsilon/2$$

Se hace $\eta_\varepsilon(t) := \delta_{\varepsilon/2}(t)$ para $t \in [a, b]$, de tal modo que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son finas-η_ε, entonces

$$\begin{aligned} |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| &\le |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| + |L - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea δ_n una medida sobre $[a, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son particiones que son finas-δ_n, entonces

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| < 1/n.$$

Puede suponerse que $\delta_n(t) \ge \delta_{n+1}(t)$ para toda $t \in [a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$; en caso contrario, se sustituye δ_n por la medida $\delta'_n(t) := \text{mín}\{\delta_1(t), \cdots, \delta_n(t)\}$ para toda $t \in [a, b]$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\dot{\mathcal{P}}_n$ una partición que sea fina-δ_n. Evidentemente, si $m > n$, entonces tanto $\dot{\mathcal{P}}_m$ como $\dot{\mathcal{P}}_n$ son finas-δ_n, de modo que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{P}}_m)| < 1/n \qquad \text{para } m > n. \tag{2}$$

Por consiguiente, la sucesión $(S(f; \dot{\mathcal{P}}_m))_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que converge a algún número A. Al tomar el límite en (2) cuando $m \to \infty$, se tiene

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - A| \le 1/n \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Para ver que A es la integral de Riemann generalizada de f, dada $\varepsilon > 0$, sea que $K \in \mathbb{N}$ satisfaga $K > 2/\varepsilon$. Si $\dot{\mathcal{Q}}$ es una partición fina-δ_K, entonces

$$\begin{aligned}|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - A| &\le |S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}}_k)| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}_k) - A| \\ &\le 1/K + 1/K < \varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ con integral A. Q.E.D.

10.1.7 Teorema de compresión *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existen las funciones* α_ε *y* ω_ε *en* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *con*

$$\alpha_\varepsilon(x) \le f(x) \le \omega_\varepsilon(x) \quad \textit{para toda } x \in [a, b]$$

y tales que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

La demostración de este resultado es exactamente similar a la del teorema 7.2.3 y se le dejará al lector.

El teorema de aditividad

Se presenta a continuación un resultado muy parecido al teorema 7.2.8. Su demostración es una modificación de la de ese teorema, pero como es un tanto técnica, quizá el lector prefiera omitirla en una primera lectura.

10.1.8 Teorema de aditividad *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y sea* $c \in (a, b)$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si sus restricciones a* $[a, c]$ *y* $[c, b]$ *son ambas Riemann integrables generalizadas. En este caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{3}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Suponer que la restricción f_1 de f a $[a, c]$ y la restricción f_2 de f a $[c, b]$ son Riemann integrables generalizadas a L_1 y L_2, respectivamente. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe una medida δ' sobre $[a, c]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_1$ es una partición fina-δ' de $[a, c]$ entonces $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/2$. También existe una medida δ'' sobre $[c, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}_2$ es una partición fina-δ'' de $[c, b]$ entonces $|S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/2$.

Se define ahora una medida-δ_ε sobre $[a, b]$ mediante

$$\delta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \text{mín}\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-t)\} & \text{para } t \in [a, c), \\ \text{mín}\{\delta'(c), \delta''(c)\} & \text{para } t = c, \\ \text{mín}\{\delta''(t), \frac{1}{2}(t-c)\} & \text{para } t \in (c, b]. \end{cases}$$

(Esta medida tiene la propiedad de que cualquier partición fina-δ_ε debe tener a c como etiqueta para cualquier subintervalo que contiene al punto c.)

Se demostrará que si $\dot{\mathcal{Q}}$ es cualquier partición fina-δ_ε de $[a, b]$, entonces existe una partición fina-δ' $\dot{\mathcal{Q}}_1$ de $[a, c]$ y una partición fina-δ'' $\dot{\mathcal{Q}}_2$ de $[c, b]$ tales que

$$S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1) + S(f_2; \dot{\mathcal{Q}}_2). \tag{4}$$

Caso (i) Si c es un punto de partición de $\dot{\mathcal{Q}}$, entonces pertenece a dos subintervalos de $\dot{\mathcal{Q}}$ y es la etiqueta de estos dos subintervalos. Si $\dot{\mathcal{Q}}_1$ consiste en la parte de $\dot{\mathcal{Q}}$ que tiene subintervalos en $[a, c]$, entonces $\dot{\mathcal{Q}}_1$ es fina-δ'. Del mismo modo, si $\dot{\mathcal{Q}}_2$ consiste en la parte de $\dot{\mathcal{Q}}$ que tiene subintervalos en $[c, b]$, entonces $\dot{\mathcal{Q}}_2$ es fina-δ''. Ahora es clara la relación (4).

Caso (ii) Si c no es un punto de partición de $\dot{\mathcal{Q}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^m$, entonces es la etiqueta de algún subintervalo, digamos de $[x_{k-1}, x_k]$. Ahora se reemplaza el par $([x_{k-1}, x_k], c)$ por los dos pares $([x_{k-1}, c], c)$ y $([c, x_k], c)$, y sean $\dot{\mathcal{Q}}_1$ y $\dot{\mathcal{Q}}_2$ las particiones etiquetadas de $[a, c]$ y $[c, b]$ que resultan. Puesto que $f(c)(x_k - x_{k-1}) = f(c)(c - x_{k-1}) + f(c)(x_k - c)$, se observa que la relación (4) también se cumple.

En cualquiera de los dos casos, la ecuación (4) y la desigualdad del triángulo implican que

$$\begin{aligned}|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| &= |S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) + S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2)) - (L_1 + L_2)| \\ &\leq |S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) - L_1| + |S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) - L_2|.\end{aligned}$$

Puesto que $\dot{\mathcal{Q}}_1$ es fina-δ' y $\dot{\mathcal{Q}}_2$ es fina-δ'', se concluye que

$$|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se infiere que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y que (3) se cumple.

($\Rightarrow$) Suponer que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y, dada $\varepsilon > 0$, sea que la medida η_ε satisfaga el criterio de Cauchy. Sea f_1 la restricción de f a $[a, c]$ y sean $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{Q}}_1$ particiones finas-η_ε de $[a, c]$. Al agregar puntos de partición y etiquetas adicionales de $[c, b]$, es posible extender $\dot{\mathcal{P}}_1$ y $\dot{\mathcal{Q}}_1$ a las particiones finas-η_ε $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ de $[a, b]$. Si se usan los *mismos* puntos y etiquetas adicionales de $[c, b]$ tanto para $\dot{\mathcal{P}}$ como para $\dot{\mathcal{Q}}$, entonces

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1).$$

Puesto que tanto $\dot{\mathcal{P}}$ como $\dot{\mathcal{Q}}$ son finas-η_ε, entonces $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1, \dot{\mathcal{Q}}_1)| < \varepsilon$ también se cumple. Por lo tanto, con la condición de Cauchy se establece que la restricción f_1 de f a $[a, c]$ está en $\mathcal{R}^*[a, c]$. Del mismo modo, la restricción f_2 de f a $[c, d]$ está en $\mathcal{R}^*[c, d]$.

La igualdad (3) se sigue ahora de la primera parte del teorema. Q.E.D.

Es sencillo ver que resultados exactamente similares a 7.2.9-7.2.12 se cumplen para la integral de Riemann generalizada. Sus enunciaciones se le dejan al lector, pero se usarán aquí con libertad.

El teorema fundamental (primera forma)

Se presentan a continuación las versiones de los teoremas fundamentales para la integral de Riemann generalizada. Se verá que la primera forma es *significativamente más sólida* que la de la integral de Riemann (ordinaria); de hecho, se

demuestra que la derivada de cualquier función pertenece automáticamente a $\mathcal{R}^*[a, b]$, por lo que la integrabilidad de la función pasa a ser una conclusión, en vez de una hipótesis.

10.1.9 El teorema fundamental del cálculo (primera forma) *Suponer que existe un conjunto **contable*** E *en* [a, b] *y las funciones* f, F : [a, b] → ℝ *tales que*:

a) F *es continua en* [a, b].
b) F′(x) = f(x) *para toda* x ∈ [a, b] \ E.

Entonces f *pertenece a* $\mathcal{R}^*$[a, b] *y*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{5}$$

Demostración. Se probará el teorema en el caso en que $E = \emptyset$, mientras que el caso general se deja para los ejercicios.

Por tanto, se supone que b) se cumple para toda $x \in [a, b]$. Puesto que quiere demostrarse que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, dada $\varepsilon > 0$, es necesario construir una medida δ_ε; esto se hará usando la derivabilidad de F en $[a, b]$. Si $t \in I$, dado que existe la derivada $f(t) = F'(t)$, existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que si $0 < |z - t| \le \delta_\varepsilon(t)$, $z \in [a, b]$, entonces

$$\left| \frac{F(z) - F(t)}{z - t} - f(t) \right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Si esta desigualdad se multiplica por $|z - t|$, se obtiene

$$|F(z) - F(t) - f(t)(z - t)| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon |z - t|$$

siempre que $z \in [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)] \cap [a, b]$. La función δ_ε es la medida que se buscaba.

Sea ahora $u, v \in [a, b]$ con $u < v$ que satisfacen $t \in [u, v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)]$. Si se suma y se resta el término $F(t) - f(t) \cdot t$ y se usa la desigualdad del triángulo y el hecho de que $v - t \ge 0$ y $t - u \ge 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} &|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| \\ &\le |F(v) - F(t) - f(t)(v - t)| + |F(t) - F(u) - f(t)(t - u)| \\ &\le \tfrac{1}{2}\varepsilon(v - t) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(t - u) = \tfrac{1}{2}\varepsilon(v - u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $t \in [u, v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)]$, entonces se tiene

$$|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| \le \tfrac{1}{2}\varepsilon(v - u). \tag{6}$$

Se demostrará que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ con integral dada por la suma telescópica

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \{F(x_i) - F(x_{i-1})\}. \tag{7}$$

Ahora bien, si la partición $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es fina-δ_ε, entonces

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon(t_i), t_i + \delta_\varepsilon(t_i)] \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n,$$

y en consecuencia pueden usarse (7), la desigualdad del triángulo y (6) para obtener

$$\begin{aligned} \left|F(b) - F(a) - S(f;P)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \left\{F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right\}\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{2}\varepsilon(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y se cumple la expresión (5). Q.E.D.

10.1.10 Ejemplos **a)** Si $H(x) := 2\sqrt{x}$ para $x \in [0, b]$, entonces H es continua en $[0, b]$ y $H'(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0, b]$. Se define $h(x) := H'(x)$ para $x \in (0, b]$ y $h(0) := 0$. Del teorema fundamental 10.1.9 con $E := \{0\}$ se sigue que h pertenece a $\mathcal{R}^*[0, b]$ y que $\int_0^b h = H(b) - H(0) = H(b)$, que se escribe como

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{b}.$$

b) En términos más generales, si $\alpha > 0$, sea $H_\alpha(x) := x^\alpha/\alpha = e^{\alpha \ln x}/\alpha$ para $x \in (0, b]$ y sea $H_\alpha(0) := 0$, por lo que H_α es continua en $[0, b]$ y $H'_\alpha(x) = x^{\alpha-1}$ para toda $x \in (0, b]$; ver 8.3.10 y 8.3.13. Se define $h_\alpha(x) := H'_\alpha(x)$ para $x \in (0, b]$ y $h_\alpha(0) := 0$.

Entonces el teorema 10.1.9 implica que $h_\alpha \in \mathcal{R}^*[0, b]$ y que $\int_0^b h_\alpha = H_\alpha(b) - H_\alpha(0) = H_\alpha(b)$, que se escribe como

$$\int_0^b x^{\alpha-1}\, dx = \frac{b^\alpha}{\alpha}.$$

c) Sea $L(x) := x \ln x - x$ para $x \in (0, b]$ y $L(0) := 0$. Entonces L es continua en $[0, b]$ (usar la regla de L'Hôpital en $x = 0$), y se observa que $L'(x) = \ln x$ para $x \in (0, b]$.

Del teorema 10.1.9, con $E = \{0\}$, se sigue que la función no acotada $l(x) := \ln x$ para $x \in (0, b]$ y $l(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{R}^*[0, b]$ y que $\int_0^b l = L(b) - L(0)$, que se escribe como

$$\int_0^b \ln x\, dx = b \ln b - b.$$

d) Sea $A(x) := \operatorname{arcsen} x$ para $x \in [-1, 1]$, por lo que A es continua en $[-1, 1]$, y $A'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ para $x \in (-1, 1)$. Se define $s(x) := A'(x)$ para $x \in (-1, 1)$ y sea $s(-1) = s(1) := 0$.

Entonces el teorema 10.1.9 con $E = \{-1, 1\}$ implica que $s \in \mathcal{R}^*[-1, 1]$ y que $\int_{-1}^{1} s = A(1) - A(-1) = \pi$ que se escribe como

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen}(-1) = \pi. \qquad \square$$

El teorema fundamental (segunda forma)

Se pasa ahora a la segunda forma del teorema fundamental, en la cual se quiere derivar la **integral indefinida** F de f, definida por:

$$F(z) := \int_a^z f(x)\,dx \qquad \text{para} \quad z \in [a,b]. \tag{8}$$

10.1.11 Teorema fundamental del cálculo (segunda forma) *Sea que* f *pertenezca a* $\mathcal{R}^*[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *y sea* F *la integral indefinida de* f. *Entonces se tiene:*

a) F *es continua en* [a, b].
b) *Existe un conjunto nulo* Z *tal que si* $\mathrm{x} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \setminus \mathrm{Z}$, *entonces* F *es derivable en* x *y* $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$.
c) *Si* f *es continua en* $\mathrm{c} \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, *entonces* $\mathrm{F}'(\mathrm{c}) = \mathrm{f}(\mathrm{c})$.

Demostración. Las demostraciones de los incisos a) y b) pueden encontrarse en [MTI]. La demostración del inciso c) es exactamente igual a la del teorema 7.3.5, excepto porque se usan los teoremas 10.1.8 y 10.1.5c. Q.E.D.

La conclusión del inciso b) puede reformularse como: *la integral indefinida* F *de* f *es derivable a* f *casi en todas partes en* $[a, b]$.

Teorema de sustitución

Considerando la simplicidad del teorema fundamental 10.1.9, es posible mejorar el teorema justificando la "fórmula de sustitución". El siguiente resultado constituye un fortalecimiento considerable del teorema 7.3.8. El lector deberá escribir las hipótesis en el caso $E_f = E_\varphi = E = \emptyset$.

10.1.12 Teorema de sustitución **a)** *Sean* $\mathrm{I} := [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *y* $\mathrm{J} := [\alpha, \beta]$, *y sean* $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *y* $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ *funciones continuas con* $\varphi(\mathrm{J}) \subseteq \mathrm{I}$.
b) *Suponer que existen los conjuntos* $\mathrm{E_f} \subset \mathrm{I}$ *y* $\mathrm{E}_\varphi \subset \mathrm{J}$ *tales que* $\mathrm{f(x)} = \mathrm{F}'(\mathrm{x})$ *para* $\mathrm{x} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{E}_\varphi$, *que* $\varphi'(\mathrm{t})$ *existe para* $\mathrm{t} \in \mathrm{J} \setminus \mathrm{E}_\varphi$ *y que* $\mathrm{E} := \varphi^{-1}(\mathrm{E_f}) \cup \mathrm{E}_\varphi$ *es contable.*
c) *Se hace* $\mathrm{f(x)} := 0$ *para* $\mathrm{x} \in \mathrm{E_f}$ *y* $\varphi'(\mathrm{t}) = 0$ *para* $\mathrm{t} \in \mathrm{E}_\varphi$.
Se concluye que $\mathrm{f} \in \mathcal{R}^*(\varphi(\mathrm{J}))$, *que* $(\mathrm{f} \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}^*(\mathrm{J})$ *y que*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi \Big|_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f. \tag{9}$$

Demostración. Puesto que φ es continua en J, el teorema 5.3.8 implica que $\varphi(J)$ es un intervalo cerrado en I. Asimismo, $\varphi^{-1}(E_f)$ es contable, de donde $E_f \cap \varphi(J) = \varphi(\varphi^{-1}(E_f))$ también es contable. Puesto que $f(x) = F'(x)$ para toda $x \in \varphi(J) \setminus E_f$, el teorema fundamental 10.1.9 implica que $f \in \mathcal{R}^*(\varphi(J))$ y que

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Si $t \in J \setminus E$, entonces $t \in J \setminus E_\varphi$ y $\varphi(t) \in I \setminus E_f$. Por consiguiente, la regla de la cadena 6.1.6 implica que

$$(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \qquad \text{para} \quad t \in J \setminus \text{E}.$$

Puesto que E es contable, el teorema fundamental implica que $(\text{f} \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}^*(J)$ y que

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

La conclusión se sigue igualando estos dos términos. Q.E.D.

10.1.13 Ejemplos **a)** Considerar la integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Puesto que el integrando no está acotado cuando $t \to 0+$, hay cierta duda acerca de la existencia de la integral. Además, en el ejercicio 7.3.19b se vio que el teorema 7.3.8 no se aplica con $\varphi(t) := \sqrt{t}$. Sin embargo, el teorema 10.1.12 sí se aplica.

De hecho, esta sustitución da como resultado $\varphi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ para $t \in (0, 4]$ y se hace $\varphi(0) := 0$. Si se hace $F(x) := 2 \text{ sen } x$, entonces $f(x) = F'(x) = 2 \cos x$ y el integrando tiene la forma

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \left(2\cos\sqrt{t}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \text{para} \quad t \neq 0.$$

Por tanto, el teorema de sustitución 10.1.12 con $E_\varphi := \{0\}$, $E_f := \emptyset$, $E := \{0\}$ implica que

$$\int_{t=0}^{t=4} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{x=0}^{x=2} 2\cos x\,dx = 2\,\text{sen}\,2.$$

b) Considerar la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$.

Obsérvese que este integrando no está acotado cuando $t \to 0+$ y cuando $t \to 1-$. Como en el inciso a), se hace $x = \varphi(t) := \sqrt{t}$ para $t \in [0, 1]$, de tal modo que

$\varphi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ para $t \in (0, 1]$. Puesto que $\sqrt{1-t} = \sqrt{1-x^2}$, el integrando asume la forma

$$\frac{2}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \varphi'(t),$$

la cual sugiere que $f(x) = 2/\sqrt{1-x^2}$ para $x \neq 1$. Por lo tanto, es necesario elegir $F(x) := 2$ arcsen x para $x \in [0, 1]$, ya que

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = F'(x) = (2 \operatorname{arcsen} x)' \qquad \text{para} \quad x \in [0,1).$$

Por consiguiente, se tiene $E_\varphi = \{0\}$ y $E_f = \{1\}$, de modo que $E = \{0, 1\}$ y del teorema de sustitución se obtiene

$$\int_{t=0}^{t=1} \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \operatorname{arcsen} x \Big|_0^1 = 2 \operatorname{arcsen} 1 = \pi. \qquad \square$$

En [MTI] se presentan otras formulaciones del teorema de sustitución.

El teorema de multiplicación

En el teorema 7.3.16 se vio que el producto de dos funciones Riemann integrables es Riemann integrable. Este resultado *no* se cumple para las funciones Riemann integrables generalizadas; ver los ejercicios 18 y 20. Sin embargo, se enuncia un teorema en esta dirección que con frecuencia resulta útil. Su demostración puede encontrarse en [MTI].

10.1.14 Teorema de multiplicación *Si* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *y si* g *es una función monótona en* $[a, b]$, *entonces el producto* $f \cdot g$ *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, b]$.

Integración por partes

La siguiente versión de la fórmula para la integración por partes resulta de utilidad.

10.1.15 Teorema de integración por partes *Sean* F *y* G *derivables en* $[a, b]$. *Entonces* $F'G$ *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si* FG' *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, b]$. *En este caso se tiene*

$$\int_a^b F'G = FG\Big|_a^b - \int_a^b FG'. \tag{10}$$

En la demostración se usa el teorema 6.1.3c; se le dejará al lector. En aplicaciones, por lo general se tiene $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Se advertirá que es necesario suponer que una de las funciones $fG = F'G$ y $Fg = FG'$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$.

El lector deberá comparar el siguiente resultado con el teorema 7.3.18. Adviértase que *no* es necesario suponer la integrabilidad de $f^{(n+1)}$.

10.1.16 Teorema de Taylor *Suponer que* f, f′, f‴, · · ·, $f^{(n)}$ *y* $f^{(n+1)}$ *existen en* [a, b]. *Entonces se tiene*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n, \tag{11}$$

donde el residuo está dado por

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\cdot(b-t)^n\, dt. \tag{12}$$

Demostración. Puesto que $f^{(n+1)}$ es una derivada, pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$. Además, ya que $t \mapsto (b - t)^n$ es monótona en $[a, b]$, el teorema de multiplicación 10.1.14 implica que la integral (12) existe. Al integrar por partes repetidamente, se obtiene (11). Q.E.D.

Ejercicios de la sección 10.1

1. Sea δ una medida sobre $[a, b]$ y sea $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición fina-δ de $[a, b]$.

a) Demostrar que $0 < x_i - x_{i-1} \le 2\delta(t_i)$ para $i = 1, \cdots, n$.

b) Si $\delta^* := \sup\{\delta(t) : t \in [a, b]\} < \infty$, demostrar que $\|\dot{\mathcal{P}}\| \le 2\delta^*$.

c) Si $\delta_* := \inf\{\delta(t) : t \in [a, b]\}$ satisface $\delta_* > 0$ y si $\dot{\mathcal{Q}}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ tal que se tiene $\|\dot{\mathcal{Q}}\| \le \delta_*$, demostrar que $\dot{\mathcal{Q}}$ es fina-δ.

d) Si $\varepsilon = 1$, demostrar que la medida δ_1 del ejemplo 10.1.4a tiene la propiedad de que $\inf\{\delta_1(t) : t \in [0, 1]\} = 0$.

2. a) Si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$, demostrar que cada etiqueta pertenece *a lo sumo* a dos subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$.

b) ¿Hay particiones etiquetadas en las que cada etiqueta pertenece exactamente a dos subintervalos?

3. Sea δ una medida sobre $[a, b]$ y sea $\dot{\mathcal{P}}$ una partición fina-δ de $[a, b]$.

a) Demostrar que existe una partición fina-δ $\dot{\mathcal{Q}}_1$ tal que: (i) ninguna etiqueta pertenece a dos subintervalos en $\dot{\mathcal{Q}}_1$, y (ii) $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f; \dot{\mathcal{P}})$ para cualquier función f en $[a, b]$.

b) ¿Existe una partición fina-δ $\dot{\mathcal{Q}}_2$ tal que: j) cada etiqueta pertenece a dos subintervalos en $\dot{\mathcal{Q}}_2$, y jj) $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) = S(f; \dot{\mathcal{P}})$ para cualquier función f en $[a, b]$?

c) Demostrar que existe una partición fina-δ $\dot{\mathcal{Q}}_3$ tal que: k) cada etiqueta es un punto terminal de su subintervalo, y kk) $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_3) = S(f; \dot{\mathcal{P}})$ para cualquier función f en $[a, b]$.

4. Si δ está definida en $[0, 2]$ por $\delta(t) := \frac{1}{2}|t - 1|$ para $x \neq 1$ y $\delta(1) := 0.01$, demostrar que toda partición fina-δ $\dot{\mathcal{P}}$ de $[0, 2]$ tiene a $t = 1$ como etiqueta de al menos un subintervalo y que la longitud total de los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ que tienen a 1 como etiqueta es menor o igual que 0.02.

5. a) Construir una medida δ sobre [0, 4] que fuerce a los números 1, 2, 3 a ser etiquetas de cualquier partición fina-δ de este intervalo.

   b) Dada una medida δ_1 sobre [0, 4], construir una medida δ_2 tal que toda partición fina-δ_2 de [0, 4]: i) tenga los números 1, 2, 3 en su colección de etiquetas, y ii) sea fina-δ_1.

6. Demostrar que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ con integral L si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida γ_ε en $[a, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada tal que $0 < x_i - x_{i-1} \le \gamma_\varepsilon(t_i)$ para $i = 1, \cdots, n$, entonces $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$. (Esto proporciona una forma alternativa, pero equivalente, para definir la integral de Riemann generalizada.)

7. Demostrar que las siguientes funciones pertenecen a $\mathcal{R}^*[0, 1]$ encontrando una función F_k que sea continua en [0, 1] y tal que $F_k' = f_k(x)$ para $x \in [0, 1] \setminus E_k$, para algún conjunto finito E_k.

   a) $f_1(x) := (x + 1)/\sqrt{x}$ para $x \in (0, 1]$ y $f_1(0) := 0$.
   b) $f_2(x) := x/\sqrt{1 - x}$ para $x \in [0, 1)$ y $f_2(1) := 0$.
   c) $f_3(x) := \sqrt{x} \ln x$ para $x \in (0, 1]$ y $f_3(0) := 0$.
   d) $f_4(x) := (\ln x)/\sqrt{x}$ para $x \in (0, 1]$ y $f_4(0) := 0$.
   e) $f_5(x) := \sqrt{(1 + x)/(1 - x)}$ para $x \in [0, 1)$ y $f_5(1) := 0$.
   f) $f_6(x) := 1/(\sqrt{x}\,\sqrt{2 - x})$ para $x \in (0, 1]$ y $f_6(0) := 0$.

8. Explicar por qué el razonamiento en el teorema 7.1.5 no se aplica para demostrar que una función $\mathcal{R}^*[a, b]$ está acotada.

9. Sea $f(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $f(0) := 0$; entonces f es continua excepto en $x = 0$. Demostrar que f no pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$. [*Sugerencia:* comparar f con $s_n(x) := 1$ en $(1/2, 1]$, $s_n(x) := 2$ en $(1/3, 1/2]$, $s_n(x) := 3$ en $(1/4, 1/3]$, $\cdots$, $s_n(x) := n$ en $[0, 1/n]$.]

10. Sea que $k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ esté definida por $k(x) := 0$ si $x \in [0, 1]$ es 0 o un número irracional y $k(m/n) := n$ si $m, n \in \mathbb{N}$ no tienen factores comunes además de 1. Demostrar que $k \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ con integral igual a 0. Demostrar también que k no es continua en ningún punto y que no está acotada en ningún subintervalo $[c, d]$ con $c < d$.

11. Sea f la función de Dirichlet en [0, 1] y sea $F(x) := 0$ para toda $x \in [0, 1]$. Puesto que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, demostrar que el teorema fundamental 10.1.9 implica que $f \in \mathcal{R}^*[0, 1]$.

12. Sea $M(x) := \ln |x|$ para $x \neq 0$ y $M(0) := 0$. Demostrar que $M'(x) = 1/x$ para toda $x \neq 0$. Explicar por qué no se sigue que $\int_{-2}^{2}(1/x)\,dx = \ln|-2| - \ln 2 = 0$.

13. Sea $L_1(x) := x \ln |x| - x$ para $x \neq 0$ y $L_1(0) := 0$, y sea $l_1(x) := \ln |x|$ si $x \neq 0$ y $l_1(0) := 0$. Si $[a, b]$ es cualquier intervalo, demostrar que $l_1 \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y que $\int_a^b \ln |x|\,dx = L_1(b) - L_1(a)$.

14. Sea $E := \{c_1, c_2, \cdots\}$ y sea F continua en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b] \setminus E$ y $f(c_k) := 0$. Quiere demostrarse que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y que la ecuación (5) se cumple.

   a) Dadas $\varepsilon > 0$ y $t \in [a, b] \setminus E$, sea que $\delta_\varepsilon(t)$ esté definida como en la demostración de 10.1.9. Elegir ahora $\delta_\varepsilon(c_k) > 0$ tal que si $|z - c_k| < \delta_\varepsilon(c_k)$ y $z \in [a, b]$, entonces $|F(z) - F(c_k)| < \varepsilon/2^{k+2}$.

b) Demostrar que si la partición $\dot{\mathcal{P}}$ es fina-δ_ε y tiene etiqueta $t_i = c_k$, entonces se tiene $|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon/2^{k+1}$.

c) Usar el razonamiento de 10.1.9 para obtener $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - (F(b) - F(a))| < \varepsilon(b - a + 1)$.

15. Demostrar que la función $g_1(x) := x^{-1/2}\text{sen}(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $g_1(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$. [*Sugerencia:* derivar $C_1(x) := x^{3/2}\cos(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $C_1(0) := 0$.]

16. Demostrar que la función $g_2(x) := (1/x)\text{sen}(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $g_2(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$. [*Sugerencia:* derivar $C_2(x) := x\cos(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $C_2(0) := 0$, y usar el resultado para la función coseno que corresponde al ejercicio 7.2.12.]

17. Usar el teorema de sustitución 10.1.12 para evaluar las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} (2t+1)\text{sgn}(t^2 + t - 2)\,dt = 6,$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{t}\,dt}{1+\sqrt{t}},$

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = 2\arctan 2,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$

18. Dar un ejemplo de una función $f \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ cuyo cuadrado f^2 no pertenezca a $\mathcal{R}^*[0, 1]$.

19. Sea $F(x) := x\cos(\pi/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $F(0) := 0$. Se verá que $f := F' \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ pero que su valor absoluto $|f| = |F'| \notin \mathcal{R}^*[0, 1]$. (Aquí $f(0) := 0$.)

a) Demostrar que F' y $|F'|$ son continuas en cualquier intervalo $[c, 1]$, $0 < c < 1$ y $f \in \mathcal{R}^*[0, 1]$.

b) Si $a_k := 2/(2k+1)$ y $b_k := 1/k$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces los intervalos $[a_k, b_k]$ no se traslapan y $1/k \le \int_{a_k}^{b_k} |f|$.

c) Puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge, entonces $|f| \notin \mathcal{R}^*[0, 1]$.

20. Sea f como en el ejercicio 19 y sea $m(x) := (-1)^k$ para $x \in [a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ y $m(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. Demostrar que $m \cdot f = |m \cdot f|$. Usar el ejercicio 7.2.11 para demostrar que las funciones acotadas m y $|m|$ pertenecen a $\mathcal{R}[0, 1]$. Concluir que el producto de una función en $\mathcal{R}^*[0, 1]$ y una función acotada en $\mathcal{R}[0, 1]$ pueden no pertenecer a $\mathcal{R}^*[0, 1]$.

21. Sea $\Phi(x) := x|\cos(\pi/x)|$ para $x \in (0, 1]$ y sea $\Phi(0) := 0$. Entonces Φ es continua en $[0, 1]$ y $\Phi'(x)$ existe para $x \notin E := \{0\} \cup \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, donde $a_k := 2/(2k+1)$. Sea $\varphi(x) := \Phi'(x)$ para $x \notin E$ y $\varphi(x) := 0$ para $x \in E$. Demostrar que φ no está acotada en $[0, 1]$. Usando el teorema fundamental 10.1.9 con E *contable*, concluir que $\varphi \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ y que $\int_a^b \varphi = \Phi(b) - \Phi(a)$ para $a, b \in [0, 1]$. Como en el ejercicio 19, demostrar que $|\varphi| \notin \mathcal{R}^*[0, 1]$.

22. Sea $\Psi(x) := x^2|\cos(\pi/x)|$ para $x \in (0, 1]$ y $\Psi(0) := 0$. Entonces Ψ es continua en $[0, 1]$ y $\Psi'(x)$ existe para $x \notin E_1 := \{a_k\}$. Sea $\psi(x) := \Psi'(x)$ para $x \notin E_1$ y $\psi(x) := 0$ para $x \in E_1$. Demostrar que ψ está *acotada* en $[0, 1]$ y (usando el ejercicio 7.2.11) que $\psi \in \mathcal{R}[0, 1]$. Demostrar que $\int_a^b \psi = \Psi(b) - \Psi(a)$ para $a, b \in [0, 1]$. Demostrar también que $|\psi| \in \mathcal{R}[0, 1]$.

23. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y si $p \in \mathcal{R}^*[a, b]$ no cambia de signo en $[a, b]$, y si $fp \in \mathcal{R}^*[a, b]$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fp = f(\xi)\int_a^b p$. (Ésta es una generalización del ejercicio 7.2.16; se le llama el *primer teorema del valor medio* para integrales.)

24. Sea $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, sea g monótona en $[a, b]$ y suponer que $f \ge 0$. Entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f$. (Ésta es una forma del *segundo teorema del valor medio* para integrales.)

SECCIÓN 10.2 Integrales impropias y de Lebesgue

En el teorema 7.1.5 se vio que una función f en $\mathcal{R}[a, b]$ debe estar acotada en $[a, b]$ (aunque *no es* necesariamente éste el caso para una función en $\mathcal{R}^*[a, b]$). Para integrar ciertas funciones que tienen límites infinitos en un punto c en $[a, b]$, o que son en alto grado oscilatorias en dicho punto, en cálculo se aprende a tomar los límites de las integrales en subintervalos, cuando los puntos terminales de estos subintervalos tienden al punto c.

Por ejemplo, la función $h(x) := 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0, 1]$ y $h(0) := 0$ no está acotada en una vecindad del punto terminal *izquierdo* de $[0, 1]$. Sin embargo, sí pertenece a $\mathcal{R}[\gamma, 1]$ para toda $\gamma \in (0, 1]$ y se define la "integral impropia de Riemann" de h en $[0, 1]$ como el límite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{\gamma \to 0+} \int_\gamma^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

La función oscilatoria $k(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $k(0) := 0$ se trataría del mismo modo.

Una función que se vuelve no acotada, o que es en alto grado oscilatoria, en el punto terminal *derecho* del intervalo se maneja de una manera similar. Además, si una función g no está acotada, o es en alto grado oscilatoria, cerca de alguna $c \in (a, b)$, entonces se define la "integral impropia de Riemann" como

$$\int_a^b g := \lim_{\alpha \to c-} \int_a^\alpha g + \lim_{\beta \to c+} \int_\beta^b g. \tag{1}$$

Estos procesos de tomar límites no son necesarios cuando se trabaja con la integral de Riemann *generalizada*.

Por ejemplo, en el ejemplo 10.1.10a se vio que si $H(x) := 2\sqrt{x}$ para $x \in [0, 1]$, entonces $H'(x) = 1/\sqrt{x} := h(x)$ para $x \in (0, 1]$ y el teorema fundamental 10.1.9 afirma que $h \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ y que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = H(1) - H(0) = 2.$$

Este ejemplo es un caso de un notable teorema debido a Heinrich Hake, el cual se enuncia a continuación para el caso en que la función se vuelve no acotada o es oscilatoria cerca del punto terminal *derecho* del intervalo.

10.2.1 Teorema de Hake *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si para toda* $\gamma \in (a, b)$ *la restricción de* f *a* $[a, \gamma]$ *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, \gamma]$ *y*

$$\lim_{\gamma \to b-} \int_a^\gamma f = A \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

En este caso, $\int_a^b f = A$.

La idea de la demostración de la parte ($\Leftarrow$) de este resultado es tomar una sucesión creciente (γ_n) que converja a b de tal modo que $f \in \mathcal{R}^*[a, \gamma_n]$ y $\lim_n \int_a^{\gamma_n} f = A$. Para demostrar que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, es necesario construir medidas sobre $[a, b]$. Esto se hace "pegando" con todo cuidado las medidas que funcionen para los intervalos $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ a fin de obtener una medida sobre $[a, b]$. Puesto que los detalles de esta construcción son un tanto complicados y no particularmente ilustrativos, no se desarrollan aquí sino que se remite al lector a [MTI].

Es importante entender la importancia del teorema de Hake.

- Implica que la integral de Riemann generalizada *no puede extenderse tomando límites* como en (2). De hecho, si una función f tiene la propiedad de que su restricción a cada subintervalo $[a, \gamma]$, donde $\gamma \in (a\ b)$, es Riemann integrable generalizada y tal que (2) se cumple, entonces f *ya* pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$. Una manera alternativa de expresar este hecho es que *no es necesario extender* la integral de Riemann generalizada tomando dichos límites.
- La integrabilidad de una función en $[a, b]$ puede investigarse examinando su comportamiento en subintervalos $[a, \gamma]$ con $\gamma < b$. Puesto que suele ser difícil establecer que una función está en $\mathcal{R}^*[a, b]$ utilizando la definición 10.1.1, este hecho proporciona otra herramienta para demostrar que una función es Riemann integrable generalizada en $[a, b]$.
- Con frecuencia es útil evaluar la integral de una función usando (2).

Se usarán estas observaciones para dar un importante ejemplo que permite profundizar en el conjunto de las funciones Riemann integrables generalizadas.

10.2.2 Ejemplo **a)** Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie cualquiera de números reales que converge a $A \in \mathbb{R}$. Se construirá una función $\varphi \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

De hecho, se define $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como la función que asume los valores $2a_1$, $2^2 a_2$, $2^3 a_3, \cdots$, en los intervalos $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}), \cdots$. (Véase la figura 10.2.1.) Por conveniencia, sea $c_k := 1 - 1/2^k$ para $k = 0, 1, \cdots$; entonces

$$\varphi(x) := \begin{cases} 2^k a_k & \text{para} \quad c_{k-1} \leq x < c_k \ (k \in \mathbb{N}), \\ 0 & \text{para} \quad x = 1. \end{cases}$$

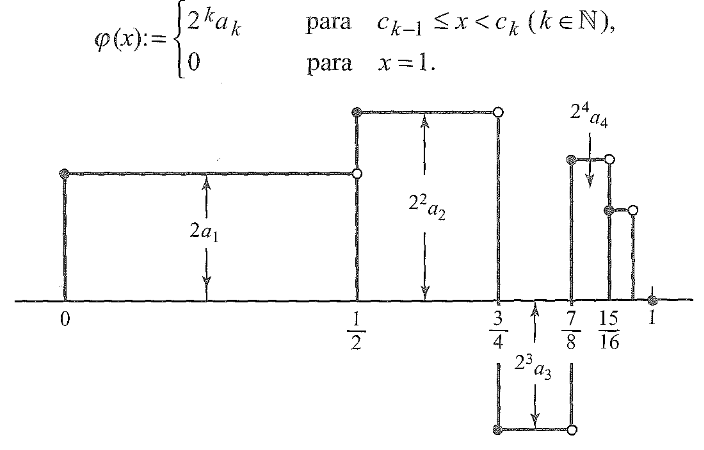


Figura 10.2.1 La gráfica de φ.

Evidentemente, la restricción de φ a cada intervalo $[0, \gamma]$ para $\gamma \in (0, 1)$ es una función escalonada y por lo tanto es integrable. De hecho, si $\gamma \in [c_n, c_{n+1})$, entonces

$$\int_0^\gamma \varphi = (2a_1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + (2^2 a_2)\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + (2^n a_n)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right) + r_\gamma$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + r_\gamma ,$$

donde $|r_\gamma| \le |a_{n+1}|$. Pero como la serie es convergente, entonces $r_\gamma \to 0$ y por tanto

$$\lim_{\gamma\to 1-} \int_0^\gamma \varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k = A.$$

b) Si la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ es *absolutamente convergente* en el sentido de la definición 9.1.1, entonces se sigue como en el inciso a) que la función $|\varphi|$ también pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$ y que

$$\int_0^1 |\varphi| = \sum_{k=1}^\infty |a_k|.$$

Sin embargo, si la serie $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ no es convergente, entonces la función $|\varphi|$ no pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$.

Puesto que hay muchas series convergentes que no son absolutamente convergentes (por ejemplo, $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k/k$), se tienen ejemplos de *funciones que pertenecen a* $\mathcal{R}^*[0, 1]$ *pero cuyos valores absolutos no pertenecen a* $\mathcal{R}^*[0, 1]$. Se han encontrado ya tales funciones en los ejercicios 10.1.19 y 10.1.21. □

El hecho de que hay funciones Riemann integrables generalizadas cuyo valor absoluto no es Riemann integrable generalizado suele resumirse diciendo que la integral de Riemann generalizada no es una "integral absoluta". Así, al pasar a la integral de Riemann generalizada se pierde una importante propiedad de la integral de Riemann (ordinaria). Pero es el precio que debe pagarse para poder integrar una clase mucho más grande de funciones.

Funciones Lebesgue integrables

En vista de la importancia del subconjunto de funciones en $\mathcal{R}^*[a, b]$ cuyos valores absolutos pertenecen también a $\mathcal{R}^*[a, b]$, se introduce la siguiente definición.

10.2.3 Definición Se dice que una función $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ tal que $|f| \in \mathcal{R}^*[a, b]$ es **Lebesgue integrable** en $[a, b]$. La colección de todas las funciones Lebesgue integrables en $[a, b]$ se denota por $\mathcal{L}[a, b]$.

Nota La colección de todas las funciones Lebesgue integrables suele introducirse de manera *totalmente diferente*. Una de las ventajas de la integral de Riemann generalizada es que incluye la colección de las funciones Lebesgue integrables como una colección especial –y fácilmente identificable– de funciones.

Es evidente que si $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y si $f(x) \ge 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces se tiene $|f| = f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, por lo que $f \in \mathcal{L}[a, b]$. Es decir, la función no negativa

$f \in R^*[a, b]$ pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$. El siguiente resultado ofrece un criterio más sólido para una función en $\mathcal{R}^*[a, b]$ que pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$.

10.2.4 Criterio de comparación *Si* $f, \omega \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *y* $|f(x)| \leq \omega(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces* $f \in \mathcal{L}[a, b]$ *y*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \omega. \tag{3}$$

Demostración parcial. El hecho de que $|f| \in \mathcal{R}^*[a, b]$ se demuestra en [MTI]. Puesto que $|f| \geq 0$, esto implica que $f \in \mathcal{L}[a, b]$.

Para establecer (3), se observa que $-|f| \leq f \leq |f|$, y 10.1.5c implica que

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

de donde se sigue la primera desigualdad de (3). La segunda desigualdad se sigue de otra aplicación de 10.1.5c. Q.E.D.

El siguiente resultado establece que los múltiplos constantes y la sumas de funciones en $\mathcal{L}[a, b]$ también pertenecen a $\mathcal{L}[a, b]$.

10.2.5 Teorema *Si* $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$ *y si* $c \in \mathbb{R}$, *entonces* cf *y* $f + g$ *también pertenecen a* $\mathcal{L}[a, b]$. *Además*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b |f+g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|. \tag{4}$$

Demostración. Puesto que $|cf(x)| = |c||f(x)|$ para toda $x \in [a, b]$, la hipótesis de que $|f|$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$ implica que cf y $|cf|$ también pertenecen a $\mathcal{R}^*[a, b]$, de donde $cf \in \mathcal{L}[a, b]$.

La desigualdad del triángulo implica que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ para toda $x \in [a, b]$. Pero puesto que $\omega := |f| + |g|$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$, el criterio de comparación 10.2.4 implica que $f + g$ pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$ y que

$$\int_a^b |f+g| \leq \int_a^b (|f| + |g|) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g|.$$ Q.E.D.

El siguiente resultado afirma que basta establecer una desigualdad por un lado a fin de demostrar que una función $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ pertenece en realidad a $\mathcal{L}[a, b]$.

10.2.6 Teorema *Si* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $f \in \mathcal{L}[a, b]$.
b) *Existe* $\omega \in \mathcal{L}[a, b]$ *tal que* $f(x) \leq \omega(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$.
c) *Existe* $\alpha \in \mathcal{L}[a, b]$ *tal que* $\alpha(x) \leq f(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Sea $\omega := f$.

b) $\Rightarrow$ a) Obsérvese que $f = \omega - (\omega - f)$. Puesto que $\omega - f \geq 0$ y dado que $\omega - f$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$, se sigue que $\omega - f \in \mathcal{L}[a, b]$. Ahora se aplica el teorema 10.2.5.

Se le deja al lector demostrar que a) $\Leftrightarrow$ c). Q.E.D.

10.2.7 Teorema *Si* f, g $\in \mathcal{L}[a, b]$, *entonces las funciones* máx{f, g} *y* mín{f, g} *también pertenecen a* $\mathcal{L}[a, b]$.

Demostración. Del ejercicio 2.2.16 se sigue que si $x \in [a, b]$, entonces

$$\text{máx}\{f(x), g(x)\} = \tfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),$$
$$\text{mín}\{f(x), g(x)\} = \tfrac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|).$$

Las afirmaciones se siguen de estas ecuaciones y del teorema 10.2.5. Q.E.D.

De hecho, el resultado precedente da una útil conclusión acerca del máximo y del mínimo de dos funciones en $\mathcal{R}^*[a, b]$.

10.2.8 Teorema *Suponer que* f, g, α *y* ω *pertenecen a* $\mathcal{R}^*[a, b]$. *Si*

$$f \le \omega,\ g \le \omega \quad o\ si \quad \alpha \le f,\ \alpha \le g,$$

entonces máx{f, g} *y* mín{f, g} *también pertenecen a* $\mathcal{R}^*[a, b]$.

Demostración. Suponer que $f \le \omega$ y que $g \le \omega$; entonces máx$\{f, g\} \le \omega$. De la primera desigualdad de la demostración del teorema 10.2.7 se sigue que

$$0 \le |f - g| = 2\ \text{máx}\{f, g\} - f - g \le 2\omega - f - g.$$

Puesto que $2\omega - f - g \ge 0$, esta función pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$. El criterio de comparación 10.2.4 implica que 2 máx$\{f, g\} - f - g$ pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$ y en consecuencia máx$\{f, g\}$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$.

La segunda parte de la afirmación se demuestra de manera similar. Q.E.D.

La seminorma en $\mathcal{L}[a, b]$

Se define a continuación la "seminorma" de una función en $\mathcal{L}[a, b]$ y la "distancia entre" dos funciones.

10.2.9 Definición Si $f \in \mathcal{L}[a, b]$, se define la **seminorma** de f como

$$\| f \| := \int_a^b |f|.$$

Si $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$, se define la **distancia entre** f y g como

$$\text{dist}(f, g) := \| f - g \| = \int_a^b |f - g|.$$

Se establecen ahora algunas propiedades de las funciones seminorma y distancia.

10.2.10 Teorema *La función seminorma satisface:*

(i) $\|f\| \geq 0$ *para toda* $f \in \mathcal{L}[a, b]$.
(ii) *Si* $f(x) = 0$ *para* $x \in [a, b]$, *entonces* $\|f\| = 0$.
(iii) *Si* $f \in \mathcal{L}[a, b]$ *y* $c \in \mathbb{R}$, *entonces* $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.
(iv) *Si* $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$, *entonces* $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Demostración. Los incisos (i)-(iii) son inmediatos. El inciso (iv) se sigue del hecho de que $|f + g| \leq |f| + |g|$ y del teorema 10.1.5c. Q.E.D.

10.2.11 Teorema *La función distancia satisface:*

(j) $\text{dist}(f, g) \geq 0$ *para toda* $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$.
(jj) *Si* $f(x) = g(x)$ *para* $x \in [a, b]$, *entonces* $\text{dist}(f, g) = 0$.
(jjj) $\text{dist}(f, g) = \text{dist}(g, f)$ *para toda* $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$.
(jv) $\text{dist}(f, h) \leq \text{dist}(f, g) + \text{dist}(g, h)$ *para toda* $f, g, h \in \mathcal{L}[a, b]$.

Las afirmaciones se siguen de las afirmaciones correspondientes del teorema 10.2.10. Sus demostraciones se le dejarán al lector.

Utilizando la seminorma (o la función distancia) es posible definir lo que se entiende al decir que una sucesión de funciones (f_n) en $\mathcal{L}[a, b]$ converge a una función $f \in \mathcal{L}[a, b]$; a saber, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon)$ tal que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\| f_n - f \| = \text{dist}(f_n, f) < \varepsilon.$$

Esta noción de convergencia puede utilizarse exactamente como se ha usado la función distancia en $\mathbb{R}$ para la convergencia de sucesiones de números reales.

Se concluye esta sección con una enunciación del teorema de completez para $\mathcal{L}[a, b]$ (llamado también teorema de Riesz-Fischer). Desempeña el mismo papel en el espacio $\mathcal{L}[a, b]$ que la propiedad de completez desempeña en $\mathbb{R}$.

10.2.12 Teorema de completez *Una sucesión* (f_n) *de funciones en* $\mathcal{L}[a, b]$ *converge a una función* $f \in \mathcal{L}[a, b]$ *si y sólo si tiene la propiedad de que para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $H(\varepsilon)$ *tal que si* $m, n \geq H(\varepsilon)$ *entonces*

$$\| f_m - f_n \| = \text{dist}(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

Es muy sencillo demostrar la dirección ($\Rightarrow$) y se deja como ejercicio. La demostración de la dirección ($\Leftarrow$) es más complicada, pero puede basarse en la siguiente idea: hallar una subsucesión $(g_k) := (f_{n_k})$ de (f_n) tal que $\|g_{k+1} - g_k\| < 1/2^k$ y definir $f(x) := g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$, donde esta serie es absolutamente convergente, y $f(x) := 0$ en cualquier otro punto. Entonces puede demostrarse que $f \in \mathcal{L}[a, b]$ y que $\|f_n - f\| \to 0$. (Los detalles se presentan en [MTI].)

Ejercicios de la sección 10.2

1. Demostrar que el teorema de Hake 10.2.1 puede expresarse en la siguiente formulación en términos de sucesiones: una función $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ si y sólo si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que cualquier sucesión creciente (c_n) en (a, b) con $c_n \to b$, entonces $f \in \mathcal{R}^*[a, c_n]$ y $\int_a^{c_n} f \to A$.

2. a) Aplicar el teorema de Hake para concluir que $g(x) := 1/x^{2/3}$ para $x \in (0, 1]$ y $g(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$.
   b) Explicar por qué el teorema de Hake no se aplica a $f(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $f(0) := 0$ (función que no pertenece a $\mathcal{R}^*[0, 1]$).

3. Aplicar el teorema de Hake a $g(x) := (1 - x)^{-1/2}$ para $x \in [0, 1)$ y $g(1) := 0$.

4. Suponer que $f \in \mathcal{R}^*[a, c]$ para toda $c \in (a, b)$ y que existen $\gamma \in (a, b)$ y $\omega \in \mathcal{L}[\gamma, b]$ tales que $|f(x)| \le \omega(x)$ para $x \in [\gamma, b]$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$.

5. Demostrar que la función $g_1(x) := x^{-1/2}\text{sen}(1/x)$ para $x \in (0, 1]$ y $g_1(0) := 0$ pertenece a $\mathcal{L}[0, 1]$. (Esta función se consideró también en el ejercicio 10.1.15.)

6. Demostrar que las siguientes funciones (definidas apropiadamente cuando sea necesario) están en $\mathcal{L}[0, 1]$.

   a) $\dfrac{x \ln x}{1 + x^2}$, b) $\dfrac{\text{sen}\, \pi x}{\ln x}$,

   c) $(\ln x)(\ln(1 - x))$, d) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

7. Determinar si las siguientes integrales son convergentes o divergentes. (Definir los integrandos como 0 en caso de que no estén ya definidos.)

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}\, x\, dx}{x^{3/2}}$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x\, dx}{x^{3/2}}$,

   c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$, d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{1 - x}$,

   e) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)(\text{sen}(1/x))\, dx$, f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$.

8. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, demostrar que $f \in \mathcal{L}[a, b]$.

9. Si $f \in \mathcal{L}[a, b]$, demostrar que f^2 no está necesariamente en $\mathcal{L}[a, b]$.

10. Si $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$ y si g está acotada y es monótona, demostrar que $fg \in \mathcal{L}[a, b]$. Con mayor precisión, si $|g(x)| \le B$, demostrar que $\|fg\| \le B\|f\|$.

11. a) Dar un ejemplo de una función $f \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ tal que $\text{máx}\{f, 0\}$ no pertenezca a $\mathcal{R}^*[0, 1]$.
    b) ¿Puede dar un ejemplo de $f \in \mathcal{L}[0, 1]$ tal que $\text{máx}\{f, 0\} \notin \mathcal{L}[0, 1]$?

12. Desarrollar los detalles de la demostración de que $\text{mín}\{f, g\} \in \mathcal{R}^*[a, b]$ en el teorema 10.2.8 cuando $\alpha \le f$ y $\alpha \le g$.

13. Desarrollar los detalles de las demostraciones del teorema 10.2.11.

14. Dar una función $f \in \mathcal{L}[a, b]$ donde f no sea idénticamente 0, pero tal que $\|f\| = 0$.

15. Si $f, g \in \mathcal{L}[a, b]$, demostrar que $\big|\, \|f\| - \|g\| \,\big| \le \|f \pm g\|$.

16. Establecer la parte sencilla del teorema de completez 10.2.12.

17. Si $f_n(x) := x^n$ para $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $f_n \in \mathcal{L}[0, 1]$ y que $\|f_n\| \to 0$. Por tanto, $\|f_n - \theta\| \to 0$, donde θ denota la función idénticamente igual a 0.

18. Sea $g_n(x) := -1$ para $x \in [-1, -1/n)$, sea $g_n(x) := nx$ para $x \in [-1/n, 1/n]$ y sea $g_n(x) := 1$ para $x \in (1/n, 1]$. Demostrar que $\|g_m - g_n\| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, de modo que el teorema de completez 10.2.12 implica que existe $g \in \mathcal{L}[-1, 1]$ tal que (g_n) converge a g en $\mathcal{L}[-1, 1]$. Encontrar una función g así.

19. Sea $h_n(x) := n$ para $x \in (0, 1/n)$ y $h_n(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. ¿Existe $h \in \mathcal{L}[0, 1]$ tal que $\|h_n - h\| \to 0$?

20. Sea $k_n(x) := n$ para $x \in (0, 1/n^2)$ y $k_n(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 1]$. ¿Existe $k \in \mathcal{L}[0, 1]$ tal que $\|k_n - k\| \to 0$?

SECCIÓN 10.3 Intervalos infinitos

En las dos secciones anteriores se examinó la integración de funciones definidas en intervalos $[a, b]$ cerrados *acotados*. Sin embargo, en las aplicaciones con frecuencia se quiere integrar funciones definidas en intervalos cerrados no acotados, tales como

$$[a, \infty), \qquad (-\infty, b], \qquad \text{o} \qquad (-\infty, \infty).$$

En cálculo, el enfoque convencional es definir una integral en $[a, \infty)$ como un límite:

$$\int_a^\infty f := \lim_{\gamma \to \infty} \int_a^\gamma f,$$

y definir las integrales en los otros intervalos infinitos de manera similar. En esta sección se abordan las funciones Riemann integrables generalizadas (y Lebesgue integrables) definidas en intervalos infinitos.

Al definir la integral de Riemann generalizada de una función f en $[a, \infty)$, se adoptará un procedimiento un tanto diferente al del cálculo. Se observa que si $\dot{\mathcal{Q}} := \{([x_0, x_1], t_1), \cdots, ([x_{n-1}, x_n], t_n), ([x_n, \infty], t_{n+1})\}$ es una partición etiquetada de $[a, \infty]$, entonces $x_0 = a$ y $x_{n+1} = \infty$ y la suma de Riemann que corresponde a $\dot{\mathcal{Q}}$ tiene la forma

$$f(t_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) + f(t_{n+1})(\infty - x_n). \tag{1}$$

Puesto que el término final $f(t_{n+1})(\infty - x_n)$ en (1) no tiene sentido, uno querría suprimirlo. Esto puede hacerse de dos manera diferentes: (i) la suma de Riemann se define de tal modo que contenga sólo los n primeros términos, o (ii) contar con un procedimiento que permita tratar los símbolos $\pm\infty$ en los cálculos de tal modo que se elimine el término final de (1).

Elegimos adoptar el método (i): en vez de tratar con particiones de $[a, \infty)$ en un número finito de intervalos no traslapados (uno de los cuales debe tener nece-

sariamente longitud infinita), se trata con ciertas **subparticiones** de $[a, \infty)$, que sean colecciones finitas de intervalos no traslapados de longitud finita cuya unión está contenida apropiadamente en $[a, \infty)$.

Se define una **medida** sobre $[a, \infty]$ como un par ordenado que consta de una función δ estrictamente positiva definida en $[a, \infty)$ y un número $d^* > 0$. Cuando se dice que una subpartición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_0, x_1], t_1), \cdots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ es **fina**-(δ, d^*), se entiende que

$$[a,\infty) = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \cup [x_n, \infty), \tag{2}$$

que

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad \text{para } i = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

y que

$$[x_n, \infty) \subseteq [1/d^*, \infty) \tag{4}$$

o, de manera equivalente, que

$$1/d^* \le x_n. \tag{4'}$$

Nota Ordinariamente se considera que una medida sobre $[a, \infty]$ es una función δ estrictamente positiva con dominio $[a, \infty] := [a, \infty) \cup \{\infty\}$ donde $\delta(\infty) := d^*$.

Se define ahora la integral de Riemann generalizada en $[a, \infty)$.

10.3.1 Definición **a)** Se dice que una función $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable generalizada** si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida δ_ε sobre $[a, \infty]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier subpartición etiquetada fina-δ_ε de $[a, \infty)$, entonces $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| \le \varepsilon$. En este caso se escribe $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ y

$$\int_a^\infty f := A.$$

b) Se dice que una función $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es **Lebesgue integrable** si tanto f como $|f|$ pertenecen a $\mathcal{R}^*[a, \infty)$. En este caso se escribe $f \in \mathcal{L}[a, \infty)$.

Es de particular importancia la versión del teorema de Hake para funciones en $\mathcal{R}^*[a, \infty)$. Otros resultados para funciones en $\mathcal{L}[a, \infty)$ se presentan en los ejercicios.

10.3.2 Teorema de Hake *Si* $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$, *entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ *si y sólo si para toda* $\gamma \in (a, \infty)$ *la restricción de* f *a* $[a, \gamma]$ *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, \gamma]$ *y*

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_a^\gamma f = A \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

En este caso, $\int_a^\infty f = A$.

La idea de la demostración del teorema de Hake es como antes; los detalles se presentan en [MTI].

La integral de Riemann generalizada en el intervalo no acotado $[a, \infty)$ tiene las mismas propiedades que la integral en un intervalo acotado $[a, b]$ que se demostraron en la sección 10.1. Pueden obtenerse ya sea modificando las demostraciones dadas ahí o usando el teorema de Hake. Se presentan a continuación dos ejemplos.

10.3.3 Ejemplos **a)** Si $f, g \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$, entonces $f + g \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ y

$$\int_a^\infty (f+g) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g.$$

Si $\varepsilon > 0$ está dada, sea δ_f una medida sobre $[a, \infty]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es fina-δ_f, entonces $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^\infty f| \leq \varepsilon/2$ y existe una medida δ_g tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es fina-δ_g, entonces $|S(g; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^\infty g| \leq \varepsilon/2$. Sea ahora $\delta_\varepsilon(t) := \text{mín}\{\delta_f(t), \delta_g(t)\}$ para $t \in [a, \infty]$ y se aplica un razonamiento como el usado en la demostración de 10.1.5b.

b) Sea $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a, \infty)$. Entonces $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ si y sólo si sus restricciones a $[a, c]$ y $[c, \infty)$ son integrables. En este caso,

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f. \tag{6}$$

Se demostrará $(\Leftarrow)$ utilizando el teorema de Hake. Por hipótesis, la restricción de f a $[c, \infty)$ es integrable. Por lo tanto, el teorema de Hake implica que para toda $\gamma \in (c, \infty)$ la restricción de f a $[c, \gamma]$ es integrable y que

$$\int_c^\infty f = \lim_{\gamma \to \infty} \int_c^\gamma f.$$

Si se aplica el teorema de aditividad 10.1.8 al intervalo $[a, \gamma] = [a, c] \cup [c, \gamma]$, se concluye que la restricción de f a $[a, \gamma]$ es integrable y que

$$\int_a^\gamma f = \int_a^c f + \int_c^\gamma f,$$

de donde se sigue que

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_a^\gamma f = \int_a^c f + \lim_{\gamma \to \infty} \int_c^\gamma f = \int_a^c f + \int_c^\infty f.$$

Con otra aplicación del teorema de Hake se establece (6). □

10.3.4 Ejemplos **a)** Sea $\alpha > 1$ y sea $f_\alpha(x) := 1/x^\alpha$ para $x \in [1, \infty)$. Se demostrará que $f_\alpha \in \mathcal{R}^*[1, \infty)$.

De hecho, si $\gamma \in (1, \infty)$, entonces la restricción de f_α a $[1, \gamma]$ es continua y en consecuencia pertenece a $\mathcal{R}^*[1, \gamma]$. Además, se tiene

$$\int_1^\gamma \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha} \Big|_1^\gamma = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\gamma^{\alpha-1}}\right]$$

Pero como el último término tiende a $1/(\alpha - 1)$ cuando $\gamma \to \infty$, el teorema de Hake implica que $f_\alpha \in \mathcal{R}^*[1, \infty)$ y que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} \qquad \text{cuando} \quad \alpha > 1.$$

b) Sea $\sum_{k=1}^\infty a_k$ una serie de números reales que converge a $A \in \mathbb{R}$. Se construirá una función $s \in \mathcal{R}^*[0, \infty)$ tal que

$$\int_0^\infty s = \sum_{k=1}^\infty a_k = A.$$

De hecho, se define $s(x) := a_k$ para $x \in [k-1, k)$, $k \in \mathbb{N}$. Es evidente que la restricción de s a cada subintervalo $[0, \gamma]$ es una función escalonada y, en consecuencia, pertenece a $\mathcal{R}^*[0, \gamma]$. Además, si $\gamma \in [n, n+1)$, entonces

$$\int_0^\gamma s = a_1 + \cdots + a_n + r_\gamma,$$

donde $|r_\gamma| \le |a_{n+1}|$. Pero como la serie es convergente, entonces $r_\gamma \to 0$ y el teorema de Hake 10.3.2 implica que

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_0^\gamma s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n a_k = A.$$

c) Si la función s está definida como en el inciso b), entonces $|s|$ tiene el valor $|a_k|$ en el intervalo $[k-1, k)$, $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, s pertenece a $\mathcal{L}[0, \infty)$ si y sólo si la serie $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ es convergente; es decir, si y sólo si $\sum_{k=1}^\infty a_k$ es *absolutamente convergente*.

d) Sea $D(x) := (\operatorname{sen} x)/x$ para $x \in (0, \infty)$ y sea $D(0) := 1$. Se considerará la importante **integral de Dirichlet**:

$$\int_0^\infty D(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Puesto que la restricción de D a cada intervalo $[0, \gamma]$ es continua, esta restricción pertenece a $\mathcal{R}^*[0, \gamma]$. Para ver que $\int_a^\gamma D(x)\,dx$ tiene límite cuando $\gamma \to \infty$, se hace $0 < \beta < \gamma$. Una integración por partes indica que

$$\int_0^\gamma D(x)\,dx - \int_0^\beta D(x)\,dx = \int_\beta^\gamma \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\bigg|_\beta^\gamma - \int_\beta^\gamma \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Pero como $|\cos x| \le 1$, es un ejercicio demostrar que los términos anteriores tienden a 0 cuando $\beta < \gamma$ tiende a ∞. Por lo tanto, se aplica la condición de Cauchy, y el teorema de Hake implica que $D \in \mathcal{R}^*[0, \infty)$.

Sin embargo, en el ejercicio 13 se verá que $|D|$ *no* pertenece a $\mathcal{R}^*[0, \infty)$. Por tanto, la función D no pertenece a $\mathcal{L}[0, \infty)$. □

Se concluye esta discusión de las integrales en $[a, \infty)$ con una versión del teorema fundamental (primera forma).

10.3.5 Teorema fundamental *Suponer que* E *es un subconjunto contable de* [a, ∞) *y que* f, F : [a, ∞) → ℝ *son tales que*:

a) F *es continua en* [a, ∞) *y* $\lim_{x \to \infty} F(x)$ *existe*.

b) $F'(x) = f(x)$ *para toda* $x \in (a, \infty)$, $x \notin E$.

Entonces f *pertenece a* $\mathcal{R}^*[a, \infty)$ *y*

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{x \to \infty} F(x) - F(a). \tag{7}$$

Demostración. Si γ es cualquier número en (a, ∞), puede aplicarse el teorema fundamental 10.1.9 al intervalo $[a, \gamma]$ para concluir que f pertenece a $\mathcal{R}^*[a, \gamma]$ y

$$\int_a^{\gamma} f = F(\gamma) - F(a).$$

Al hacer $\gamma \to \infty$, por el teorema de Hake se concluye que $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ y que la ecuación (7) se cumple. Q.E.D.

Integrales en $(-\infty, b]$

Se examina ahora la integración en intervalos cerrados que no están acotados por abajo.

Sea $b \in \mathbb{R}$ y sea $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función que va a integrarse en el intervalo infinito $(-\infty, b]$. Por una **medida** sobre $[-\infty, b]$ se entiende un par ordenado que consta de un número $d_* > 0$ y una función estrictamente positiva δ en $(-\infty, b)$. Se dice que una subpartición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \cdots, ([x_{n-1}, b], t_n)\}$ de $(-\infty, b]$ es **fina**-(d_*, δ) en caso de que

$$(-\infty, b] = (-\infty, x_0] \cup \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i],$$

de que

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \qquad \text{para } i = 1, \cdots, n,$$

y de que

$$(-\infty, x_0] \subseteq (-\infty, -1/d_*]$$

o, de manera equivalente, de que

$$x_0 \leq -1/d_*.$$

Nota Ordinariamente se considera que una medida sobre $[-\infty, b]$ es una función δ estrictamente positiva con dominio $[-\infty, b] := \{-\infty\} \cup (\infty, b]$ donde $\delta(-\infty) := d_*$.

Aquí la suma de Riemann de g para $\dot{\mathcal{P}}$ es $S(g; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Por último, se dice que $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable generalizada** si existe $B \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida δ_ε sobre $(-\infty, b]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier subpartición fina-δ_ε de $(-\infty, b]$, entonces $|S(g; \dot{\mathcal{P}}) - B| \leq \varepsilon$. En este caso se escribe $g \in \mathcal{R}^*(-\infty, b]$ y

$$\int_{-\infty}^{b} g = B.$$

Del mismo modo, se dice que una función $g : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ es **Lebesgue integrable** si tanto g como $|g|$ pertenecen a $\mathcal{R}^*(-\infty, b]$. En este caso se escribe $g \in \mathcal{L}(-\infty, b]$.

Los teoremas válidos para la integral en $[a, \infty]$ se obtienen también en este caso. Su formulación se le dejará al lector.

Integrales en $(-\infty, \infty)$

Sea $h : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que quiere integrarse en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$. Por una **medida** sobre $(-\infty, \infty)$ se entienden tres elementos que consisten en una función δ estrictamente positiva en $(-\infty, \infty)$ y dos números estrictamente positivos d_*, d^*. Se dice que una subpartición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \cdots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ es **fina**-(d_*, δ, d^*) en caso de que

$$(-\infty, \infty) = (-\infty, x_0] \cup \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \cup [x_n, \infty),$$

de que

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \qquad \text{para } i = 1, \cdots, n,$$

y de que

$$(-\infty, x_0] \subseteq (-\infty, -1/d_*] \qquad \text{y} \qquad [x_n, \infty) \subseteq [1/d^*, \infty)$$

o, de manera equivalente, de que

$$x_0 \leq -1/d_* \qquad \text{y} \qquad 1/d^* \leq x_n.$$

Nota Ordinariamente se considera que una medida sobre $[-\infty, \infty]$ es una función δ estrictamente positiva con dominio $[-\infty, \infty] := \{-\infty\} \cup (\infty, \infty) \cup \{\infty\}$, donde $\delta(-\infty) := d_*$ y $\delta(\infty) := d^*$.

Aquí la suma de Riemann de h para $\dot{\mathcal{P}}$ es $S(h; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Por último, se dice que $h : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ es **Riemann integrable generalizada** si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida δ_ε sobre $[-\infty, \infty]$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier subpartición fina-δ_ε de $(-\infty, \infty)$, entonces $|S(h; \dot{\mathcal{P}}) - C| \leq \varepsilon$. En este caso se escribe $h \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} h = C.$$

Del mismo modo, se dice que una función $h : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ es **Lebesgue integrable** si tanto h como $|h|$ pertenecen a $\mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$. En este caso se escribe $h \in \mathcal{L}(-\infty, \infty)$.

En vista de su importancia, se enunciará la versión del teorema de Hake que es válida para la integral en $(-\infty, \infty)$.

10.3.6 Teorema de Hake *Si* $h : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, *entonces* $h \in \mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ *si y sólo si para toda* $\beta < \gamma$ *en* $(-\infty, \infty)$ *la restricción de* h *a* $[\beta, \gamma]$ *está en* $\mathcal{R}^*[\beta, \gamma]$ *y*

$$\lim_{\substack{\beta \to -\infty \\ \gamma \to +\infty}} \int_\beta^\gamma h = C \in \mathbb{R}.$$

En este caso, $\int_{-\infty}^{\infty} h = C.$

Como antes, la mayoría de los teoremas válidos para el intervalo finito $[a, b]$ se siguen cumpliendo. Se demuestran como ya se hizo, o utilizando el teorema de Hake. Se enuncia también la primera forma del teorema fundamental para este caso.

10.3.7 Teorema fundamental *Suponer que* E *es un subconjunto contable de* $(-\infty, \infty)$ *y que* $h, H : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ *satisfacen:*

a) H *es continua en* $(-\infty, \infty)$ *y los límites* $\lim_{x \to \pm\infty} H(x)$ *existen.*

b) $H'(x) = h(x)$ *para toda* $x \in (-\infty, \infty)$, $x \notin E$.

Entonces h *pertenece a* $\mathcal{R}^*(-\infty, \infty)$ *y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h = \lim_{x \to \infty} H(x) - \lim_{y \to -\infty} H(y). \tag{8}$$

10.3.8 Ejemplos **a)** Sea $h(x) := 1/(x^2 + 1)$ para $x \in (-\infty, \infty)$. Si se hace $H(x) := \arctan x$, entonces $H'(x) = h(x)$ para toda $x \in (-\infty, \infty)$. Además, se tiene $\lim_{x\to\infty} H(x) = \frac{1}{2}\pi$ y $\lim_{x \to -\infty} H(x) = -\frac{1}{2}\pi$. Por lo tanto, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \pi.$$

b) Sea $k(x) := |x|e^{-x^2}$ para $x \in (-\infty, \infty)$. Si se hace $K(x) := \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$ para $x \geq 0$ y $K(x) := -\frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$ para $x < 0$, entonces se ve que K es continua en $(-\infty, \infty)$ y que $K'(x) = k(x)$ para $x \neq 0$. Además, $\lim_{x \to \infty} K(x) = \frac{1}{2}$ y $\lim_{x \to -\infty} K(x) = -\frac{1}{2}$. Se sigue en consecuencia que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

□

Ejercicios de la sección 10.3

1. Sea δ una medida sobre $[a, \infty]$. Por el teorema 5.5.5, todo subintervalo acotado $[a, b]$ tiene una partición fina-δ. Demostrar que $[a, \infty]$ tiene una partición fina-δ.

2. Sea $f \in \mathcal{R}^*[a, \gamma]$ para toda $\gamma \geq a$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon) \geq a$ tal que si $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces $|\int_p^q f| < \varepsilon$.

3. Sea que f y $|f|$ pertenezcan a $\mathcal{R}^*[a, \gamma]$ para toda $\gamma \geq a$. Demostrar que $f \in \mathcal{L}[a, \infty)$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon) \geq a$ tal que si $q > p > K(\varepsilon)$ entonces $\int_p^q |f| < \varepsilon$.

4. Sea que f y $|f|$ pertenezcan a $\mathcal{R}^*[a, \gamma]$ para toda $\gamma \geq a$. Demostrar que $f \in \mathcal{L}[a, \infty)$ si y sólo si el conjunto $V := \{\int_x^a |f| : x \geq a\}$ está acotado en $\mathbb{R}$.

5. Si $f, g \in \mathcal{L}[a, \infty)$, demostrar que $f + g \in \mathcal{L}[a, \infty)$. Además, si $\|h\| := \int_a^\infty |h|$ para cualquier $h \in \mathcal{L}[a, \infty)$, demostrar que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

6. Si $f(x) := 1/x$ para $x \in [1, \infty)$, demostrar que $f \notin \mathcal{R}^*[1, \infty)$.

7. Si f es continua en $[1, \infty)$ y si $|f(x)| \leq K/x^2$ para $x \in [1, \infty)$, demostrar que $f \in \mathcal{L}[1, \infty)$.

8. Sea $f(x) := \cos x$ para $x \in [0, \infty)$. Demostrar que $f \notin \mathcal{R}^*[0, \infty)$.

9. Si $s > 0$, sea $g(x) := e^{-sx}$ para $x \in [0, \infty)$.

   a) Usar el teorema de Hake para demostrar que $g \in \mathcal{L}[0, \infty)$ y $\int_0^\infty e^{-sx}\, dx = 1/s$.
   b) Usar el teorema fundamental 10.3.5.

10. a) Utilizar la integración por partes así como el teorema de Hake para demostrar que $\int_0^\infty xe^{-sx}\, dx = 1/s^2$ para $s > 0$.
    b) Usar el teorema fundamental 10.3.5.

11. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, $s > 0$, entonces $\int_0^\infty x^n e^{-sx}\, dx = n!/s^{n+1}$.

12. a) Demostrar que la integral $\int_1^\infty x^{-1} \ln x\, dx$ no converge.
    b) Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces $\int_1^\infty x^{-\alpha} \ln x\, dx = 1/(\alpha - 1)^2$.

13. a) Demostrar que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |x^{-1} \operatorname{sen} x|\, dx > 1/4(n+1)$.
    b) Demostrar que $|D| \notin \mathcal{R}^*[0, \infty)$, donde D es como en el ejemplo 10.3.4d.

14. Demostrar que la integral $\int_0^\infty (1/\sqrt{x}) \operatorname{sen} x\, dx$ converge. [*Sugerencia:* integrar por partes.]

15. Establecer la convergencia de la **integral de Fresnel** $\int_1^\infty \operatorname{sen}(x^2)\, dx$. [*Sugerencia:* usar el teorema de sustitución 10.1.12.]

16. Establecer la convergencia o la divergencia de las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2 + 1}$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

    c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$, d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(x+1)^3}$,

    e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x\, dx}{x^{3/2} + 1}$.

17. Sean $f, \varphi : [a, \infty) \to \mathbb{R}$. El **criterio de Abel** afirma que si $f \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ y φ está acotada y es monótona en $[a, \infty)$, entonces $f\varphi \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$.

a) Demostrar que el criterio de Abel no se aplica para establecer la convergencia de $\int_0^\infty (1/x) \operatorname{sen} x \, dx$ tomando $\varphi(x) := 1/x$. Sin embargo, sí se aplica si se toma $\varphi(x) := 1/\sqrt{x}$ y se usa el ejercicio 14.

b) Utilizar el criterio de Abel y el ejercicio 15 para demostrar la convergencia de $\int_0^\infty (x/(x+1)) \operatorname{sen}(x^2) \, dx$.

c) Usar el criterio de Abel y el ejercicio 14 para demostrar la convergencia de $\int_0^\infty x^{-3/2}(x+1) \operatorname{sen} x \, dx$.

d) Usar el criterio de Abel para obtener la convergencia del ejercicio 16f.

18. Con la notación como en el ejercicio 17, el **criterio de Chartier-Dirichlet** asegura que si $f \in \mathcal{R}^*[a, \gamma]$ para toda $\gamma \geq a$, si $F(x) := \int_a^x f$ está acotada en $[a, \infty)$, y si φ es monótona y $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, entonces $f\varphi \in \mathcal{R}^*[a, \infty]$.

a) Demostrar que la integral $\int_0^\infty (1/x) \operatorname{sen} x \, dx$ converge.

b) Demostrar que $\int_2^\infty (1/\ln x) \operatorname{sen} x \, dx$ converge.

c) Demostrar que $\int_0^\infty (1/\sqrt{x}) \cos x \, dx$ converge.

d) Demostrar que el criterio de Chartier-Dirichlet no se aplica para establecer la convergencia de $\int_0^\infty (x/(x+1)) \operatorname{sen}(x^2) \, dx$ tomando $f(x) := \operatorname{sen}(x^2)$.

19. Demostrar que la integral $\int_0^\infty \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen}(x^2) \, dx$ es convergente, aun cuando el integrando no está acotado cuando $x \to \infty$. [*Sugerencia:* hacer una sustitución.]

20. Establecer la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx,$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-2)e^{-|x|} dx,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{e^x - e^{-x}}.$

SECCIÓN 10.4 Teoremas de convergencia

La discusión de la integral de Riemann generalizada se concluye con una indicación de los teoremas de convergencia con los que se cuenta para el tema. Se verá que los resultados son mucho más sólidos que los presentados en la sección 8.2 para la integral de Riemann (ordinaria). Por último, se introduce una función "medible" en $[a, b]$ como el límite casi en todas partes de una sucesión de funciones escalonadas. Se demostrará que toda función integrable es medible y que una función medible en $[a, b]$ es Riemann integrable generalizada si y sólo si satisface una condición de acotabilidad por ambos lados.

En el ejemplo 8.2.1c se demostró que si (f_k) es una sucesión en $\mathcal{R}[a, b]$ que converge a una función $f \in \mathcal{R}[a, b]$ en $[a, b]$, entonces no ocurre necesariamente que

$$\int_a^b f = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k. \quad (1)$$

Sin embargo, en el teorema 8.2.4 se vio que la *convergencia uniforme* de la sucesión es suficiente para garantizar que esta igualdad se cumple. De hecho, a continuación se demuestra que esta afirmación se sigue cumpliendo para una sucesión de funciones Riemann integrables *generalizadas*.

10.4.1 Teorema de convergencia uniforme *Sea* (f_k) *una sucesión en* $\mathcal{R}^*[a, b]$ *y suponer que* (f_k) *converge uniformemente a* f *en* [a, b]. *Entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *y* (1) *se cumple.*

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, existe $K(\varepsilon)$ tal que si $k \geq K(\varepsilon)$ y $x \in [a, b]$, entonces se tiene $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Por consiguiente, si $h, k \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$-2\varepsilon < f_k(x) - f_h(x) < 2\varepsilon \qquad \text{para} \quad x \in [a, b].$$

El teorema 10.1.5 implica que

$$-2\varepsilon(b-a) < \int_a^b f_k - \int_a^b f_h < 2\varepsilon(b-a).$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, la sucesión $(\int_a^b f_k)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge a algún número, digamos $A \in \mathbb{R}$. Se demostrará ahora que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ con integral A. Si $\varepsilon > 0$ está dada, sea $K(\varepsilon)$ como antes. Si $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es cualquier partición etiquetada de $[a, b]$ y si $k \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned} \left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \{f_k(t_i) - f(t_i)\}(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left|f_k(t_i) - f(t_i)\right|(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Ahora se ajusta $r \geq K(\varepsilon)$ de tal modo que $|\int_a^b f_r - A| < \varepsilon$ y sea $\delta_{r,\varepsilon}$ una medida sobre $[a, b]$ tal que $|\int_a^b f_r - S(f_r; \dot{\mathcal{P}})| < \varepsilon$ siempre que $\dot{\mathcal{P}}$ sea fina-$\delta_{r,\varepsilon}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - A\right| &\leq \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f_r;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_r\right| + \left|\int_a^b f_r - A\right| \\ &< \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2). \end{aligned}$$

Pero como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se sigue que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ y $\int_a^b f = A$. Q.E.D.

En el ejemplo 10.4.6a se verá que la conclusión de 10.4.1 es falsa para un intervalo *infinito*.

Equi-integrabilidad

La hipótesis de convergencia uniforme en el teorema 10.4.1 es muy rigurosa y restringe la utilidad de este resultado. Por consiguiente, se muestra a continuación que puede usarse otro tipo de condición de uniformidad para obtener el límite deseado. Esta noción se debe a Jaroslav Kurzweil, al igual que el teorema 10.4.3.

10.4.2 Definición Se dice que una sucesión (f_k) en $\mathcal{R}^*(I)$ es **equi-integrable** si para toda $\varepsilon > 0$ existe una medida δ_ε sobre I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es cualquier partición fina-δ_ε de I y $k \in \mathbb{N}$, entonces $|S(f_k; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_k| < \varepsilon$.

10.4.3 Teorema de equi-integrabilidad *Si* $(f_k) \in \mathcal{R}^*(I)$ *es equi-integrable en* I *y si* $f(x) = \lim f_k(x)$ *para toda* $x \in I$, *entonces* $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *y*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{2}$$

Demostración. Se tratará el caso $I = [a, b]$; el caso general puede encontrarse en [MTI].

Dada $\varepsilon > 0$, por la hipótesis de equi-integrabilidad existe una medida δ_ε en I tal que si $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición fina-δ_ε de I, entonces se tiene $|S(f_k; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_k| < \varepsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\dot{\mathcal{P}}$ sólo tiene un número finito de etiquetas y dado que $f_k(t) \to f(t)$ para $t \in [a, b]$, existe K_ε tal que si $k \geq K_\varepsilon$, entonces

$$\left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_h;\dot{\mathcal{P}})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|f_k(t_i) - f_h(t_i)\right|(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a). \tag{3}$$

Si se hace $h \to \infty$ en (3), se tiene

$$\left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| \leq \varepsilon(b-a) \qquad \text{para} \quad k \geq K_\varepsilon. \tag{4}$$

Además, si $h, k \geq K_\varepsilon$, entonces de la hipótesis de equi-integrabilidad y (3) se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_I f_k - \int_I f_h\right| &\leq \left|\int_I f_k - S(f_k;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_h;\dot{\mathcal{P}})\right| \\ &\quad + \left|S(f_h;\dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_h\right| \leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(2+b-a).\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, entonces $(\int_I f_k)$ es una sucesión de Cauchy y converge a alguna $A \in \mathbb{R}$. Si se hace $h \to \infty$ en esta última desigualdad, se obtiene

$$\left|\int_I f_k - A\right| \leq \varepsilon(2+b-a) \qquad \text{para} \quad k \geq K_\varepsilon. \tag{5}$$

Se demuestra ahora que $f \in \mathcal{R}^*(I)$ con integral A. De hecho, dada $\varepsilon > 0$, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición fina-δ_ε de I y $k \geq K_\varepsilon$, entonces

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}})-A\right| \leq \left|S(f;\dot{\mathcal{P}})-S(f_k;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}})-\int_I f_k\right| + \left|\int_I f_k - A\right|$$
$$\leq \varepsilon(b-a)+\varepsilon+\varepsilon(2+b-a)=\varepsilon(3+2b-2a),$$

donde se usó (4) para el primer término, la equi-integrabilidad para el segundo y (5) para el tercero. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, $f \in \mathcal{R}^*(I)$ con integral A.

Q.E.D.

Los teoremas de convergencia monótona y dominada

Aun cuando el teorema de equi-integrabilidad es interesante, resulta difícil de aplicar debido a que no es sencillo construir las medidas δ_ε. Se enuncian a continuación dos teoremas muy importantes que resumen los teoremas de convergencia más importantes para la integral que con frecuencia son de utilidad. McLeod [pp. 96-101] ha establecido que estos dos teoremas pueden demostrarse usando el teorema de equi-integrabilidad. Sin embargo, dichas demostraciones requieren una laboriosa construcción de las funciones medida. En [MTI] se presentan demostraciones directas de estos resultados, pero en ellas se usan también resultados que no se presentan aquí; por lo tanto, se omitirán las demostraciones de estos resultados.

Se dice que una sucesión de funciones en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es **monótona creciente** si satisface $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \cdots$ para toda $k \in \mathbb{N}$, $x \in I$. Se dice que es **monótona decreciente** si satisface la cadena de desigualdades opuestas y que es **monótona** si es monótona creciente o decreciente.

10.4.4 Teorema de convergencia monótona *Sea* (f_k) *una sucesión monótona de funciones en* $\mathcal{R}^*(I)$ *tal que* $f(x) = \lim f_k(x)$ *casi en todas partes de* I. *Entonces* $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *si y sólo si la sucesión de integrales* $(\int_I f_k)$ *está acotada en* $\mathbb{R}$, *en cuyo caso*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{6}$$

El siguiente resultado es el teorema más importante referente a la convergencia de funciones integrables. Es una extensión del celebrado "teorema de convergencia dominada de Lebesgue", a partir del cual puede demostrarse.

10.4.5 Teorema de convergencia dominada *Sea* (f_n) *una sucesión en* $\mathcal{R}^*(I)$ *y sea* $f(x) = \lim f_k(x)$ *casi en todas partes de* I. *Si existen las funciones* α, ω en $\mathcal{R}^*(I)$ *tales que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \omega(x) \quad \textit{para casi toda } x \in I, \tag{7}$$

entonces $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *y*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{8}$$

Además, si α *y* ω *pertenecen a* $\mathcal{L}(\mathrm{I})$, *entonces* $\mathrm{f_k}$ *y* f *pertenecen a* $\mathcal{L}(\mathrm{I})$ *y*

$$\| f_k - f \| = \int_I | f_k - f | \to 0. \tag{9}$$

Nota Si α y ω pertenecen a $\mathcal{L}(I)$ y se hace $\varphi := \text{máx}\{|\alpha|, |\omega|\}$, entonces $\varphi \in \mathcal{L}(I)$ y la condición (7) puede reemplazarse con la condición

$$|f_k(x)| \le \varphi(x) \qquad \text{para casi toda } x \in I. \tag{7'}$$

Algunos ejemplos

10.4.6 Ejemplos **a)** Si $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k(x) := 1/k$ para $x \in [0, k]$ y $f_k(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, \infty)$.

Entonces la sucesión converge uniformemente en $[0, \infty)$ a la función 0. Sin embargo, $\int_0^\infty f_k = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, mientras que la integral de la función 0 es igual a 0. Es un ejercicio demostrar que la función $\sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ no pertenece a $\mathcal{R}^*[0, \infty)$, por lo que la condición de dominación (7) no se satisface.

b) Se tiene $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{x^k + 1}{x^k + 3} dx = \frac{1}{3}.$

Ahora bien, si $g_k(x) := (x^k + 1)/(x^k + 3)$, entonces $0 \le g_k(x) \le 1$ y $g_k(x) \to 1/3$ para $x \in [0, 1)$. En consecuencia, se aplica el teorema de convergencia dominada 10.4.5.

c) Se tiene $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k e^{-ax} dx = \frac{1}{a-1}$ si $a > 1$.

Sea $h_k(x) := (1 + x/k)^k e^{-ax}$ para $x \in [0, k]$ y $h_k(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, \infty)$. El razonamiento empleado en el ejemplo 3.3.6 indica que (h_k) es una sucesión creciente y que converge a $e^x e^{-ax} = e^{(1-a)x}$ en $[0, \infty)$. Si $a > 1$ esta función límite pertenece a $\mathcal{L}[0, \infty)$. Más aún, si $F(x) := e^{(1-a)x}/(1-a)$, entonces $F'(x) = e^{(1-a)x}$, por lo que el teorema de convergencia monótona 10.4.4 y el teorema fundamental 10.3.5 implican que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty h_k = \int_0^\infty e^{(1-a)x} dx = F(x)\Big|_0^\infty = \frac{1}{a-1}.$$

d) Si f está acotada y es continua en $[0, \infty)$, y si $a > 0$, entonces la función definida por $L(t) := \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx$ es continua para $t \in J_a := (a, \infty)$.

Puesto que $|e^{-tx} f(x)| \le Me^{-ax}$ para $t \in J_a$, si (t_k) es cualquier sucesión en J_a que converge a $t_0 \in J_a$, el teorema de convergencia dominada implica que $L(t_k) \to L(t_0)$. Pero como la sucesión $(t_k) \to t_0$ es arbitraria, entonces L es continua en t_0.

e) La integral del inciso d) es derivable para $t > a$ y

$$L'(t) = \int_0^\infty (-x) e^{-tx} f(x) dx, \tag{10}$$

que es el resultado obtenido al "derivar dentro del signo de integral" con respecto a t.

Se toma un número fijo $t_0 \in J_a$. Si $t \in J_a$, entonces por el teorema del valor medio aplicado a la función $t \mapsto e^{-tx}$ existe un punto t_x entre t_0 y t tal que se tiene $e^{-tx} - e^{-t_0 x} = -xe^{-t_x x}(t - t_0)$, de donde

$$\left|\frac{e^{-tx} - e^{-t_0 x}}{t - t_0}\right| \le xe^{-t_x x} \le xe^{-ax}.$$

Puesto que $\omega(x) := xe^{-ax}f(x)$ pertenece a $\mathcal{L}[0, \infty)$, entonces para cualquier sucesión (t_k) en J_a con $t_0 \neq t_k \to t_0$, el teorema de convergencia dominada implica que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{L(t_k) - L(t_0)}{t_k - t_0}\right] &= \int_0^\infty \lim_{k\to\infty}\left[\frac{e^{-t_k x} - e^{-t_0 x}}{t_k - t_0}\right] f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty (-x)e^{-t_0 x} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Puesto que (t_k) es una sucesión arbitraria, entonces $L'(t_0)$ existe y (10) queda demostrada.

f) Sea $D_k(t) := \displaystyle\int_0^k e^{-tx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)dx$ para $k \in \mathbb{N}, t \ge 0$.

Puesto que $|(e^{-tx}\operatorname{sen} x)/x| \le e^{-tx} \le 1$ para $t \ge 0$, $x \ge 0$, la integral que define a D_k existe. En particular, se tiene

$$D_k(0) = \int_0^k \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Quiere demostrarse que $D_k(0) \to \frac{1}{2}\pi$ cuando $k \to \infty$. Por el ejemplo 10.3.4d, con esto se demostrará que $\int_0^\infty (\operatorname{sen} x)/x\,dx = \frac{1}{2}\pi$. El razonamiento es bastante complejo y usa varias veces el teorema de convergencia dominada.

Puesto que la derivada parcial satisface $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{e^{-tx}\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| = |-e^{-tx}\operatorname{sen} x| \le 1$ para $t \ge 0$, $x \ge 0$, un razonamiento como el usado en el inciso e) y el teorema de convergencia dominada implican que

$$D_k'(t) = -\int_0^k e^{-tx}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}, t \ge 0.$$

Ya que un cálculo de rutina establece que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-tx}(t\operatorname{sen} x + \cos x)}{t^2 + 1}\right) = -e^{-tx}\operatorname{sen} x$, entonces una aplicación del teorema fundamental da como resultado

$$D_k'(t) = \frac{e^{-tx}(t\operatorname{sen} k + \cos k)}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Si se hace $g_k(t) := \dfrac{e^{-tk}(t\operatorname{sen} k + \cos k)}{t^2 + 1}$ para $0 \le t \le k$ y $g_k(t) := 0$ para $t > k$, entonces otra aplicación del teorema fundamental da como resultado

$$D_k(k)-D_k(0)=\int_0^k D_k'(t)\,dt=\int_0^k g_k(t)\,dt-\int_0^k \frac{dt}{t^2+1} \tag{11}$$
$$=\int_0^\infty g_k(t)\,dt-\arctan k.$$

Si se observa que $g_k(t)\to 0$ para $t>0$ cuando $k\to\infty$ y que (dado que $k\ge 1$)

$$|g_k(t)|\le \frac{e^{-tk}(t+1)}{t^2+1}\le 2e^{-t} \qquad \text{para} \quad t\ge 0,$$

entonces el teorema de convergencia dominada da como resultado $\int_0^\infty g_k(t)\,dt\to 0$.

Además, puesto que $|(\text{sen}\, x)/x|\le 1$, se tiene

$$\left|D_k(k)\right|=\left|\int_0^k e^{-kx}\frac{\text{sen}\, x}{x}\,dx\right|\le \int_0^k e^{-kx}\,dx=\frac{e^{-kx}}{-k}\Big|_{x=0}^{x=k}$$
$$=\frac{1-e^{-k^2}}{k}\le\frac{1}{k}\to 0.$$

Por lo tanto, cuando $k\to\infty$, la fórmula (11) pasa a ser

$$0-\lim_{k\to\infty} D_k(0)=0-\lim_{k\to\infty}\arctan k=-\tfrac{1}{2}\pi.$$

Como ya se señaló, esta expresión da una evaluación de la **integral de Dirichlet**:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\, x}{x}=\frac{1}{2}\pi. \tag{12}$$

□

Funciones medibles

Quiere caracterizarse la colección de funciones en $\mathcal{R}^*(I)$. A fin de evitar algunos detalles menores, la discusión se limitará al caso $I:=[a,b]$. Es necesario introducir la noción de "función medible"; esta clase de funciones contiene todas las funciones con las que el lector le gustaría encontrarse siempre. Las funciones medibles suelen definirse en términos de la noción de "conjunto medible". Sin embargo, el enfoque que se usa aquí es un tanto más simple y no requiere que se haya desarrollado antes la teoría de los conjuntos medibles. (De hecho, la teoría de la medida puede deducirse de las propiedades de la integral; véanse los ejercicios 15 y 16.)

Se recuerda por la definición 5.4.9 que se dice que una función $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una **función escalonada** si sólo tiene un número finito de valores, siendo cada valor asumido en un número finito de subintervalos de $[a,b]$.

10.4.7 Definición Se dice que la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función **(Lebesgue) medible** si existe una sucesión (s_k) de funciones escalonadas en $[a,b]$ tal que

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} s_k(x) \qquad \text{para casi toda} \quad x\in[a,b]. \tag{13}$$

La colección de todas las funciones medibles en $[a, b]$ se denota por $\mathcal{M}[a, b]$.

La definición puede reformularse como: una función f está en $\mathcal{M}[a, b]$ si existe un conjunto nulo $Z \subset [a, b]$ y una sucesión (s_k) de funciones escalonadas tales que

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) \qquad \text{para toda} \quad x \in [a,b] \setminus Z. \tag{14}$$

Es trivial que toda función escalonada en $[a, b]$ es una función medible. Por el teorema 5.4.10, una función continua en $[a, b]$ es el límite uniforme de una sucesión de funciones escalonadas; por lo tanto, toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es medible. Del mismo modo, toda función monótona en $[a, b]$ es un límite uniforme de funciones escalonadas (véase la demostración del teorema 7.2.7); por lo tanto, toda función monótona en un intervalo es medible.

A primera vista podría parecer que la colección de las funciones medibles no es muy grande. Sin embargo, el requisito de que el límite (13) sólo necesita cumplirse *casi en todas partes* (y no en todas partes), permite obtener funciones mucho más generales. Se presentan a continuación algunos ejemplos.

10.4.8 Ejemplos **a)** La función de Dirichlet, $f(x) := 1$ para $x \in [0, 1]$ racional y $f(x) := 0$ para $x \in [0, 1]$ irracional es una función medible.

Puesto que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es un conjunto nulo, puede tomarse cada s_k como la función 0. Se obtiene entonces $s_k(x) \to f(x)$ para $x \in [0, 1]\backslash\mathbb{Q}$.

b) La función de Thomae h (véanse los ejemplos 5.1.5h y 7.1.6) es una función medible.

De nueva cuenta, se toma s_k como la función 0. Entonces $s_k(x) \to h(x)$ para $x \in [0, 1]\backslash\mathbb{Q}$.

c) La función $g(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $g(0) := 0$ es una función medible.

Esto puede verse tomando una función escalonada $s_k(x) := 0$ para $x \in [0, 1/k)$ y (usando 5.4.10) tal que $|s_k(x) - 1/x| < 1/k$ para $x \in [1/k, 1]$. Entonces $s_k(x) \to g(x)$ para toda $x \in [0, 1]$.

d) Si $f \in \mathcal{M}[a, b]$ y si $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que $\psi(x) = f(x)$ casi en todas partes, entonces $\psi \in \mathcal{M}[a, b]$.

En efecto, si $f(x) = \lim s_k(x)$ para $x \in [a, b] \setminus Z_1$ y si $\psi(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z_2$, entonces $\psi(x) = \lim s_k(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus (Z_1 \cup Z_2)$. Puesto que $Z_1 \cup Z_2$ es un conjunto nulo cuando Z_1 y Z_2 lo son, se sigue la conclusión. □

El siguiente resultado establece que las combinaciones elementales de funciones medibles llevan a funciones medibles.

10.4.9 Teorema *Sea que* f *y* g *pertenezcan a* $\mathcal{M}$[a, b] *y sea* c $\in \mathbb{R}$.

a) *Entonces las funciones* cf, |f|, f + g, f − g *y* f · g *también pertenecen a* $\mathcal{M}$[a, b].

b) *Si* $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces la composición* $\varphi \circ$ f $\in \mathcal{M}$[a, b].

c) *Si* (f_n) *es una sucesión en* $\mathcal{M}$[a, b] *y* $f(x) = \lim f_n(x)$ *casi en todas partes de* I, *entonces* f $\in \mathcal{M}$[a, b].

Demostración. a) Se demostrará que $|f|$ es medible. Sea $Z \subset [a, b]$ un conjunto nulo tal que (14) se cumpla. Puesto que $|s_k|$ es una función escalonada, la desigualdad del triángulo implica que

$$0 \leq \big|\, |f(x)| - |s_k(x)| \,\big| \leq |\, f(x) - s_k(x) \,| \to 0$$

para toda $x \in [a, b] \setminus Z$. Por lo tanto, $|f| \in \mathcal{M}[a, b]$.

Las demás afirmaciones del inciso a) se siguen de las propiedades básicas de los límites.

b) Si s_k es una función escalonada en $[a, b]$, es inmediato observar que $\varphi \circ s_k$ también es una función escalonada en $[a, b]$. Puesto que φ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(x) = \lim s_k(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z$, se sigue que $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) = \lim \varphi(s_k(x)) = \lim(\varphi \circ s_k)(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z$. Por lo tanto, $\varphi \circ f$ es medible.

c) Esta conclusión no es muy obvia; en el ejercicio 14 se describe una demostración. Q.E.D.

El siguiente resultado establece que las funciones escalonadas de la definición 10.4.7 pueden reemplazarse con funciones continuas. Puesto que sólo se usará una parte de este resultado, nos damos por satisfechos presentando un esbozo de la demostración de la otra parte.

10.4.10 Teorema *Una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *está en* $\mathcal{M}[a, b]$ *si y sólo si existe una sucesión* (g_k) *de funciones continuas tal que*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \qquad \textit{para casi toda} \quad x \in [a, b]. \tag{15}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $Z \subset [a, b]$ un conjunto nulo y (g_k) una sucesión de funciones continuas tal que $f(x) = \lim g_k(x)$ para $x \in [a, b] \setminus Z$. Puesto que g_k es continua, por 5.4.10 existe una función escalonada s_k tal que

$$|g_k(x) - s_k(x)| \leq 1/k \qquad \text{para toda } x \in [a, b].$$

Se tiene, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x) - s_k(x)| &\leq |f(x) - g_k(x)| + |g_k(x) - s_k(x)| \\ &\leq |f(x) - g_k(x)| + 1/k, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $f(x) = \lim g_k(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z$.

Esbozo de ($\Rightarrow$) Sean Z un conjunto nulo y (s_k) una sucesión de funciones escalonadas tal que $f(x) = \lim s_k(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que cada s_k es continua en los puntos terminales a, b. Puesto que s_k sólo es discontinua en un número finito de puntos en (a, b), los cuales pueden encerrarse en una unión finita J_k de intervalos con longitud total $\leq 1/k$, es posible construir una función continua y lineal por partes g_k que coincida con s_k en $[a, b] \setminus J_k$. Puede demostrarse que $g_k(x) \to f(x)$ casi en todas partes en I. (Véase [MTI] para los detalles.] Q.E.D.

Las funciones en $\mathcal{R}^*[a, b]$ son medibles

Se establece a continuación que una función Riemann integrable generalizada es medible.

10.4.11 Teorema de medibilidad *Si* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$, *entonces* $f \in \mathcal{M}[a, b]$.

Demostración. Sea $F : [a, b+1] \to \mathbb{R}$ la integral indefinida

$$F(x) := \int_a^x f \qquad si \quad x \in [a,b],$$

y sea $F(x) := F(b)$ para $x \in (b, b+1]$. Del teorema fundamental (segunda forma) 10.1.11a se sigue que F es continua en $[a, b]$. Por 10.1.11c, existe un conjunto nulo Z tal que la derivada $F'(x) = f(x)$ existe para $x \in [a, b] \setminus Z$. Por lo tanto, si se introducen las funciones en cocientes diferenciales

$$g_k(x) := \frac{F(x+1/k) - F(x)}{1/k} \qquad \text{para} \quad x \in [a,b),\ k \in \mathbb{N},$$

entonces $g_k(x) \to f(x)$ para toda $x \in [a, b] \setminus Z$. Puesto que las g_k son continuas, de la parte del teorema 10.4.10 que se demostró se sigue $f \in \mathcal{M}[a, b]$. Q.E.D.

¿Son integrables las funciones medibles?

No *toda* función medible es Riemann integrable generalizada. Por ejemplo, en el ejemplo 10.4.8c se vio que la función $g(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $g(0) := 0$ es medible; sin embargo, no está en $\mathcal{R}^*[a, b]$ porque es "muy grande" (cuando $x \to 0+$). Sin embargo, si la gráfica de una función medible en $[a, b]$ queda entre dos funciones que están en $\mathcal{R}^*[a, b]$, entonces también pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$.

10.4.12 Teorema de integrabilidad *Sea* $f \in \mathcal{M}[a, b]$. *Entonces* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *si y sólo si existen las funciones* $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *tales que*

$$\alpha(x) \le f(x) \le \omega(x) \qquad \textit{para casi toda} \quad x \in [a, b]. \tag{16}$$

Además, si α *o bien* ω *pertenece a* $\mathcal{L}[a, b]$, *entonces* $f \in \mathcal{L}[a, b]$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Esta implicación es trivial, ya que puede tomarse $\alpha = \omega = f$.

($\Leftarrow$) Puesto que $f \in \mathcal{M}[a, b]$, existe una sucesión (s_k) de funciones escalonadas en $[a, b]$ tales que (13) se cumple. Se define $\bar{s}_k := \text{med}\{\alpha, s_k, \omega\}$ para $k \in \mathbb{N}$, de tal modo que $\bar{s}_k(x)$ es el que queda en medio de los números $\alpha(x)$, $s_k(x)$ y $\omega(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Del teorema 10.2.8 y del hecho de que

$$\text{med}\{a, b, c\} = \text{mín}\{\text{máx}\{a, b\}, \text{máx}\{b, c\}, \text{máx}\{c, a\}\},$$
$$\text{mín}\{a', b', c'\} = \text{mín}\{\text{mín}\{a', b'\}, c'\},$$

se sigue que $\bar{s}_k\ \mathcal{R}^*[a, b]$ y que $\alpha \le \bar{s}_k \le \omega$. Puesto que $f = \text{lím}\, s_k = \text{lím}\, \bar{s}_k$ casi en todas partes, el teorema de convergencia dominada implica que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$.

Si α u ω pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$, entonces puede aplicarse el teorema 10.2.6 para concluir que f pertenece a $\mathcal{L}[a, b]$. Q.E.D.

Comentario final

En este capítulo han sido frecuentes las referencias a las funciones Lebesgue integrables en un intervalo I, las cuales se introdujeron como funciones en $\mathcal{R}^*(I)$ cuyo valor absoluto también pertenece a $\mathcal{R}^*(I)$. Aun cuando no hay un solo "enfoque estándar" para la integral de Lebesgue, el enfoque adoptado aquí es muy diferente a cualquiera de los acostumbrados. Un crítico podría decir que el enfoque aplicado aquí no es útil porque nuestra definición de una función en $\mathcal{L}(I)$ no es estándar, pero se equivocaría.

Después de todo, rara vez se usa la *definición* para confirmar que una función particular es Lebesgue integrable. En vez de ello, se utiliza el hecho de que ciertas funciones más simples (tales como funciones escalonadas, polinomios, funciones continuas, funciones acotadas medibles) pertenecen a $\mathcal{L}(I)$, y que funciones más complicadas pertenecen a $\mathcal{L}(I)$ tomando combinaciones algebraicas o varias operaciones de límites (por ejemplo, el teorema de Hake o el teorema de convergencia dominada). Un famoso especialista en análisis dijo una vez: "Nadie calcula nunca una integral de Lebesgue; lo que se hace es calcular integrales de Riemann y tomar límites".

Ocurre lo mismo con los números reales: se listaron ciertas propiedades como axiomas para $\mathbb{R}$ y después de dedujeron las consecuencias de estas propiedades que permiten trabajar de manera eficaz con los números reales, con frecuencia tomando límites.

Ejercicios de la sección 10.4

1. Considerar las siguientes sucesiones de funciones con los dominios indicados. ¿La sucesión converge? De ser así, ¿a dónde? ¿La convergencia es uniforme? ¿Está acotada? Si no está acotada, ¿está dominada? ¿Es monótona? Evaluar el límite de la sucesión de integrales.

a) $\dfrac{kx}{1+kx}$ $[0,1]$, b) $\dfrac{x^k}{1+x^k}$ $[0,2]$,

c) $\dfrac{1}{1+x^k}$ $[0,1]$, d) $\dfrac{1}{1+x^k}$ $[0,2]$,

2. Responder las preguntas planteadas en el ejercicio 1 para las siguientes sucesiones (cuando estén definidas apropiadamente).

a) $\dfrac{kx}{1+k\sqrt{x}}$ $[0,1]$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^k)}$ $[0,1]$,

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^k)}$ $[1,2]$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(2-x^k)}$ $[0,1]$.

3. Examinar las siguientes sucesiones de funciones y sus integrales en $[0, 1]$. Evaluar el límite de las integrales, cuando sea posible.

a) e^{-kx}, b) e^{-kx}/x,

c) kxe^{-kx}, d) k^2xe^{-kx},

e) $kxe^{-k^2x^2}$, f) kxe^{-kx^2}.

4. a) Demostrar que $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{x^k\,dx}{(1+x)^2} = 0.$ b) Demostrar que $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{kx^k\,dx}{1+x} = \frac{1}{2}.$

5. Si $f_k(x) := k$ para $x \in [1/k, 2/k]$ y $f_k(x) := 0$ en cualquier otro punto de $[0, 2]$, demostrar que $f_k(x) \to 0$ pero que $\int_0^2 f_k = 1$.

6. Sea (f_k) una sucesión en $[a, b]$ tal que cada f_k es derivable en $[a, b]$ y $f_k'(x) \to g(x)$ con $|f_k'(x)| \le K$ para toda $x \in [a, b]$. Demostrar que la sucesión $(f_k(x))$ converge para toda $x \in [a, b]$ o bien diverge para toda $x \in [a, b]$.

7. Si f_k son las funciones del ejemplo 10.4.6a, demostrar que $\sup\{f_k\}$ no pertenece a $\mathcal{R}^*[0, \infty)$.

8. Demostrar directamente que $\int_0^\infty e^{-tx}\,dx = 1/t$ y $\int_0^\infty xe^{-tx}\,dx = 1/t^2$ para $t > 0$, confirmándose así los resultados de los ejemplos 10.4.6 d, e cuando $f(x) := 1$.

9. Usar la fórmula de derivación en 10.4.6f para obtener $\int_0^\infty e^{-tx}\operatorname{sen} x\,dx = 1/(t^2 + 1)$.

10. Si $t > 0$, se define $E(t) := \int_0^\infty [(e^{-tx}\operatorname{sen} x)/x]\,dx$.

a) Demostrar que E existe y que es continua para $t > a > 0$. Además, $E(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

b) Puesto que $\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-tx}\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| \le e^{-ax}$ para $t \ge a > 0$, demostrar que $E'(t) = \frac{-1}{t^2+1}$ para $t > 0$.

c) Deducir que $E(t) = \frac{1}{2}\pi - \arctan t$ para $t > 0$.

d) Explicar por qué no puede usarse la fórmula del inciso c) para obtener la ecuación (12).

11. En este ejercicio se establecerá la importante fórmula:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

a) Sea $G(t) := \int_0^1 [e^{-t^2(x^2+1)}/(x^2 + 1)]dx$ para $t \ge 0$. Puesto que el integrando está dominado por $1/(x^2 + 1)$ para $t \ge 0$, entonces G es continua en $[0, \infty)$. Además, $G(0) = \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$ y del teorema de convergencia dominada se sigue que $G(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

b) La derivada parcial del integrando con respecto a t está acotada para $t \ge 0$, $x \in [0, 1]$, por lo que $G'(t) = -2te^{-t^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2}\,dx = -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-u^2}\,du$.

c) Si se hace $F(t) := \left[\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right]^2$, entonces el teorema fundamental 10.1.11 da como resultado $F'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2}\,dx$ para $t \ge 0$, de donde $F'(t) + G'(t) = 0$ para toda $t \ge 0$. Por lo tanto, $F(t) + G(t) = C$ para toda $t \ge 0$.

d) Al usar $F(0) = 0$, $G(0) = \frac{1}{4}\pi$ y $\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$, se concluye que $\lim_{t\to\infty} F(t) = \frac{1}{4}\pi$, por lo que la fórmula (17) se cumple.

12. Suponer que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado y que $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ es tal que $\partial f/\partial t$ existe en $[a, b] \times I$, y para toda $t \in [a, b]$ la función $x \mapsto f(t, x)$ está en $\mathcal{R}^*(I)$ y existen $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*(I)$ tales que la derivada parcial satisface $\alpha(x) \le \partial f(t, x)/\partial t \le \omega(x)$ para casi toda $x \in I$. Si $F(t) := \int_I f(t, x)\,dx$, demostrar que F es derivable en $[a, b]$ y que $F'(t) := \int_I \partial f(t, x)/\partial t\,dx$.

13. a) Si $f, g \in \mathcal{M}[a, b]$, demostrar que $\text{máx}\{f, g\}$ y $\text{mín}\{f, g\}$ pertenecen a $\mathcal{M}[a, b]$.
    b) Si $f, g, h \in \mathcal{M}[a, b]$, demostrar que $\text{med}\{f, g, h\} \in \mathcal{M}[a, b]$.

14. a) Si (f_k) es una sucesión acotada en $\mathcal{M}[a, b]$ y $f_k \to f$ casi en todas partes, demostrar que $f \in \mathcal{M}[a, b]$. [*Sugerencia:* usar el teorema de convergencia dominada.]
    b) Si (g_k) es una sucesión cualquiera en $\mathcal{M}[a, b]$ y si $f_k := \arctan \circ g_k$, demostrar que (f_k) es una sucesión acotada en $\mathcal{M}[a, b]$.
    c) Si (g_k) es una sucesión en $\mathcal{M}[a, b]$ y si $g_k \to g$ casi en todas partes, demostrar que $g \in \mathcal{M}[a, b]$.

15. Se dice que un conjunto E en $[a, b]$ es **(Lebesgue) medible** si su función característica $\mathbf{1}_E$ (definida por $\mathbf{1}_E(x) := 1$ si $x \in E$ y $\mathbf{1}_E(x) := 0$ si $x \in [a, b] \setminus E$) pertenece a $\mathcal{M}[a, b]$. La colección de conjuntos medibles en $[a, b]$ se denotará por $\mathbb{M}[a, b]$. En este ejercicio se desarrollan varias propiedades de $\mathbb{M}[a, b]$.

    a) Demostrar que $E \in \mathbb{M}[a, b]$ si y sólo si $\mathbf{1}_E$ pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$.
    b) Demostrar que $\emptyset \in \mathbb{M}[a, b]$ y que si $[c, d] \subseteq [a, b]$, entonces los intervalos $[c, d]$, $[c, d)$, $(c, d]$ y (c, d) están en $\mathbb{M}[a, b]$.
    c) Demostrar que $E \in \mathbb{M}[a, b]$ si y sólo si $E' := [a, b] \setminus E$ está en $\mathbb{M}[a, b]$.
    d) Si E y F están en $\mathbb{M}[a, b]$, entonces $E \cup F$, $E \cap F$ y $E \setminus F$ también están en $\mathbb{M}[a, b]$. [*Sugerencia:* demostrar que $\mathbf{1}_{E \cup F} = \text{máx}\{\mathbf{1}_E, \mathbf{1}_F\}$, etc.]
    e) Si (E_k) es una sucesión creciente en $\mathbb{M}[a, b]$, demostrar que $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ está en $\mathbb{M}[a, b]$. Asimismo, si (F_k) es una sucesión decreciente en $\mathbb{M}[a, b]$, demostrar que $F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ está en $\mathbb{M}[a, b]$. [*Sugerencia:* aplicar el teorema 10.4.9c.]
    f) Si (E_k) es cualquier sucesión en $\mathbb{M}[a, b]$, demostrar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ están en $\mathbb{M}[a, b]$.

16. Si $E \in \mathbb{M}[a, b]$, se define la **medida (de Lebesgue)** de E como el número $m(E) := \int_a^b \mathbf{1}_E$. En este ejercicio se desarrollan varias propiedades de la **función medida** $m : \mathbb{M}[a, b] \to \mathbb{R}$.

    a) Demostrar que $m(\emptyset) = 0$ y $0 \le m(E) \le b - a$.
    b) Demostrar que $m([c, d]) = m([c, d)) = m((c, d]) = m((c, d)) = d - c$.
    c) Demostrar que $m(E') = (b - a) - m(E)$.
    d) Demostrar que $m(E \cup F) + m(E \cap F) = m(E) + m(F)$.
    e) Si $E \cap F = \emptyset$, demostrar que $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$. (Ésta es la **propiedad de aditividad** de la función medida.)
    f) Si (E_k) es una sucesión creciente en $\mathbb{M}[a, b]$, hay que demostrar que $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \text{lím}_k\, m(E_k)$. [*Sugerencia:* usar el teorema de convergencia monótona.]
    g) Si (C_k) es una sucesión en $\mathbb{M}[a, b]$ que es disjunta por pares (en el sentido de que $C_j \cap C_k = \emptyset$ siempre que $j \neq k$), demostrar que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k). \tag{18}$$

    (Ésta es la **propiedad de aditividad contable** de la función medida.)

Capítulo 11

UNA OJEADA A LA TOPOLOGÍA

En la mayor parte de este texto se han considerado únicamente funciones que estaban definidas en intervalos. De hecho, para ciertos resultados importantes sobre funciones continuas, también se estableció el supuesto de que los intervalos eran cerrados y estaban acotados. Se examinan a continuación las funciones definidas en conjuntos más generales, con el fin de establecer algunas propiedades importantes de las funciones continuas en un contexto más general. Por ejemplo, en la sección 5.3 se demostró que una función que es continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo. Sin embargo, se verá que la hipótesis de que el conjunto es un intervalo no es esencial y que puede omitirse en el contexto apropiado.

En la sección 11.1 se definen las nociones de conjunto abierto y de conjunto cerrado. El estudio de los conjuntos abiertos y los conceptos que pueden definirse en términos de dichos conjuntos constituyen el estudio de la topología punto-conjunto, por lo que en realidad se analizan ciertos aspectos de la topología de $\mathbb{R}$. (La rama de las matemáticas llamada "topología" es muy abstracta y rebasa con mucho el estudio de la recta real, aun cuando las ideas clave habrán de encontrarse en el análisis real. De hecho, es el estudio de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ el que motivó muchos de los conceptos desarrollados en la topología.)

La noción de conjunto compacto se define en la sección 11.2 en términos de coberturas abiertas. En análisis avanzado, la compacidad es un concepto muy poderoso de uso generalizado. Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ están caracterizados en su totalidad por el teorema de Heine-Borel, por lo que el potencial pleno de la idea no es tan evidente como lo sería en contextos más generales. No obstante, cuando se establezcan las propiedades básicas de las funciones continuas en conjuntos compactos en la sección 11.3, el lector deberá empezar a apreciar la manera en que se manejan los razonamientos basados en la compacidad.

En la sección 11.4 se consideran las características esenciales de distancia en la recta real y se introduce la generalización de la distancia llamada el "métrico". La ampliamente usada desigualdad del triángulo es la propiedad clave en este concepto general de distancia. Se presentan ejemplos y se indica cómo pueden extenderse los teoremas sobre la recta real al contexto de un espacio métrico.

Las ideas de este capítulo son de carácter un tanto más abstracto que las de capítulos anteriores; sin embargo, la abstracción con frecuencia redunda en una comprensión más a fondo y refinada. En este caso, lleva a un contexto más general para el estudio del análisis.

SECCIÓN 11.1 Conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$

Hay tipos especiales de conjuntos que desempeñan un papel destacado en el análisis; se trata de los conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$. A fin de agilizar la discusión, es conveniente contar con una noción ampliada de la vecindad de un punto.

11.1.1 Definición Una **vecindad** de un punto $x \in \mathbb{R}$ es cualquier conjunto V que contiene una vecindad-ε $V_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ de x para alguna $\varepsilon > 0$.

Aun cuando se estipula que una vecindad-ε de un punto sea "simétrica respecto del punto", la idea de una vecindad (general) relaja esta característica particular, aunque con frecuencia sirve al mismo propósito.

11.1.2 Definición **i)** Un subconjunto G de $\mathbb{R}$ es **abierto** en $\mathbb{R}$ si para cada $x \in G$ existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq G$.
ii) Un subconjunto F de $\mathbb{R}$ es **cerrado en** $\mathbb{R}$ si el complemento $\mathcal{C}(F) := \mathbb{R}\backslash F$ es abierto en $\mathbb{R}$.

Para demostrar que un conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ es abierto, basta probar que cada punto de G tiene una vecindad-ε que está contenida en G. De hecho, G es abierto si y sólo si para toda $x \in G$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ está contenido en G.

Para demostrar que un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado, basta probar que cada punto $y \notin F$ tiene una vecindad-ε disjunta de F. De hecho, F es cerrado si y sólo si para cada $y \notin F$ existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $F \cap (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) = \emptyset$.

11.1.3 Ejemplos **a)** El conjunto $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ completo es abierto.
Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se puede tomar $\varepsilon := 1$.

b) El conjunto $G := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto.
Para cualquier $x \in G$ se puede tomar ε_x como el menor de los números x, $1 - x$. Se le deja al lector demostrar que si $|u - x| < \varepsilon_x$ entonces $u \in G$.

c) Todo intervalo abierto $I := (a, b)$ es un conjunto abierto.
De hecho, si $x \in I$, se puede tomar ε_x como el menor de los números $x - a$, $b - x$. El lector puede demostrar entonces que $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq I$. Del mismo modo, los intervalos $(-\infty, b)$ y (a, ∞) son conjuntos abiertos.

d) El conjunto $I := [0, 1]$ no es abierto.
Esto se sigue al considerar que toda vecindad de $0 \in I$ contiene puntos que no están en I.

e) El conjunto $I := [0, 1]$ es cerrado.
Para ver esto, sea $y \notin I$; entonces o $y < 0$ o $y > 1$. Si $y < 0$ se toma $\varepsilon_y := |y|$ y si $y > 1$ se toma $\varepsilon_y := y - 1$. Se le deja al lector demostrar que en ambos casos se tiene $I \cap (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) = \emptyset$.

f) El conjunto $H := \{x : 0 \leq x < 1\}$ no es ni abierto ni cerrado. (¿Por qué?)

g) El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto en $\mathbb{R}$.
De hecho, el conjunto vacío no contiene puntos en absoluto, por lo que el requerimiento de la definición 11.1.2(i) se satisface por vacuidad. El conjunto vacío también es cerrado ya que su complemento $\mathbb{R}$ es abierto, como se vio en el inciso a). □

En el lenguaje común, las palabras "abierto" y "cerrado" son antónimos cuando se aplican a puertas, ventanas y mentes. Sin embargo, no lo son cuando estas palabras se aplican a subconjuntos de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, se señaló antes que los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son *tanto* abiertos *como* cerrados en $\mathbb{R}$. (Probablemente el lector se sentirá aliviado al enterarse de que no hay otros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tengan ambas propiedades.) Por otra parte, hay muchos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son *ni* abiertos *ni* cerrados; de hecho, la mayoría de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ poseen este carácter neutro.

El siguiente resultado básico describe la manera en que los conjuntos abiertos se relacionan con las operaciones de unión e intersección de conjuntos en $\mathbb{R}$.

11.1.4 Propiedades de los conjuntos abiertos **a)** *La unión de una colección arbitraria de subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.*
b) *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.*

Demostración. a) Sea $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos en $\mathbb{R}$ que son abiertos y sea G su unión. Considerar un elemento $x \in G$; por la definición de unión, x debe pertenecer a G_{λ_0} para alguna $\lambda_0 \in \Lambda$. Puesto que G_{λ_0} es abierto, existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq G_{\lambda_0}$. Pero $G_{\lambda_0} \subseteq G$, por lo que $V \subseteq G$. Puesto que x es un elemento arbitrario de G, se concluye que G es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

b) Suponer que G_1 y G_2 son conjuntos abiertos y sea $G := G_1 \cap G_2$. Para demostrar que G es un conjunto abierto, se considera cualquier $x \in G$; entonces $x \in G_1$ y $x \in G_2$. Puesto que G_1 es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ está contenido en G_1. Del mismo modo, ya que G_2 es abierto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ está contenido en G_2. Si se hace ahora que ε sea el menor de ε_1 y ε_2, entonces la vecindad-ε $U := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ satisface tanto $U \subseteq G_1$ como $U \subseteq G_2$. Por tanto, $x \in U \subseteq G$. Puesto que x es un elemento arbitrario de G, se concluye que G es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Ahora, por un razonamiento de inducción matemática (cuyo desarrollo se le deja al lector), se sigue que la intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos es abierta. Q.E.D.

Las propiedades correspondientes para conjuntos cerrados se establecerán usando las identidades generales de De Morgan para conjuntos y sus componentes. (Véase el teorema 1.1.4.)

11.1.5 Propiedades de los conjuntos cerrados **a)** *La intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.*
b) *La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. a) Si $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ y $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, entonces $\mathcal{C}(F) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}(F_\lambda)$ es una unión de conjuntos abiertos. En consecuencia, $\mathcal{C}(F)$ es abierto por el teorema 11.1.4a, y por consiguiente F es cerrado.

b) Suponer que $F_1, F_2, \cdots, F_n$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ y sea $F := F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$. Por la identidad de De Morgan, el complemento de F está dado por

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(F_n)$$

Puesto que cada conjunto $\mathcal{C}(F_i)$ es abierto, del teorema 11.1.4b se sigue que $\mathcal{C}(F)$ es abierto. En consecuencia, F es un conjunto cerrado. Q.E.D.

Las restricciones de finitud en 11.1.4b y 11.1.5b no pueden omitirse. Considérense los siguientes ejemplos.

11.1.6 Ejemplos **a)** Sea $G_n := (0, 1 + 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces G_n es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$, por el ejemplo 11.1.3c. Sin embargo, la intersección $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es el intervalo $(0, 1]$ que no es abierto. Por tanto, *la intersección de un número infinito de conjuntos abiertos en* $\mathbb{R}$ *no es necesariamente un conjunto abierto.*

b) Sea $F_n := [1/n, 1]$ para $n \in \mathbb{N}$. Cada F_n es cerrado, pero la unión $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es el conjunto $(0, 1]$ que no es cerrado. Por tanto, *la unión de un número infinito de conjuntos cerrados en* $\mathbb{R}$ *no es necesariamente un conjunto cerrado.* □

Caracterización de los conjuntos cerrados

Se presenta a continuación una caracterización de los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ en términos de sucesiones. Como se verá, los conjuntos cerrados son precisamente aquellos conjuntos F que contienen los límites de todas las sucesiones convergentes cuyos elementos se toman de F.

11.1.7 Caracterización de los conjuntos cerrados *Sea* F $\subseteq \mathbb{R}$; *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) F *es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}$.
(ii) *Si* $X = (x_n)$ *es cualquier sucesión convergente de elementos en* F, *entonces* lím X *pertenece a* F.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $X = (x_n)$ una sucesión de elementos en F y sea $x :=$ lím X; quiere demostrarse que $x \in F$. Suponer, por el contrario, que $x \notin F$; es decir, que $x \in \mathcal{C}(F)$, el complemento de F. Puesto que $\mathcal{C}(F)$ es abierto y $x \in \mathcal{C}(F)$, se sigue que existe una vecindad-ε V_ε de x tal que V_ε está contenida en $\mathcal{C}(F)$. Puesto que $x =$ lím (x_n), se sigue que existe un número natural $K = K(\varepsilon)$ tal que $x_K \in V_\varepsilon$. Debe tenerse por tanto $x_K \in \mathcal{C}(F)$; pero esto contradice el supuesto de que $x_n \in F$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, se concluye que $x \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponer, por el contrario, que F no es cerrado, de tal modo que $G := \mathcal{C}(F)$ no es abierto. Entonces existe un punto $y_0 \in G$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un número $y_n \in \mathcal{C}(G) = F$ tal que $|y_n - y_0| < 1/n$. Se sigue que $y_0 :=$ lím (y_n), y como $y_n \in F$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la hipótesis (ii) implica que $y_0 \in F$, lo cual contra-

dice el supuesto de que $y_0 \in G = \mathcal{C}(F)$. Por tanto, la hipótesis de que F no es cerrado implica que (ii) no es verdadera. Por consiguiente, (ii) implica (i), como se afirmó. Q.E.D.

El siguiente resultado guarda una estrecha relación con el teorema anterior. Establece que un conjunto F es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación. Recuérdese de la sección 4.1 que un punto x es un **punto de acumulación** de un conjunto F si toda vecindad-ε de x contiene un punto de F diferente de x. Puesto que por el teorema 4.1.2 cada punto de acumulación de un conjunto F es el límite de una sucesión de puntos en F, el resultado se sigue de inmediato del teorema 11.1.7 anterior. Se presenta una segunda demostración que usa únicamente las definiciones pertinentes.

11.1.8 Teorema *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. Sea F un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ y sea x un punto de acumulación de F; se demostrará que $x \in F$. De no ser así, entonces x pertenece al conjunto abierto $\mathcal{C}(F)$. Por lo tanto, existe una vecindad-ε V_ε de x tal que $V_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}(F)$. Por consiguiente, $V_\varepsilon \cap F = \emptyset$, lo cual contradice el supuesto de que x es un punto de acumulación de F.

Recíprocamente, sea F un subconjunto de $\mathbb{R}$ que contiene todos sus puntos de acumulación; se demostrará que $\mathcal{C}(F)$ es abierto. En efecto, si $y \in \mathcal{C}(F)$, entonces y no es un punto de acumulación de F. Se sigue que existe una vecindad-ε V_ε de y que no contiene un punto de F (con la posible excepción de y). Pero como $y \in \mathcal{C}(F)$, se sigue que $V_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}(F)$. Puesto que y es un elemento arbitrario de $\mathcal{C}(F)$, se deduce que para cualquier punto en $\mathcal{C}(F)$ existe una vecindad-ε que está contenida en su totalidad en $\mathcal{C}(F)$. Pero esto significa que $\mathcal{C}(F)$ es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, F es cerrado en $\mathbb{R}$. Q.E.D.

Caracterización de los conjuntos abiertos

La idea de un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es una generalización de la noción de intervalo abierto. El hecho de que esta generalización no lleve a conjuntos demasiado peculiares que son abiertos se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

11.1.9 Teorema *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto si y sólo si es la unión de un número contable de intervalos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Suponer que $G \neq \emptyset$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Para toda $x \in G$, sea $A_x := \{a \in \mathbb{R} : (a, x] \subseteq G\}$ y sea $B_x := \{b \in \mathbb{R} : [x, b) \subseteq G\}$. Puesto que G es abierto, se sigue que A_x y B_x son conjuntos no vacíos. (¿Por qué?) Si el conjunto A_x está acotado por abajo, se hace $a_x := \text{ínf } A_x$; si A_x no está acotado por abajo, se hace $a_x := -\infty$. Adviértase que en ambos casos $a_x \notin G$. Si el conjunto B_x está acotado por arriba, se hace $b_x := \sup B_x$; si B_x no está acotado por arriba, se hace $b_x := \infty$. Adviértase que en ambos casos $b_x \notin G$.

Se define ahora $I_x := (a_x, b_x)$; evidentemente, I_x es un intervalo abierto que contiene a x. Se afirma que $I_x \subseteq G$. Para ver esto, sea $y \in I_x$ y suponer que $y < x$. De la definición de a_x se sigue que existe $a' \in A_x$ con $a' < y$, de donde $y \in (a', x] \subseteq G$. Del mismo modo, si $y \in I_x$ y $x < y$, existe $b' \in B_x$ con $y < b'$, de donde se sigue que $y \in [x, b') \subseteq G$. Puesto que $y \in I_x$ es arbitraria, se tiene que $I_x \subseteq G$.

Puesto que $x \in G$ es arbitraria, se concluye que $\bigcup_{x \in G} I_x \subseteq G$. Por otra parte, puesto que para toda $x \in G$ existe un intervalo abierto I_x con $x \in I_x \subseteq G$, se tiene también $G \subseteq \bigcup_{x \in G} I_x$. Por lo tanto, se concluye que $G = \bigcup_{x \in G} I_x$.

Se afirma que si $x, y \in G$ y $x \neq y$, entonces o $I_x = I_y$ o $I_x \cap I_y = \emptyset$. Para demostrar esta afirmación, se supone que $z \in I_x \cap I_y$, de donde se sigue que $a_x < z < b_y$ y $a_y < z < b_x$. (¿Por qué?) Se demostrará que $a_x = a_y$. De no ser así, de la propiedad de tricotomía se sigue que (i) $a_x < a_y$ o bien (ii) $a_y < a_x$. Si ocurre (i), entonces $a_y \in I_x = (a_x, b_x) \subseteq G$, lo que contradice el hecho de que $a_y \notin G$. Del mismo modo, si ocurre (ii), entonces $a_x \in I_y = (a_y, b_y) \subseteq G$, lo que contradice el hecho de que $a_x \notin G$. En consecuencia, debe tenerse $a_x = a_y$ y un razonamiento similar implica que $b_x = b_y$. Por lo tanto, se concluye que si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, entonces $I_x = I_y$.

Queda por demostrar que la colección de intervalos distintos $\{I_x : x \in G\}$ es contable. Para ello, se enumera el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$ (véase el teorema 1.3.11). Del teorema de densidad 2.4.8 se sigue que todo intervalo I_x contiene números racionales; se selecciona el número racional en I_x que tiene el índice n menor en esta enumeración de $\mathbb{Q}$. Es decir, se elige $r_{n(x)} \in \mathbb{Q}$ tal que $I_{r_{n(x)}} = I_x$ y $n(x)$ es el índice n menor tal que $I_{r_n} = I_x$. Por tanto, el conjunto de intervalos distintos I_x, $x \in G$, se pone en correspondencia con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Por consiguiente, este conjunto de intervalos distintos es contable. Q.E.D.

Se deja como ejercicio demostrar que la representación de G como una unión disjunta de intervalos abiertos se encuentra determinada de manera única.

Del teorema precedente *no* se sigue que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si es la intersección de una colección contable de *intervalos* cerrados (¿por qué no?). De hecho, hay conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ que no pueden expresarse como la intersección de una colección contable de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Un conjunto que conste de dos puntos es un ejemplo. (¿Por qué?) Se describe a continuación la construcción de un ejemplo mucho más interesante llamado el conjunto de Cantor.

El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor, el cual se denota por $\mathbb{F}$, es un ejemplo muy interesante de un conjunto (un tanto complicado) que no se parece a ningún otro conjunto que se haya visto hasta este punto. Revela cuán inadecuada puede ser nuestra intuición en ocasiones cuando se intenta describir subconjuntos de $\mathbb{R}$.

El conjunto de Cantor $\mathbb{F}$ puede describirse eliminando una sucesión de intervalos abiertos del intervalo cerrado unitario $I := [0, 1]$. Primero se elimina la tercera parte abierta de en medio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ de $[0, 1]$ para obtener el conjunto

$$F_1 := [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Después se elimina la tercera parte abierta de en medio de los dos intervalos cerrados en F_1 para obtener el conjunto

$$F_2 := [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Se observa que F_2 es la unión de $2^2 = 4$ intervalos cerrados, cada uno de los cuales es de la forma $[k/3^2, (k+1)/3^2]$. Después se elimina la tercera parte abierta de en medio de cada uno de estos conjuntos para obtener F_3, que es la unión de $2^3 = 8$ intervalos cerrados. Se continúa de la misma forma. En general, si se ha construido F_n y consta de la unión de 2^n intervalos de la forma $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, entonces el conjunto F_{n+1} se obtiene eliminando la tercera parte abierta de en medio de cada uno de estos intervalos. El conjunto de Cantor $\mathbb{F}$ es lo que queda después de que este proceso se ha realizado para toda $n \in \mathbb{N}$. (Véase la figura 11.1.1.)

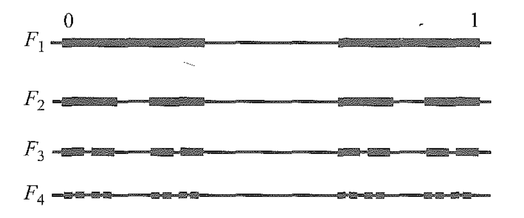


Figura 11.1.1 Construcción del conjunto de Cantor.

11.1.10 Definición El **conjunto de Cantor** $\mathbb{F}$ es la intersección de los conjuntos F_n, $n \in \mathbb{N}$, obtenidos por la eliminación sucesiva de las terceras partes abiertas de en medio, empezando con $[0, 1]$.

Puesto que es la intersección de conjuntos cerrados, $\mathbb{F}$ es en sí mismo un conjunto cerrado por 11.1.5a. Se enlistan a continuación algunas de las propiedades de $\mathbb{F}$ que hacen de él un conjunto tan interesante.

1) La longitud total de los intervalos eliminados es 1.

Se observa que la primera tercera parte de en medio tiene una longitud de 1/3, las dos terceras partes de en medio siguientes tienen longitudes que suman $2/3^2$, las cuatro terceras partes de en medio siguientes tienen longitudes que suman $2^2/3^3$, y así sucesivamente. La longitud total L de los intervalos eliminados está dada por

$$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Utilizando la fórmula para la suma de una serie geométrica, se obtiene

$$L = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(2/3)} = 1.$$

Por tanto, $\mathbb{F}$ es un subconjunto del intervalo unitario $[0, 1]$ cuyo complemento en $[0, 1]$ tiene longitud total 1.

Obsérvese asimismo que la longitud total de los intervalos que constituyen F_n es $(2/3)^n$, cuyo límite es 0 cuando $n \to \infty$. Puesto que $\mathbb{F} \subseteq F_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se observa que *si* es válido decir que $\mathbb{F}$ tiene "longitud", debe tener longitud 0.

2) El conjunto $\mathbb{F}$ no contiene ningún intervalo abierto no vacío como subconjunto.

De hecho, si $\mathbb{F}$ contiene un intervalo abierto no vacío $J := (a, b)$, entonces como $J \subseteq F_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, debe tenerse $0 < b - a \leq (2/3)^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $b - a = 0$, de donde J es un conjunto vacío, lo cual es una contradicción.

3) El conjunto de Cantor $\mathbb{F}$ tiene un número indefinido (incluso incontable) de puntos.

El conjunto de Cantor contiene todos los puntos terminales de los intervalos abiertos eliminados y todos ellos son puntos de la forma $2^k/3^n$, donde $k = 0, 1, \cdots, n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Hay un número infinito de puntos de esta forma.

El conjunto de Cantor en realidad contiene muchos más puntos que los de la forma $2^k/3^n$; de hecho, $\mathbb{F}$ es un conjunto incontable. Se presenta una descripción del razonamiento. Se observa que toda $x \in [0, 1]$ puede escribirse en una expansión ternaria (base 3)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = (.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_3$$

donde cada a_n es 0 o 1 o 2. (Véase la discusión al final de la sección 2.5.) De hecho, cada x que está en uno de los intervalos abiertos eliminados tiene $a_n = 1$ para alguna n; por ejemplo, cada punto en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ tiene $a_1 = 1$. Los puntos terminales de los intervalos eliminados tienen dos expansiones ternarias posibles, una de ellas sin dígitos 1; por ejemplo, $3 = (0.100\cdots)_3 = (0.022\cdots)_3$. Si se elige la expansión sin dígitos 1 para estos puntos, entonces $\mathbb{F}$ consiste en toda $x \in [0, 1]$ que tiene expansión ternaria sin dígitos 1; es decir, a_n es 0 o 2 para toda $n \in \mathbb{N}$. Se define ahora un mapeo φ de $\mathbb{F}$ en $[0, 1]$ de la manera siguiente:

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n/2)}{2^n} \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{F}.$$

Es decir, $\varphi((.a_1 a_2 \cdots)_3) = (.b_1 b_2 \cdots)_2$, donde $b_n = a_n/2$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $(.b_1 b_2 \cdots)_2$ denota la representación *binaria* de un número. En consecuencia, φ es una suprayección de $\mathbb{F}$ sobre $[0, 1]$. Si se supone que $\mathbb{F}$ es contable, el teorema 1.3.10 implica que existe una suprayección ψ de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{F}$, de tal modo que $\varphi \circ \psi$ es una suprayección de $\mathbb{N}$ sobre $[0, 1]$. Otra aplicación del teorema 1.3.10 implica que $[0, 1]$ es un conjunto contable, lo cual contradice el teorema 2.5.5. Por lo tanto, $\mathbb{F}$ es un conjunto incontable.

Ejercicios de la sección 11.1

1. Si $x \in (0, 1)$, sea ε_x como en el ejemplo 11.1.3b. Demostrar que si $|u - x| < \varepsilon_x$, entonces $u \in (0, 1)$.

2. Demostrar que los intervalos (a, ∞) y $(-\infty, a)$ son conjuntos abiertos y que los intervalos $[b, \infty)$ y $(-\infty, b]$ son conjuntos cerrados.

3. Desarrollar el razonamiento de inducción matemática de la demostración del inciso b) de las propiedades de los conjuntos abiertos 11.1.4.

4. Demostrar que $(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1 + 1/n)$, como se afirmó en el ejemplo 11.1.6a.

5. Demostrar que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un conjunto cerrado.

6. Demostrar que $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ no es un conjunto cerrado, pero que $A \cup \{0\}$ es un conjunto cerrado.

7. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es ni abierto ni cerrado.

8. Demostrar que si G es un conjunto abierto y F es un conjunto cerrado, entonces $G \backslash F$ es un conjunto abierto y $F \backslash G$ es un conjunto cerrado.

9. Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}$ es un **punto interior** de $A \subseteq \mathbb{R}$ si existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq A$. Demostrar que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si todo punto de A es un punto interior de A.

10. Se dice que un punto $x \in \mathbb{R}$ es un **punto frontera** de $A \subseteq \mathbb{R}$ si toda vecindad V de x contiene puntos en A y puntos en $\mathcal{C}(A)$. Demostrar que el conjunto A y su complemento $\mathcal{C}(A)$ tienen exactamente los mismos puntos frontera.

11. Demostrar que un conjunto $G \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si no contiene ninguno de sus puntos frontera.

12. Demostrar que un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos frontera.

13. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, sea A° la unión de todos los conjuntos abiertos que están contenidos en A; al conjunto A° se le llama el **interior** de A. Demostrar que A° es un conjunto abierto, que es el conjunto abierto más grande contenido en A, y que un punto z pertenece a A° si y sólo si z es un punto interior de A.

14. Utilizando la notación del ejercicio precedente, sean A, B conjuntos en $\mathbb{R}$. Demostrar que $A^\circ \subseteq A$, que $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ y que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. Demostrar asimismo que $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ y dar un ejemplo que muestre que la inclusión puede ser propia.

15. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, sea A^- la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A; al conjunto A^- se le llama la **cerradura** de A. Demostrar que A^- es un conjunto cerrado, que es el conjunto cerrado menor que contiene a A y que un punto w pertenece a A^- si y sólo si w es o un punto interior o un punto frontera de A.

16. Utilizando la notación del ejercicio precedente, sean A, B conjuntos en $\mathbb{R}$. Demostrar que se tiene $A \subseteq A^-$, $(A^-)^- = A^-$ y que $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$. Demostrar que $(A \cap B)^- \subseteq A^- \cap B^-$ y dar un ejemplo que muestre que la inclusión puede ser propia.

17. Dar un ejemplo de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A^\circ = \emptyset$ y $A^- = \mathbb{R}$.

18. Demostrar que si $F \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado no vacío que está acotado por arriba, entonces sup F pertenece a F.

19. Si G es un conjunto abierto y $x \in G$, demostrar que los conjuntos A_x y B_x de la demostración del teorema 11.1.9 son no vacíos.

20. Si el conjunto A_x de la demostración del teorema 11.1.9 está acotado por abajo, demostrar que $a_x := \text{ínf}\, A_x$ no pertenece a G.

21. Si en la notación usada en la demostración del teorema 11.1.9 se tiene $a_x < y < x$, demostrar que $y \in G$.

22. Si en la notación usada en la demostración del teorema 11.1.9 se tiene $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, demostrar que $b_x = b_y$.

23. Demostrar que todo punto del conjunto de Cantor $\mathbb{F}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{F}$.

24. Demostrar que todo punto del conjunto de Cantor $\mathbb{F}$ es un punto de acumulación de $\mathcal{C}(F)$.

SECCIÓN 11.2 Conjuntos compactos

En análisis avanzado y topología, la noción de un conjunto "compacto" es de enorme importancia. Esto es menos cierto en $\mathbb{R}$ debido a que el teorema de Heine-Borel proporciona una caracterización muy simple de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$. No obstante, la definición y la técnica usadas con respecto a la compacidad son de gran importancia, y la recta real ofrece un lugar apropiado para ver la idea de compacidad por primera vez.

La definición de compacidad hace uso de la noción de cubierta abierta, la cual se define a continuación.

11.2.1 Definición Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una **cubierta abierta** de A es una colección $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ cuya unión contiene a A; es decir,

$$A \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha .$$

Si $\mathcal{G}'$ es una subcolección de conjuntos de $\mathcal{G}$ tal que la unión de los conjuntos en $\mathcal{G}'$ también contiene a A, entonces a $\mathcal{G}'$ se le llama **subcubierta** de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}'$ consiste en un número finito de conjuntos, entonces a $\mathcal{G}'$ se le llama **subcubierta finita** de $\mathcal{G}$.

Puede haber muchas cubiertas abiertas diferentes para un conjunto dado. Por ejemplo, si $A := [1, \infty)$, entonces el lector puede verificar que las siguientes colecciones de conjuntos son todas cubiertas abiertas de A:

$$\mathcal{G}_0 := \{(0,\infty)\},$$
$$\mathcal{G}_1 := \{(r-1, r+1) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\},$$
$$\mathcal{G}_2 := \{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{G}_3 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{G}_4 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 23\}.$$

Se observa que $\mathcal{G}_2$ es una subcubierta de $\mathcal{G}_1$ y que $\mathcal{G}_4$ es una subcubierta de $\mathcal{G}_3$. Desde luego, es posible describir muchas otras cubiertas abiertas de A.

11.2.2 Definición Se dice que un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es **compacto** si *toda* cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.

En otras palabras, un conjunto K es compacto si siempre que está contenido en la unión de una colección $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, entonces está contenido en la unión de algún número *finito* de conjuntos en $\mathcal{G}$.

Es muy importante advertir que para aplicar la definición a fin de demostrar que un conjunto K es compacto, es necesario examinar una colección *arbitraria* de conjuntos abiertos cuya unión contenga a K y demostrar que K está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en la colección dada. Es decir, debe demostrarse que *cualquier* cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita. Por otra parte, para demostrar que un conjunto H *no* es compacto, basta presentar una colección *específica* $\mathcal{G}$ de conjuntos abiertos cuya unión contenga a H, pero tal que la unión de cualquier número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$ no contenga a H. Es decir, H no es compacto si existe alguna cubierta abierta de H que no tenga ninguna subcubierta finita.

11.2.3 Ejemplos **a)** Sea $K := \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Si $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ es una cubierta abierta de K, entonces cada x_i está contenida en algún conjunto G_{α_i} en $\mathcal{G}$. Entonces la unión de los conjuntos en la colección $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ contiene a K, de modo que es una subcubierta finita de $\mathcal{G}$. Puesto que $\mathcal{G}$ es arbitraria, se sigue que el conjunto finito K es compacto.

b) Sea $H := [0, \infty)$. Para demostrar que H no es compacto, se presentará una cubierta abierta que no tiene ninguna subcubierta finita. Si se hace $G_n := (-1, n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, de modo que $\mathcal{G} := \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de H. Sin embargo, si $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ es cualquier subcolección finita de $\mathcal{G}$ y si se hace $m := \sup\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$, entonces

$$G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \cdots \cup G_{n_k} = G_m = (-1, m).$$

Evidentemente, esta unión no contiene a $H = [0, \infty)$. En consecuencia, ninguna subcolección finita de $\mathcal{G}$ contendrá en su unión a H y, por lo tanto, H no es compacto.

c) Sea $J := (0, 1)$. Si se hace $G_n := (1/n, 1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces es inmediato ver que $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Por tanto, $\mathcal{G} := \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de J. Si $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_r}\}$ es cualquier subcolección finita de $\mathcal{G}$ y si se hace $s := \sup\{n_1, n_2, \cdots, n_r\}$, entonces

$$G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \cdots \cup G_{n_r} = G_s = (1/s, 1).$$

Puesto que $1/s$ está en J pero no en G_s, se ve que la unión no contiene a J. Por lo tanto, J no es compacto. □

Se describen a continuación todos los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Se establecerá primero mediante razonamientos bastante directos que cualquier conjunto compacto en $\mathbb{R}$ debe ser cerrado y estar acotado. Después se demostrará que estas propiedades de hecho caracterizan a los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$. Éste es el contenido del teorema de Heine-Borel.

11.2.4 Teorema *Si* K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$, *entonces* K *es cerrado y está acotado.*

Demostración. Se demostrará primero que K está acotado. Para toda $m \in \mathbb{N}$, sea $H_m := (-m, m)$. Puesto que cada H_m es abierto y como $K \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R}$, se ve que la colección $\{H_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Puesto que K es compacto, esta colección tiene una subcubierta finita, por lo que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{m=1}^{M} H_m = H_M = (-M, M).$$

Por lo tanto, K está acotado, ya que está contenido en el intervalo acotado $(-M, M)$.

Se demuestra ahora que K es cerrado probando que su complemento $\mathcal{C}(K)$ es abierto. Para ello, sea $u \in \mathcal{C}(K)$ arbitraria y para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n := \{y \in \mathbb{R} : |y - u| > 1/n\}$. Es un ejercicio demostrar que cada conjunto G_n es abierto y que $\mathbb{R} \setminus \{u\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Puesto que $u \notin K$, se tiene $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Puesto que K es compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m.$$

A partir de este hecho se sigue que $K \cap (u - 1/m, u + 1/m) = \emptyset$, por lo que el intervalo $(u - 1/m, u + 1/m) \subseteq \mathcal{C}(K)$. Pero como u fue un punto arbitrario en $\mathcal{C}(K)$, se infiere que $\mathcal{C}(K)$ es abierto. Q.E.D.

Se establece a continuación que las condiciones del teorema 11.2.4 son tanto necesarias como suficientes para que un subconjunto de $\mathbb{R}$ sea compacto.

11.2.5 Teorema de Heine-Borel *Un subconjunto* K *de* $\mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si es cerrado y está acotado.*

Demostración. En el teorema 11.2.4 se demostró que un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ debe ser cerrado y estar acotado. Para establecer el recíproco, suponer que K es cerrado y que está acotado, y sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ una cubierta abierta de K. Quiere demostrarse que K debe estar contenido en la unión de alguna subcolección finita de $\mathcal{G}$. La demostración se hará por reducción al absurdo. Se supone que:

$$K \text{ no está contenido en la unión de ningún número finito de conjuntos en } \mathcal{G}. \quad (1)$$

Por hipótesis, K está acotado, por lo que existe $r > 0$ tal que $K \subseteq [-r, r]$. Se hace $I_1 := [-r, r]$ y se biseca I_1 en dos subintervalos cerrados $I_1' := [-r, 0]$ e $I_1'' := [0, r]$. Al menos uno de los dos subconjuntos $K \cap I_1'$ y $K \cap I_1''$ debe ser no vacío y tener la propiedad de que no está contenido en la unión de ningún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$. [Porque si los dos conjuntos $K \cap I_1'$ y $K \cap I_1''$ están contenidos en la unión de algún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$, entonces $K = (K \cap I_1') \cup (K \cap I_1'')$ está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$, lo cual contradice el supuesto (1).] Si $K \cap I_1'$ no está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$, se hace $I_2 := I_1'$; en caso contrario, $K \cap I_1''$ tiene esta propiedad y se hace $I_2 := I_1''$.

Se biseca I_2 en dos subintervalos I_2' e I_2''. Si $K \cap I_2'$ es no vacío y no está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$, se hace $I_3 := I_2'$; en caso contrario, $K \cap I_2''$ tiene esta propiedad y se hace $I_3 := I_2''$.

Continuando con este proceso, se obtiene una sucesión de intervalos anidados (I_n). Por la propiedad de los intervalos anidados 2.5.2, existe un punto z que pertenece a todos los I_n, $n \in \mathbb{N}$. Puesto que cada intervalo I_n contiene un número infinito de puntos en K (¿por qué?), el punto z es un punto de acumulación de K. Además, puesto que se supuso que K es cerrado, del teorema 11.1.8 se sigue que $z \in K$. Por lo tanto, existe un conjunto G_λ en $\mathcal{G}$ con $z \in G_\lambda$. Puesto que G_λ es un conjunto abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq G_\lambda.$$

Por otra parte, puesto que los intervalos I_n se obtienen por bisecciones repetidas de $I_1 = [-r, r]$, la longitud de I_n es $r/2^{n-2}$. Se sigue que si n es tan grande que $r/2^{n-2} < \varepsilon$, entonces $I_n \subseteq (z - \varepsilon, z + \varepsilon) \subseteq G_\lambda$. Pero esto significa que si n es tal que $r/2^{n-2} < \varepsilon$, entonces $K \cap I_n$ está contenido en el conjunto *particular* G_λ en $\mathcal{G}$, lo cual contradice la construcción hecha de I_n. Esta contradicción indica que el supuesto (1) de que el conjunto cerrado acotado K requiere un número infinito de conjuntos en $\mathcal{G}$ para cubrirlo es insostenible. Se concluye que K es compacto. Q.E.D.

Observación En el ejemplo 11.2.3b se vio que el conjunto cerrado $H := [0, \infty)$ *no* es compacto; adviértase que H no está acotado. En el ejemplo 11.2.3c se vio

también que el conjunto acotado $J := (0, 1)$ *no* es compacto; adviértase que J no es cerrado. Por tanto, no es posible omitir ninguna de las dos hipótesis del teorema de Heine-Borel.

Es posible combinar el teorema de Heine-Borel y el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8 para obtener una caracterización en términos de sucesiones de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

11.2.6 Teorema *Un subconjunto* K *de* $\mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si toda sucesión en* K *tiene una subsucesión que converge a un punto en* K.

Demostración. Suponer que K es compacto y sea (x_n) una sucesión con $x_n \in K$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Heine-Borel, el conjunto K está acotado, por lo que la sucesión (x_n) está acotada; por el teorema de Bolzano-Weierstrass 3.4.8, existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge. Puesto que K es cerrado (por el teorema 11.2.4), el límite $x := \lim(x_{n_k})$ está en K. Por tanto, toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto de K.

Para establecer el recíproco, se demostrará que si K no es cerrado o no está acotado, entonces debe existir una sucesión en K que no tiene ninguna subsucesión que converge a un punto de K. Primero, si K no es cerrado, entonces existe un punto de acumulación c de K que no pertenece a K. Puesto que c es un punto de acumulación de K, existe una sucesión (x_n) con $x_n \in K$ y $x_n \neq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim(x_n) = c$. Entonces toda subsucesión de (x_n) también converge a c y como $c \notin K$, no existe ninguna subsucesión que converge a un punto de K.

Segundo, si K no está acotado, entonces existe una sucesión (x_n) en K tal que $|x_n| > n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. (¿Por qué?) Entonces toda subsucesión de (x_n) no está acotada, de donde ninguna subsucesión de ella puede converger a un punto de K.

Q.E.D.

Observación Es probable que el lector haya advertido que hay una similitud entre la compacidad del intervalo $[a, b]$ y la existencia de particiones finas-δ para $[a, b]$. De hecho, estas propiedades son equivalentes, cada una de las cuales puede deducirse de las otras. Sin embargo, la compacidad se aplica a conjuntos que son más generales que los intervalos.

Ejercicios de la sección 11.2

1. Presentar una cubierta abierta del intervalo $(1, 2]$ que no tenga ninguna subcubierta finita.

2. Presentar una cubierta abierta de $\mathbb{N}$ que no tenga ninguna subcubierta finita.

3. Presentar una cubierta abierta del conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ que no tenga ninguna subcubierta finita.

4. Demostrar, usando la definición 11.2.2, que si F es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto K en $\mathbb{R}$, entonces F es compacto.

5. Demostrar, usando la definición 11.2.2, que si K_1 y K_2 son conjuntos compactos en $\mathbb{R}$, entonces su unión $K_1 \cup K_2$ es compacta.

6. Usar el teorema de Heine-Borel para demostrar la siguiente versión del teorema de Bolzano-Weierstrass: todo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$. (Adviértase que si un conjunto no tiene puntos de acumulación, entonces es cerrado por el teorema 11.1.8.)

7. Encontrar una colección infinita $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ tales que la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ no sea un conjunto compacto.

8. Demostrar que la intersección de una colección arbitraria de conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ es un conjunto compacto.

9. Sea $(K_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}$ tales que $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots$. Demostrar que existe al menos un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$; es decir, la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ es no vacía.

10. Sea $K \neq \emptyset$ un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Demostrar que ínf K y sup K existen y pertenecen a K.

11. Sea $K \neq \emptyset$ compacto en $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe un punto a en K tal que $|c - a| = \text{ínf}\{|c - x| : x \in K\}$.

12. Sea $K \neq \emptyset$ compacto en $\mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe un punto b en K tal que $|c - b| = \sup\{|c - x| : x \in K\}$.

13. Usar la noción de compacidad para dar una demostración alternativa del ejercicio 5.3.18.

14. Si K_1 y K_2 son conjuntos compactos disjuntos no vacíos, demostrar que existe $k_i \in K_i$ tal que $0 < |k_1 - k_2| = \text{ínf}\{|x_1 - x_2| : x_i \in K_i\}$.

15. Dar un ejemplo de dos conjuntos cerrados disjuntos F_1, F_2 tales que $0 = \text{ínf}\{|x_1 - x_2| : x_i \in F_i\}$.

SECCIÓN 11.3 Funciones continuas

En esta sección se examina la forma en que el concepto de continuidad de funciones puede vincularse con las ideas topológicas de conjuntos abiertos y conjuntos compactos. Algunas de las propiedades fundamentales de las funciones continuas en intervalos presentadas en la sección 5.3 se establecerán en este contexto. Entre otras cosas, estas nuevas argumentaciones demostrarán que el concepto de continuidad y muchas de sus importantes propiedades pueden llevarse a un nivel de abstracción más alto. Esto se discute brevemente en la siguiente sección sobre espacios métricos.

Continuidad

En la sección 5.1 nos ocupamos de la continuidad en un punto, es decir, de la continuidad "local" de funciones. Ahora nos ocuparemos principalmente de la continuidad "global" en el sentido de que se supondrá que las funciones son continuas en la totalidad de sus dominios.

En la sección 5.1 se definió la continuidad de una función $f : A \to \mathbb{R}$ en un punto $c \in A$. El teorema 5.1.2 establecía que f es continua en c si y sólo si para toda vecindad-ε $V_\varepsilon(f(c))$ de $f(c)$ existe una vecindad-δ $V_\delta(c)$ de c tal que si $x \in V_\delta(c) \cap A$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$. Ahora se reformula esta condición para la continuidad en un punto en términos de vecindades generales. (Recuérdese de 11.1.1 que una vecindad en un punto c es cualquier conjunto U que contiene una vecindad-ε de c para alguna $\varepsilon > 0$.)

11.3.1 Lema *Una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *es continua en el punto* c *de* A *si y sólo si para toda vecindad* U *de* $f(c)$ *existe una vecindad* V *de* c *tal que si* $x \in V \cap A$, *entonces* $f(x) \in U$.

Demostración. Suponer que f satisface la condición enunciada. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, se hace $U = V_\varepsilon(f(c))$ y así se obtiene después una vecindad V para la que $x \in V \cap A$ implica que $f(x) \in U$. Si se elige $\delta > 0$ tal que $V_\delta(c) \subseteq V$, entonces $x \in V_\delta(c) \cap A$ implica que $f(x) \in U$; por lo tanto, f es continua en c de acuerdo con el teorema 5.1.2.

Recíprocamente, si f es continua en c en el sentido del teorema 5.1.2, entonces ya que cualquier vecindad U de $f(c)$ contiene una vecindad-ε $V_\varepsilon(f(c))$, se sigue que al tomar la vecindad-δ $V = V_\delta(c)$ de c del teorema 5.1.2 se satisface la condición del lema. Q.E.D.

Cabe señalar que la afirmación de que $x \in V \cap A$ implica que $f(x) \in U$ es equivalente a la afirmación de que $f(V \cap A) \subseteq U$; es decir, que la imagen directa de $V \cap A$ está contenida en U. También por la definición de imagen inversa, esto es lo mismo que $V \cap A \subseteq f^{-1}(U)$. (Véase la definición 1.1.7 para las definiciones de imagen directa e imagen inversa.) Usando esta observación, se obtiene ahora una condición para que una función sea continua en su dominio expresada en términos de conjuntos abiertos. En cursos más avanzados de topología, el inciso b) del siguiente resultado con frecuencia se toma como la definición de continuidad (global).

11.3.2 Teorema de continuidad global *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *una función con dominio* A. *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) f *es continua en todo punto de* A.
b) *Para todo conjunto abierto* G *en* $\mathbb{R}$, *existe un conjunto abierto* H *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $H \cap A = f^{-1}(G)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Suponer que f es continua en todo punto de A y sea G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ dado. Si c pertenece a $f^{-1}(G)$, entonces $f(c) \in G$, y como

G es abierto, G es una vecindad de $f(c)$. Por lo tanto, por el lema precedente, de la continuidad de f se sigue que existe un conjunto abierto $V(c)$ tal que $x \in V(c)$ implica que $f(x) \in G$; es decir, $V(c)$ está contenido en la imagen inversa $f^{-1}(G)$. Se selecciona $V(c)$ para cada c en $f^{-1}(G)$, y sea H la unión de todos estos conjuntos $V(c)$. Por las propiedades de los conjuntos abiertos 11.1.4, el conjunto H es abierto y se tiene $H \cap A = f^{-1}(G)$. Por consiguiente, a) implica b).

b) $\Rightarrow$ a). Sea c cualquier punto en A y sea G una vecindad abierta de $f(c)$. Entonces la condición b) implica que existe un conjunto abierto H en $\mathbb{R}$ tal que $H \cap A = f^{-1}(G)$. Puesto que $f(c) \in G$, se sigue que $c \in H$, de donde H es una vecindad de c. Si $x \in H \cap A$, entonces $f(c) \in G$ y en consecuencia f es continua en c. Por tanto, b) implica a). Q.E.D.

En el caso en que $A = \mathbb{R}$, el resultado precedente se simplifica en cierta medida.

11.3.3 Corolario *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si* $f^{-1}(G)$ *es abierta en* $\mathbb{R}$ *siempre que* G *es abierto.*

Es necesario hacer hincapié en que el teorema de continuidad global 11.3.2 *no* dice que si f es una función continua, entonces la imagen directa $f(G)$ de un conjunto abierto es necesariamente abierta. En general, una función continua no enviará conjuntos abiertos a conjuntos abiertos. Por ejemplo, considérese la función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := x^2 + 1 \qquad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si G es el conjunto abierto $G := (-1, 1)$, entonces la imagen directa bajo f es $f(G) = [1, 2)$, que no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Véanse los ejercicios para ejemplos adicionales.

Preservación de la compacidad

En la sección 5.3 se demostró que una función continua lleva un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ a un intervalo cerrado y acotado $[m, M]$, donde m y M son los valores mínimo y máximo de f en $[a, b]$, respectivamente. Por el teorema de Heine-Borel, éstos son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, por lo que el teorema 5.3.8 es un caso especial del siguiente teorema.

11.3.4 Preservación de la compacidad *Si* K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *y si* $f : K \to \mathbb{R}$ *es continua en* K, *entonces* f(K) *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{G_\lambda\}$ una cubierta abierta del conjunto $f(K)$. Debe demostrarse que $\mathcal{G}$ tiene una subcubierta finita. Puesto que $f(K) \subseteq \bigcup G_\lambda$, se sigue que $K \subseteq \bigcup f^{-1}(G_\lambda)$. Por el teorema 11.3.2, para cada G_λ existe un conjunto abierto H_λ tal que $H_\lambda \cap K = f^{-1}(G_\lambda)$. Entonces la colección $\{H_\lambda\}$ es una cubierta abierta

del conjunto K. Puesto que K es compacto, esta cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita $\{H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, \cdots, H_{\lambda_n}\}$. Entonces se tiene

$$\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\lambda_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} H_{\lambda_i} \cap K \supseteq K.$$

A partir de este resultado se sigue que $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \supseteq f(K)$. En consecuencia, se ha encontrado una subcubierta finita de $\mathcal{G}$. Puesto que $\mathcal{G}$ fue una cubierta abierta arbitraria de $f(K)$, se concluye que $f(K)$ es compacto. Q.E.D.

11.3.5 Algunas aplicaciones A continuación se indica cómo aplicar la noción de compacidad (y el teorema de Heine-Borel) para obtener demostraciones alternativas de algunos resultados importantes que se probaron antes utilizando el teorema de Bolzano-Weierstrass. De hecho, estos teoremas siguen siendo válidos si los intervalos se reemplazan con conjuntos compactos no vacíos arbitrarios en $\mathbb{R}$.

1) El teorema de acotabilidad 5.3.2 es una consecuencia inmediata del teorema 11.3.4 y del teorema de Heine-Borel 11.2.5. De hecho, si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto y si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua en K, entonces $f(K)$ es compacto y, en consecuencia, está acotado.

2) El teorema del máximo-mínimo 5.3.4 también es una consecuencia inmediata del teorema 11.3.4 y del teorema de Heine-Borel. Como antes, se encuentra que $f(K)$ es compacto y, en consecuencia, está acotado en $\mathbb{R}$, de modo que $s^* := \sup f(K)$ existe. Si $f(K)$ es un conjunto finito, entonces $s^* \in f(K)$. Si $f(K)$ es un conjunto infinito, entonces s^* es un punto de acumulación de $f(K)$ [véase el ejercicio 11.2.6]. Puesto que $f(K)$ es un conjunto cerrado, por el teorema de Heine-Borel, se sigue por el teorema 11.1.8 que $s^* \in f(K)$. Se concluye que $s^* = f(x^*)$ para alguna $x^* \in K$.

3) También se puede presentar una demostración del teorema de continuidad uniforme 5.4.3 basada en la noción de compacidad. Para ello, sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua en K. Entonces, dadas $\varepsilon > 0$ y $u \in K$, existe un número $\delta_u := \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u) > 0$ tal que si $x \in K$ y $|x - u| < \delta_u$ entonces $|f(x) - f(u)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Para cada $u \in K$, sea $G_u := (u - \frac{1}{2}\delta_u, u + \frac{1}{2}\delta_u)$, de tal modo que G_u es abierto; se considera la colección $\mathcal{G} = \{G_u : u \in K\}$. Puesto que $u \in G_u$ para $u \in K$, es trivial que $K \subseteq \bigcup_{u \in K} G_u$. Puesto que K es compacto, existe un número finito de conjuntos, digamos $G_{u_1}, \cdots, G_{u_M}$ cuya unión contiene a K. Se define ahora

$$\delta(\varepsilon) := \tfrac{1}{2} \inf\{\delta_{u_1}, \cdots, \delta_{u_M}\},$$

de modo que $\delta(\varepsilon) > 0$. Ahora bien, si $x, u \in K$ y $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, entonces existe alguna u_k con $k = 1, \cdots, M$ tal que $x \in G_{u_k}$; por lo tanto, $|x - u_k| < \frac{1}{2}\delta_{u_k}$. Puesto que se tiene $\delta(\varepsilon) \le \frac{1}{2}\delta_{u_k}$, se sigue que

$$|u - u_k| \le |u - x| + |x - u_k| < \delta_{u_k}.$$

Pero como $\delta_{u_k} = \delta(\frac{1}{2}\varepsilon, u_k)$, se sigue que tanto

$$|f(x) - f(u_k)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{y} \quad |f(u) - f(u_k)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Se tiene por lo tanto $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Se ha demostrado que si $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si x, u son puntos cualesquiera en K con $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, con esto se demuestra que f es uniformemente continua en K, como se afirmó. □

Se concluye esta sección ampliando el teorema de la inversa continua 5.6.5 para funciones cuyos dominios son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ en vez de intervalos en $\mathbb{R}$.

11.3.6 Teorema *Si* K *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *y* $f : K \to \mathbb{R}$ *es una función inyectiva y continua, entonces* f^{-1} *es continua en* $f(K)$.

Demostración. Puesto que K es compacto, el teorema 11.3.4 implica que la imagen $f(K)$ es compacta. Puesto que f es inyectiva por hipótesis, la función inversa f^{-1} está definida de $f(K)$ a K. Sea (y_n) cualquier sucesión convergente en $f(K)$ y sea $y_0 = \text{lím}(y_n)$. Para establecer la continuidad de f^{-1}, se demostrará que la sucesión $(f^{-1}(y_n))$ converge a $f^{-1}(y_0)$.

Sea $x_n := f^{-1}(y_n)$ y, para aplicar el método de reducción al absurdo, suponer que (x_n) no converge a $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (x'_k) tales que $|x'_k - x_0| \geq \varepsilon$ para toda k. Puesto que K es compacto, por el teorema 11.2.6 se concluye que existe una subsucesión (x''_r) de la sucesión (x'_k) que converge a un punto x^* de K. Puesto que $|x^* - x_0| \geq \varepsilon$, se tiene $x^* \neq x_0$. Ahora bien, como f es continua, se tiene $\text{lím}(f(x''_r)) = f(x^*)$. Asimismo, como la subsucesión (y''_n) de (y_n) que corresponde a la subsucesión (x''_n) de (x_n) debe converger al mismo límite que (y_n), se tiene

$$\text{lím}(f(x''_r)) = \text{lím}(y''_n) = y_0 = f(x_0).$$

Se concluye por lo tanto que $f(x^*) = f(x_0)$. Sin embargo, dado que f es inyectiva, esto implica que $x^* = x_0$, lo cual constituye una contradicción. Por tanto, se concluye que f^{-1} lleva sucesiones convergentes en $f(K)$ a sucesiones convergentes en K y, en consecuencia, f^{-1} es continua. Q.E.D.

Ejercicios de la sección 11.3

1. Sea que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

   a) Demostrar que la imagen inversa $f^{-1}(I)$ de un intervalo abierto $I := (a, b)$ es un intervalo abierto, la unión de dos intervalos abiertos o el conjunto vacío, dependiendo de a y b.

   b) Demostrar que si I es un intervalo abierto que contiene a 0, entonces la imagen directa $f(I)$ no es abierta.

2. Sea que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f(x) := 1/(1 + x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

   a) Encontrar un intervalo abierto (a, b) cuya imagen directa bajo f no sea abierta.

   b) Demostrar que la imagen directa del intervalo cerrado $[0, \infty)$ no es cerrada.

3. Sea $I := [1, \infty)$ y sea $f(x) := \sqrt{x-1}$ para $x \in I$. Para toda vecindad-ε $G = (-\varepsilon, +\varepsilon)$ de 0, presentar un conjunto abierto H tal que $H \cap I = f^{-1}(G)$.

4. Sea que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $h(x) := 1$ si $0 \le x \le 1$ y por $h(x) := 0$ en cualquier otro punto. Encontrar un conjunto abierto G tal que $h^{-1}(G)$ sea no abierta y un conjunto cerrado F tal que $h^{-1}(F)$ sea no cerrada.

5. Demostrar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ es abierto en $\mathbb{R}$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Demostrar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \le \alpha\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Demostrar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = k\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$ para toda $k \in \mathbb{R}$.

8. Dar un ejemplo de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$ no sea ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

9. Demostrar que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si para todo conjunto cerrado F en $\mathbb{R}$ la imagen inversa $f^{-1}(F)$ es cerrada.

10. Sea $I := [a, b]$ y sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I. Demostrar que el conjunto $\{x \in I : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

SECCIÓN 11.4 Espacios métricos

Este libro se ha dedicado al estudio cuidadoso del sistema de los números reales y de diferentes procesos de límites que pueden definirse para funciones de una variable real. Uno de los temas centrales fue el estudio de las funciones continuas. En este punto, con una sólida comprensión del análisis en la recta real, se puede iniciar el estudio de espacios más generales y los conceptos de límites relacionados. La generalización de los conceptos fundamentales del análisis real puede hacerse de varias maneras diferentes, pero una de las más provechosas es en el contexto de los espacios métricos, donde métrico es una abstracción de una función distancia.

En esta sección se introduce la idea de espacio métrico para indicar a continuación la manera en que ciertas áreas de la teoría desarrollada en este libro pueden ampliarse a este nuevo contexto. Se examinan los conceptos de vecindad de un punto, de conjuntos abiertos y cerrados, de convergencia de sucesiones y de continuidad de funciones definidas en espacios métricos. Nuestro propósito en esta breve discusión no es desarrollar la teoría de los espacios métricos con gran profundidad, sino poner de manifiesto la manera en que las ideas y técnicas clave

del análisis real pueden ubicarse en un marco más abstracto y general. El lector deberá advertir la forma en que los resultados básicos del análisis en la recta real sirven para motivar y guiar el estudio del análisis en contextos más generales.

La generalización puede servir para dos importantes propósitos. Uno es que los teoremas deducidos en contextos generales con frecuencia pueden aplicarse en muchos casos particulares sin necesidad de una demostración separada para cada caso especial. Un segundo propósito es que al eliminar las características no esenciales (y en ocasiones motivo de distracción) de las situaciones especiales, con frecuencia es posible comprender el significado real de un concepto o teorema.

Métricos

En la recta real, los conceptos básicos de límites se definieron en términos de la distancia $|x - y|$ entre dos puntos x, y en $\mathbb{R}$, y muchos teoremas se demostraron usando la función valor absoluto. De hecho, un estudio atento revela que sólo se requirió un reducido número de propiedades clave del valor absoluto para demostrar muchos resultados fundamentales, y ocurre que estas propiedades pueden extractarse y usarse para definir funciones distancia más generales llamadas "métricos".

11.4.1 Definición Un **métrico** en un conjunto S es una función $d : S \times S \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

a) $d(x, y) \geq 0$ para toda $x, y \in S$ (*positividad*);
b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (*definitividad*);
c) $d(x, y) = d(y, x)$ para toda $x, y \in S$ (*simetría*);
d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para toda $x, y, z \in S$ (*desigualdad del triángulo*)

Un **espacio métrico** (S, d) es un conjunto S junto con un métrico d en S.

Se consideran varios ejemplos de espacios métricos.

11.4.2 Ejemplos **a)** El familiar métrico en $\mathbb{R}$ está definido por

$$d(x,y) := |x - y| \qquad \text{para} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La propiedad 11.4.1d de d se sigue de la desigualdad del triángulo para el valor absoluto porque se tiene

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \\ &\leq |x - z| + |z - y| = d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

para toda $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) La función distancia en el plano obtenida con el teorema de Pitágoras proporciona un ejemplo de un métrico en $\mathbb{R}^2$. Es decir, el métrico d en $\mathbb{R}^2$ se define como sigue: si $P_1 := (x_1, y_1)$ y $P_2 := (x_2, y_2)$ son puntos en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

c) Es posible definir varios métricos diferentes en el mismo conjunto. En $\mathbb{R}^2$ también se puede definir el métrico d_1 como sigue:

$$d_1(P_1, P_2) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Un métrico más en $\mathbb{R}^2$ es d_∞ definido por

$$d_\infty(P_1, P_2) := \sup\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

La verificación de que d_1 y d_∞ satisfacen las propiedades de un métrico se deja como ejercicio.

d) Sea que $C[0, 1]$ denote el conjunto de todas las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$. Para f, g en $C[0, 1]$, se define

$$d_\infty(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Entonces puede verificarse que d_∞ es un métrico en $C[0, 1]$. Este métrico es la norma uniforme de $f - g$ en $[0, 1]$ como se definió en la sección 8.1; es decir $d_\infty(f, g) = \|f - g\|$, donde $\|f\|$ denota la norma uniforme de f en el conjunto $[0, 1]$.

e) Se considera de nuevo $C[0, 1]$, pero ahora se define un métrico diferente d_1 por

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f - g| \qquad \text{para } f, g \in C[0,1].$$

Es posible usar las propiedades de la integral para demostrar que éste es en realidad un métrico en $C[0, 1]$. Los detalles se dejan como ejercicio.

f) Sea S cualquier conjunto no vacío. Para $s, t \in S$ se define

$$d(s,t) := \begin{cases} 0 & \text{si } s = t, \\ 1 & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Es un ejercicio demostrar que d es un métrico en S. Este métrico se llama el **métrico discreto** en el conjunto S. □

Se observa que si (S, d) es un espacio métrico y si $T \subseteq S$, entonces d' definido por $d'(x, y) := d(x, y)$ para toda $x, y \in T$ produce un métrico en T, el cual se denota generalmente por d. Con base en lo anterior, se dice que (T, d) también es un espacio métrico. Por ejemplo, el métrico d de $\mathbb{R}$ definido por el valor absoluto es un métrico en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y, por consiguiente, $(\mathbb{Q}, d)$ también es un espacio métrico.

Vecindades y convergencia

La noción básica necesaria para introducir los conceptos de límites es la de vecindad, la cual se define en espacios métricos como sigue.

11.4.3 Definición Sea (S, d) un espacio métrico. Entonces para $\varepsilon > 0$, la **vecindad-ε** de un punto x_0 en S es el conjunto

$$V_\varepsilon(x_0) := \{x \in S : d(x_0, x) < \varepsilon\}.$$

Una **vecindad** de x_0 es cualquier conjunto U que contiene una vecindad-ε de x_0 para alguna $\varepsilon > 0$.

Cualquier noción definida en términos de vecindades se puede definir y examinar ahora en el contexto de los espacios métricos mediante la modificación apropiada del lenguaje. Se considera primero la convergencia de sucesiones.

Una sucesión en un espacio métrico (S, d) es una función $X : \mathbb{N} \to S$ con dominio $\mathbb{N}$ y codominio en S, y se usa la notación usual para sucesiones; se escribe $X = (x_n)$, pero ahora $x_n \in S$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Cuando en la definición de convergencia en términos de sucesiones se reemplaza el valor absoluto con un métrico, se obtiene la noción de convergencia en un espacio métrico.

11.4.4 Definición Sea (x_n) una sucesión en el espacio métrico (S, d). Se dice que la sucesión (x_n) **converge** a x en S si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_\varepsilon(x)$ para toda $n \geq K$.

Adviértase que como $x_n \in V_\varepsilon(x)$ si y sólo si $d(x_n, x) < \varepsilon$, una sucesión (x_n) converge a x si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe K tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para toda $n \geq K$. En otras palabras, una sucesión (x_n) en (S, d) converge a x si y sólo si la sucesión de números reales $(d(x_n, x))$ converge a 0.

11.4.5 Ejemplos **a)** Considerar $\mathbb{R}^2$ con el métrico d definido en el ejemplo 11.4.2b. Si $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces se afirma que la sucesión (P_n) converge a $P = (x, y)$ con respecto a este métrico si y sólo si las sucesiones de números reales (x_n) y (y_n) convergen a x y y, respectivamente.

Primero, se observa que la desigualdad $|x_n - x| \leq d(P_n, P)$ implica que si (P_n) converge a P con respecto al métrico d, entonces la sucesión (x_n) converge a x; la convergencia de (y_n) se establece de manera similar. El recíproco se sigue de la desigualdad $d(P_n, P) \leq |x_n - x| + |y_n - y|$, la cual se verifica con facilidad. Los detalles se le dejan al lector.

b) Sea d_∞ el métrico en $C[0, 1]$ definido en el ejemplo 11.4.2d. Entonces la sucesión (f_n) en $C[0, 1]$ converge a f con respecto a este métrico si y sólo si (f_n) converge a f uniformemente en el conjunto $[0, 1]$. Esto se establece en el lema 8.1.8 en la discusión de la norma uniforme. □

Sucesiones de Cauchy

La noción de sucesión de Cauchy es un concepto importante en los espacios métricos. La definición se formula como sería de esperarse, con el métrico reemplazando al valor absoluto.

11.4.6 Definición Sea (S, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión (x_n) en S es una **sucesión de Cauchy** si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $H \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para toda $n, m \geq H$.

El teorema de convergencia de Cauchy 3.5.5 para sucesiones en $\mathbb{R}$ establece que una sucesión en $\mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si converge a un punto de $\mathbb{R}$. Este teorema no se cumple para espacios métricos en general, como lo revelan los ejemplos que siguen. Los espacios métricos para los que las sucesiones de Cauchy convergen son de especial importancia.

11.4.7 Definición Se dice que un espacio métrico (S, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en S converge a un punto de S.

En la sección 2.3 la propiedad de completez de $\mathbb{R}$ se enunció en términos de las propiedades de orden al imponer el requisito de que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado por arriba tenga un supremo en $\mathbb{R}$. La convergencia de las sucesiones de Cauchy se deduce como un teorema. De hecho, es posible invertir los papeles de estas propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$: la propiedad de completez de $\mathbb{R}$ puede enunciarse en términos de sucesiones de Cauchy como en 11.4.7, y la propiedad del supremo puede deducirse entonces como un teorema. Puesto que muchos espacios métricos carecen de una estructura de orden apropiada, el concepto de completez debe describirse en términos del métrico y las sucesiones de Cauchy proporcionan el vehículo natural para ello.

11.4.8 Ejemplos **a)** El espacio métrico $(\mathbb{Q}, d)$ de los números racionales con el métrico definido por la función valor absoluto *no* es completo.

Por ejemplo, si (x_n) es una sucesión de números racionales que converge a $\sqrt{2}$, entonces es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, pero no converge a un punto de $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, $(\mathbb{Q}, d)$ no es un espacio métrico completo.

b) El espacio $C[0, 1]$ con el métrico d_∞ definido en 11.4.2d es completo.

Para demostrarlo, suponer que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C[0, 1]$ con respecto al métrico d_∞. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe H tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

para toda $x \in [0, 1]$ y toda $n, m \geq H$. En consecuencia, para toda x la sucesión $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge en $\mathbb{R}$. Se define f como el límite puntual de la sucesión; es decir, $f(x) := \lim(f_n(x))$ para toda $x \in [0, 1]$. Por tanto, de (1) se sigue que para toda $x \in [0, 1]$ y toda $n \geq H$ se tiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Por consiguiente, la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en $[0, 1]$. Puesto que el límite uniforme de las funciones continuas también es continuo (por 8.2.2), la función f está en $C[0, 1]$. Por lo tanto, el espacio métrico $(C[0, 1], d_\infty)$ es completo.

c) Si d_1 es el espacio métrico en $C[0, 1]$ definido en 11.4.2e, entonces el espacio métrico $(C[0, 1], d_1)$ *no* es completo.

Para demostrar esta afirmación, basta presentar una sucesión de Cauchy que no tenga límite en el espacio. Se define la sucesión (f_n) para $n \geq 3$ como sigue (véase la figura 11.4.1):

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 + n/2 - nx & \text{para} \quad 1/2 < x \leq 1/2 + 1/n, \\ 0 & \text{para} \quad 1/2 + 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Adviértase que la sucesión (f_n) converge puntualmente a la función discontinua $f(x) := 1$ para $0 \leq x \leq 1/2$ y $f(x) := 0$ para $1/2 < x \leq 1$. En consecuencia, $f \notin C[0, 1]$; de hecho, no existe ninguna función $g \in C[0, 1]$ tal que $d_1(f_n, g) \to 0$. □

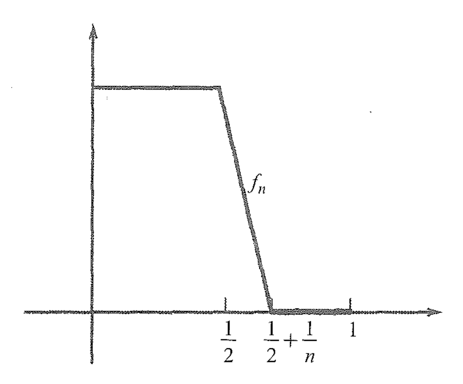


Figura 11.4.1 La sucesión (f_n).

Conjuntos abiertos y continuidad

Con la noción de vecindad definida, las definiciones de conjunto abierto y conjunto cerrado se escriben igual que para los conjuntos en $\mathbb{R}$.

11.4.9 Definición Sea (S, d) un espacio métrico.Se dice que un subconjunto G de S es un conjunto **abierto** en S si para todo punto $x \in S$ existe una vecindad U de x tal que $U \subseteq G$. Se dice que un subconjunto F de S es un conjunto **cerrado** en S si el complemento $S \backslash F$ es un conjunto abierto en S.

Los teoremas 11.1.4 y 11.1.5 referentes a uniones e intersecciones de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados pueden ampliarse sin dificultad a espacios métricos. De hecho, la transposición a espacios métricos de las demostraciones de dichos teoremas puede hacerse con muy pocas modificaciones: simplemente se reemplazan las vecindades-ε $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ en $\mathbb{R}$ con las vecindades-ε $V_\varepsilon(x)$ en S.

Se examina ahora el concepto de continuidad para funciones que mapean un espacio métrico (S_1, d_1) en otro espacio métrico (S_2, d_2). Obsérvese que se modifica la propiedad en 5.1.2 de continuidad para funciones en $\mathbb{R}$ reemplazando las vecindades en $\mathbb{R}$ con vecindades en los espacios métricos.

11.4.10 Definición Sean (S_1, d_1) y (S_2, d_2) espacios métricos y sea $f: S_1 \to S_2$ una función de S_1 a S_2. Se dice que la función f es **continua** en el punto c de S_1 si para toda vecindad-ε $V_\varepsilon(f(c))$ de $f(c)$ existe una vecindad-δ $V_\delta(c)$ de c tal que si $x \in V_\delta(c)$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$.

La formulación ε-δ de la continuidad puede enunciarse como sigue: $f: S_1 \to S_2$ es continua en c si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, c) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(c)) < \varepsilon$.

El teorema de continuidad global puede establecerse para espacios métricos mediante la modificación apropiada de la argumentación para funciones en $\mathbb{R}$.

11.4.11 Teorema de continuidad global *Si* (S_1, d_1) *y* (S_2, d_2) *son espacios métricos, entonces una función* $f: S_1 \to S_2$ *es continua en* S_1 *si y sólo si* $f^{-1}(G)$ *es abierta en* S *siempre que* G *es abierto en* S_2.

La noción de compacidad se amplía de inmediato a espacios métricos. Se dice que un espacio métrico (S, d) es **compacto** si toda cubierta abierta de S tiene una subcubierta finita. Entonces, al modificar la demostración de 11.3.4, se obtiene el siguiente resultado.

11.4.12 Preservación de la compacidad *Si* (S, d) *es un espacio métrico compacto y si la función* $f: S \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces* f(S) *es compacta en* $\mathbb{R}$.

Las importantes propiedades de las funciones continuas dadas en 11.3.5 se siguen entonces de inmediato. El teorema de acotabilidad, el teorema del máximo-mínimo y el teorema de continuidad uniforme para funciones continuas con valores reales en un espacio métrico compacto se establecen mediante la modificación apropiada del lenguaje en las demostraciones dadas en 11.3.5.

Semimétricos

11.4.13 Definición Un **semimétrico** en un conjunto S es una función $d: S \times S \to \mathbb{R}$ que satisface todas las condiciones de la definición 11.4.1, excepto porque la condición b) es reemplazada por la condición más laxa

$$d(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad x = y. \qquad \textbf{(b')}$$

Un **espacio semimétrico** (S, d) es un conjunto S junto con un semimétrico d en S.

Así, todo métrico es un semimétrico y todo espacio métrico es un espacio semimétrico. Sin embargo, el recíproco no es verdadero. Por ejemplo, si $P_1 := (x_1, y_1)$ y $P_2 := (x_2, y_2)$ son puntos en el espacio $\mathbb{R}^2$, es fácil ver que la función d_1 definida por

$$d_1(P_1, P_2) := |x_1 - x_2|,$$

es un semimétrico, pero no es un métrico ya que dos puntos cualesquiera que tengan la misma primera coordenada tienen "distancia-d_1" igual a 0.

Lo que resulta un tanto más interesante, si f, g son funciones cualesquiera en $\mathcal{L}[a, b]$, se ha definido (en la definición 10.2.9) la función distancia:

$$\text{dist}(f,g) := \int_a^b |f - g|.$$

Aquí es claro que dos funciones cualesquiera que son iguales excepto en un conjunto contable de puntos tendrán una distancia igual a 0 entre sí (de hecho, esto también se cumple cuando las funciones son iguales casi en todas partes).

El lector puede seguir de nuevo la exposición de la presente sección y ver que la mayor parte de lo que se ha hecho sigue siendo válido para los semimétricos y los espacios semimétricos. La diferencia principal consiste en que una sucesión en un espacio semimétrico no converge necesariamente a un límite *único*. Aun cuando esto parece ser bastante inusual, en realidad no constituye un problema muy serio y uno puede aprender a ajustarse a esta situación. La otra alternativa es "identificar" los puntos cuya distancia entre sí es 0. Es común recurrir a este procedimiento de identificación, pero esto significa que se está tratando con "clases de equivalencia" y no con puntos individuales. Con frecuencia este remedio es peor que la enfermedad.

Ejercicios de la sección 11.4

1. Demostrar que las funciones d_1 y d_∞ definidas en 11.4.2c son métricos en $\mathbb{R}^2$.

2. Demostrar que las funciones d_∞ y d_1 definidas en 11.4.2d, e son métricos en $C[0, 1]$.

3. Verificar que el métrico discreto en un conjunto S como se definió en 11.4.2f es un métrico.

4. Si $P_n := (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ y d_∞ es el métrico de 11.4.2c, demostrar que (P_n) converge a $P := (x, y)$ con respecto a este métrico si y sólo si (x_n) y (y_n) convergen a x y y, respectivamente.

5. Verificar la conclusión del ejercicio 4 si d_∞ se reemplaza con d_1.

6. Sea S un conjunto no vacío y sea d el métrico discreto definido en 11.4.2f. Demostrar que en el espacio métrico (S, d) una sucesión (x_n) en S converge a x si y sólo si existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para toda $n \geq K$.

7. Demostrar que si d es el métrico discreto en un conjunto S, entonces todo subconjunto de S es tanto abierto como cerrado en (S, d).

8. Sea $P := (x, y)$ y $O := (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$. Dibujar los siguientes conjuntos en el plano:

   a) $\{P \in \mathbb{R}^2 : d_1(O, P) \leq 1\}$,

   b) $\{P \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(O, P) \leq 1\}$.

9. Demostrar que una vecindad-ε de un punto es un conjunto abierto en cualquier espacio métrico.

10. Demostrar el teorema 11.4.11.

11. Demostrar el teorema 11.4.12.

12. Si (S, d) es un espacio métrico, se dice que un subconjunto $A \subseteq S$ está **acotado** si existen $x_0 \in S$ y un número $B > 0$ tales que $A \subseteq \{x \in S : d(x, x_0) \leq B\}$. Demostrar que si A es un subconjunto compacto de S, entonces A es cerrado y está acotado.

Apéndice

A

LÓGICA Y DEMOSTRACIONES

Las ciencias naturales se ocupan del registro de hechos y de la organización de los mismos en un cuerpo coherente del saber para que el hombre pueda entender la naturaleza. Originalmente, las ciencias se restringían en gran medida a la observación, al acopio de información y a su clasificación. Esta clasificación llevó de manera gradual a la formación de diferentes "teorías" que ayudaban a los investigadores a recordar los hechos particulares y a contar con la capacidad de explicar, y en ocasiones de predecir, los fenómenos naturales. La meta última de la mayoría de los científicos es poder organizar su ciencia en una colección coherente de principios y teorías generales para que estos principios les permitan tanto la comprensión de la naturaleza como su aplicación para hacer predicciones del resultado de futuros experimentos. Así, su intención es estar en posición de desarrollar un sistema de principios generales (o axiomas) para su ciencia que les permita *deducir* los hechos y consecuencias particulares a partir de estas leyes generales.

Las matemáticas son diferentes de otras ciencias: por su propia naturaleza, se trata de una ciencia deductiva. Esto no quiere decir que los matemáticos no recaben hechos y hagan observaciones relacionadas con sus investigaciones. De hecho, muchos matemáticos ocupan una gran cantidad de tiempo realizando los cálculos de casos especiales de los fenómenos que están estudiando con la esperanza de descubrir "principios unificadores". (El gran Gauss realizó una enorme cantidad de cálculos y estudió muchos datos numéricos antes de estar en posición de formular una conjetura respecto de la distribución de los números primos.) Sin embargo, incluso después de formular estos principios y conjeturas, el trabajo se encuentra lejos de haber concluido, pues los matemáticos no están satisfechos hasta que las conjeturas se han deducido (es decir, demostrado) de los axiomas de las matemáticas, de las definiciones de los términos y de los resultados (teoremas) que se han demostrado con anterioridad. Así, un enunciado matemático no es un teorema hasta que se ha deducido cuidadosamente de axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados.

Cabe dedicar algunas palabras a los axiomas (es decir, postulados, supuestos, etc.) de las matemáticas. Son pocos los axiomas que se aplican a las matemáticas en su totalidad –los "axiomas de la teoría de conjuntos"– y hay axiomas específicos dentro de las diferentes ramas de las matemáticas. En ocasiones, estos axiomas se enuncian formalmente y en ocasiones se encuentran incluidos en las definiciones. Por ejemplo, en el capítulo 2 se presentó una lista de propiedades que se supone posee el sistema de los números reales; son en realidad un conjunto de axiomas. Como un ejemplo más, la definición de "grupo" en el álgebra abstracta es básicamente un conjunto de axiomas que se supone posee un conjunto de ele-

mentos y el estudio de la teoría de grupos es una investigación de las consecuencias de estos axiomas.

Quienes estudian análisis real por primera vez por lo general no cuentan con gran experiencia en la comprensión (por no mencionar la construcción) de demostraciones. De hecho, uno de los propósitos principales de este curso (y de este libro) es ayudar al lector a adquirir experiencia en el pensamiento crítico que se usa en este proceso deductivo. El propósito de este apéndice es ayudar a que el lector adquiera un conocimiento más a fondo de las técnicas de las demostraciones.

Proposiciones y sus combinaciones

Todas las demostraciones y los razonamientos matemáticos se basan en **proposiciones**, las cuales son enunciados declarativos o cadenas de símbolos inteligibles que pueden calificarse como verdaderos o falsos. No es necesario saber si una proposición dada es en realidad verdadera o falsa, pero debe ser lo uno o lo otro y no puede ser ambas cosas a la vez. (Éste es el *principio del medio excluido.*) Por ejemplo, el enunciado "Los pollos son bonitos" es una cuestión de opinión y no una proposición en el sentido de la lógica. Considérense los siguientes enunciados:

- Llovió en Kuala Lumpur el 2 de junio de 1988.
- Thomas Jefferson era más bajo de estatura que John Adams.
- Los números primos gemelos son infinitos.
- Este enunciado es falso.

Los tres primeros son proposiciones: el primero es verdadero, el segundo es falso y el tercero es verdadero o falso, aunque en este momento no estamos seguros de cuál es el caso. El cuarto enunciado no es una proposición; no puede ser verdadero ni falso porque lleva a conclusiones contradictorias.

Algunas proposiciones (como "$1 + 1 = 2$") son siempre verdaderas; se les llama **tautologías**. Algunas proposiciones (como "$2 = 3$") son siempre falsas; se les llama **contradicciones** o **falacias**. Algunas proposiciones (como "$x^2 = 1$") unas veces son verdaderas y otras son falsas (por ejemplo, es verdadera cuando $x = 1$ y es falsa cuando $x = 3$). Desde luego, para que la proposición sea totalmente clara, es necesario que se haya establecido el contexto apropiado y que se haya definido apropiadamente el significado de los símbolos (por ejemplo, en los ejemplos anteriores es necesario saber que se refieren a la aritmética de enteros).

Se dice que dos proposiciones P y Q son **equivalentes lógicos** si P es verdadera exactamente cuando Q es verdadera (y por consiguiente, P es falsa exactamente cuando Q es falsa). En este caso se acostumbra escribir $P \equiv Q$. Por ejemplo, se escribe

$$(x \text{ es Abraham Lincoln}) \equiv (x \text{ es el dieciseisavo presidente de Estados Unidos})$$

Hay varias maneras diferentes de formar nuevas proposiciones a partir de proposiciones dadas mediante el uso de conectivos lógicos.

Si P es una proposición, entonces su **negación** es la proposición denotada por

$$\text{no } P$$

que es verdadera cuando P es falsa y es falsa cuando P es verdadera. (Una notación común para la negación de P es $\neg P$.) Reflexionando un poco, se determina que

$$P \equiv \text{no}(\text{no } P)$$

Éste es el *principio de la doble negación.*

Si P y Q son proposiciones, entonces su **conjunción** es la proposición denotada por

$$P \text{ y } Q$$

que es verdadera cuando tanto P como Q son verdaderas y es falsa en los demás casos. (Una notación convencional para la conjunción de P y Q es $P \wedge Q$.) Resulta evidente que

$$(P \text{ y } Q) \equiv (Q \text{ y } P)$$

Del mismo modo, la **disyunción** de P y Q es la proposición denotada por

$$P \text{ o } Q$$

que es verdadera cuando al menos una de las proposiciones P y Q es verdadera y sólo es falsa cuando ambas son falsas. En los documentos legales "o" con frecuencia se denota por "y/o" para aclarar que esta disyunción también es verdadera cuando *tanto P como Q* son verdaderas. (Una notación convencional para la disyunción de P y Q es $P \vee Q$) También es evidente que

$$(P \text{ o } Q) \equiv (Q \text{ o } P)$$

A fin de contrastar las proposiciones disyuntivas y las conjuntivas, adviértase que la proposición "$2 < \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} < 3$" es falsa, pero la proposición "$2 < \sqrt{2}$ o $\sqrt{2} < 3$" es verdadera (ya que $\sqrt{2}$ es aproximadamente igual a $1.4142\cdots$).

Reflexionando un poco, se determina que la negación, la conjunción y la disyunción están relacionadas por las *leyes de De Morgan*:

$$\text{no } (P \text{ y } Q) \equiv (\text{no } P) \text{ o } (\text{no } Q)$$
$$\text{no } (P \text{ o } Q) \equiv (\text{no } P) \text{ y } (\text{no } Q)$$

La primera equivalencia puede ilustrarse considerando las proposiciones

$$P : x = 2, \qquad Q : y \in A.$$

La proposición (P y Q) es verdadera cuando tanto ($x = 2$) como ($y \in A$) son verdaderas, y la proposición es falsa cuando al menos una de las proposiciones ($x = 2$) y ($y \in A$) es falsa; es decir, la proposición no (P y Q) es verdadera cuando al menos una de las proposiciones ($x \neq 2$) y ($y \notin A$) se cumple.

Implicaciones

Una manera muy importante de formar una nueva proposición a partir de proposiciones dadas es la **implicación** (o **condicional**), denotada por

$$(P \Rightarrow Q), \quad (\text{si } P \text{ entonces } Q) \quad \text{o} \quad (P \text{ implica } Q).$$

Aquí a P se le llama la **hipótesis** y a Q se le llama la **conclusión** de la implicación. Para ayudar a entender los valores de verdad de la implicación, considérese la proposición

Si hoy me saco la lotería, entonces le voy a comprar un coche a Pedro.

Evidentemente, esta proposición es falsa si me saco la lotería y no le compro un coche a Pedro. ¿Qué pasa si no me saco la lotería hoy? Bajo estas circunstancias, no he hecho ninguna promesa acerca de comprarle un coche a nadie, y como la condición de ganar la lotería no se realizó, el hecho de no haberle comprado un coche a Pedro no deberá considerarse como romper una promesa. Por tanto, la implicación se considera verdadera cuando la hipótesis no se satisface.

En los razonamientos matemáticos, las implicaciones son motivo de gran interés cuando la hipótesis es verdadera, pero no hay gran interés en ellas cuando la hipótesis es falsa. El procedimiento aceptado es tomar la proposición $P \Rightarrow Q$ como falsa únicamente cuando P es verdadera y Q es falsa; en los casos restantes la proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera. (Por consiguiente, si P es falsa, entonces se conviene en tomar la proposición $P \Rightarrow Q$ como verdadera sin importar si Q es verdadera o falsa. Esto podrá parecerle extraño al lector, pero resulta ser conveniente en la práctica, además de ser consecuente con las demás reglas de la lógica.)

Se observa que la definición de $P \Rightarrow Q$ tiene el equivalente lógico

$$\text{no } (P \text{ y } (\text{no } Q)),$$

ya que esta proposición sólo es falsa cuando P es verdadera y Q es falsa, y es verdadera en los demás casos. De la primera ley de De Morgan y del principio de la doble negación también se sigue que $P \Rightarrow Q$ es equivalente lógico de la proposición

$$(\text{no } P) \text{ o } Q,$$

ya que esta proposición es verdadera a menos que tanto (no P) como Q sean falsas; es decir, a menos que P sea verdadera y Q sea falsa.

Contrapositivo y recíproco

Como un ejercicio, el lector deberá demostrar que la implicación $P \Rightarrow Q$ es equivalente lógico de la implicación

$$(\text{no } Q) \Rightarrow (\text{no } P),$$

que se llama el **contrapositivo** de la implicación $P \Rightarrow Q$. Por ejemplo, si $P \Rightarrow Q$ es la implicación

Si estoy en París, entonces estoy en Francia,

entonces el contrapositivo (no Q) $\Rightarrow$ (no P) es la implicación

Si no estoy en Francia, entonces no estoy en París.

La equivalencia de estas dos proposiciones se pone de manifiesto después de reflexionar un poco. Al intentar establecer una implicación, en ocasiones es más sencillo establecer el contrapositivo, que es su equivalente lógico. (Este hecho se explicará con mayor detalle más adelante.)

Si se da una implicación $P \Rightarrow Q$, entonces también se puede formar la proposición

$$Q \Rightarrow P,$$

a la que se llama el **recíproco** de $P \Rightarrow Q$. El lector deberá estar atento para no confundir el recíproco de una implicación con su contrapositivo, ya que son proposiciones muy diferentes. Mientras que el contrapositivo es un equivalente lógico de la implicación dada, el recíproco no lo es. Por ejemplo, el recíproco de la proposición

Si estoy en París, entonces estoy en Francia,

es la proposición

Si estoy en Francia, entonces estoy en París.

Puesto que es posible estar en Francia pero no en París, es evidente que estas dos proposiciones *no* son equivalentes lógicos.

Hay una última manera de formar proposiciones que se mencionará aquí. Se trata de la **doble implicación** (o **bicondicional**), que se denota por

$$P \Leftrightarrow Q \qquad \text{o} \qquad P \text{ si y sólo si } Q,$$

y que se define por

$$(P \Rightarrow Q) \text{ y } (Q \Rightarrow P).$$

Es un ejercicio directo demostrar que $P \Leftrightarrow Q$ es verdadera precisamente cuando P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas.

Contexto y cuantificadores

En cualquier forma de comunicación es importante que los individuos tengan un contexto adecuado en mente. Proposiciones como "Hoy vi a María" pueden no ser particularmente informativas si quien escucha conoce a varias personas de nombre María. Del mismo modo, si alguien llega a la mitad de una disertación matemática y ve la ecuación $x^2 = 1$ en el pizarrón, es conveniente que sepa qué entiende

el expositor por la literal x y el símbolo 1. ¿Es x un entero? ¿Una función? ¿Una matriz? ¿Un subgrupo de un grupo dado? ¿El símbolo 1 denota un número natural? ¿La función identidad? ¿La matriz identidad? ¿El subgrupo trivial de un grupo?

Con frecuencia quienes participan en la discusión de un tema conocen bien el contexto, pero siempre es una buena idea establecerlo desde un principio. Por ejemplo, muchas proposiciones matemáticas incluyen una o más variables cuyos valores por lo general afectan el valor de verdad o falsedad de las mismas, por lo que siempre debería aclararse cuáles son los valores posibles de las variables.

Con mucha frecuencia las proposiciones matemáticas incluyen expresiones tales como "para todo", "para cualquier", "para alguna", "existe", "hay", etcétera. Por ejemplo, se pueden tener las proposiciones

$$\text{Para todo entero } x,\ x^2 = 1$$

y

$$\text{Existe un entero } x \text{ tal que } x^2 = 1.$$

Evidentemente la primera proposición es falsa, como se constata al tomar $x = 3$; sin embargo, la segunda proposición es verdadera, ya que se puede tomar $x = 1$ o $x = -1$.

Si se ha establecido el contexto de que se habla de enteros, entonces las proposiciones anteriores se pueden abreviar sin ambigüedades como

$$\text{Para cualquier } x,\ x^2 = 1$$

y

$$\text{Existe } x \text{ tal que } x^2 = 1.$$

La primera proposición incluye el **cuantificador universal** "para toda", y en ella se hace una afirmación (en este caso falsa) acerca de *todos* los enteros. La segunda proposición incluye el **cuantificador existencial** "existe", y en ella se hace una afirmación (en este caso verdadera) acerca de *al menos un* entero.

Estos dos cuantificadores ocurren con tanta frecuencia que los matemáticos acostumbran usar el símbolo $\forall$ para representar el cuantificador universal y el símbolo $\exists$ para representar el cuantificador existencial. Es decir,

$\forall$ denota "para toda",
$\exists$ denota "existe".

Aun cuando en este libro no se usan estos símbolos, es importante que el lector sepa cómo leer las fórmulas donde aparezcan. Por ejemplo, la proposición

$$(\forall x)(\exists y)(x + y = 0) \qquad \text{(i)}$$

(entendida para enteros) puede leerse

$$\text{Para todo entero } x, \text{ existe un entero } y \text{ tal que } x + y = 0.$$

Del mismo modo, la proposición

$$(\exists y)(\forall x)(x + y = 0) \qquad \text{(ii)}$$

puede leerse

Existe un entero y tal que para todo entero x, $x + y = 0$.

Estas dos proposiciones son muy diferentes; por ejemplo, la primera es verdadera y la segunda es falsa. La moraleja es que el *orden* en que aparecen los dos tipos diferentes de cuantificadores es *muy importante*. También debe subrayarse que si una expresión matemática con cuantificadores incluye varias variables, se debe suponer que los valores de las variables posteriores dependen de los valores de las variables que se mencionan primero. Así, en la proposición (i) (verdadera) anterior, el valor de y depende del valor de x; en este caso, si $x = 2$, entonces $y = -2$, mientras que si $x = 3$, entonces $y = -3$.

Es importante que el lector sepa cómo hacer la negación de una proposición que incluya cuantificadores. En principio, el método es simple.

a) Para demostrar que es falso que todo elemento x en algún conjunto posee cierta propiedad $\mathcal{P}$, basta presentar un **contraejemplo** (es decir, un elemento particular en el conjunto que no posea dicha propiedad); y
b) Para demostrar que es falso que existe un elemento y en algún conjunto que satisface cierta propiedad $\mathcal{P}$, es necesario probar que ningún elemento y en el conjunto tiene dicha propiedad.

Por lo tanto, en el proceso de formar una negación,

$$\text{no } (\forall x)\mathcal{P} \quad \text{pasa a ser} \quad (\exists x) \text{ no } \mathcal{P}$$

y del mismo modo

$$\text{no } (\exists y)\mathcal{P} \quad \text{pasa a ser} \quad (\forall y) \text{ no } \mathcal{P}.$$

Cuando están presentes varios cuantificadores, estos cambios se usan repetidamente. Así, la negación de la proposición (i) (verdadera) dada anteriormente pasa a ser, de manera sucesiva,

$$\begin{aligned} &\text{no } (\forall x)\ (\exists y)\ (x + y = 0),\\ &(\exists x) \text{ no } (\exists y)\ (x + y = 0),\\ &(\exists x)\ (\forall y) \text{ no } (x + y = 0),\\ &(\exists x)\ (\forall y)\ (x + y \neq 0). \end{aligned}$$

La última proposición se puede expresar en palabras como:

Existe un entero x tal que para todo entero y, $x + y \neq 0$.

(Esta proposición es, desde luego, falsa.)

Del mismo modo, la negación de la proposición (ii) (falsa) dada anteriormente pasa a ser, de manera sucesiva,

$$\begin{aligned}&\text{no } (\exists y)\,(\forall x)\,(x+y=0),\\&(\forall y) \text{ no } (\forall x)\,(x+y=0),\\&(\forall y)\,(\exists x) \text{ no } (x+y=0),\\&(\forall y)\,(\exists x)\,(x+y\neq 0).\end{aligned}$$

La última proposición puede expresarse en palabras como:

Para todo entero y, existe un entero x tal que $x + y \neq 0$.

Adviértase que esta proposición es verdadera y que el valor (o los valores) de x que hace $x + y \neq 0$ depende de y, en general.

Del mismo modo, puede considerarse que la proposición

Para toda $\delta > 0$, el intervalo $(-\delta, \delta)$
contiene un punto que pertenece al conjunto A,

incluye la negación

Existe $\delta > 0$ tal que el intervalo $(-\delta, \delta)$
no contiene ningún punto que está en A.

La primera proposición puede simbolizarse como

$$(\forall \delta > 0)\,(\exists y \in A)\,(y \in (-\delta, \delta)),$$

y su negación puede simbolizarse como

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in A)\,(y \notin (-\delta, \delta))$$

o como

$$(\exists \delta > 0)\,(A \cap (-\delta, \delta) = \emptyset).$$

Es la firme opinión de los autores que, si bien el uso de este tipo de simbología con frecuencia resulta conveniente, *no* es un sustituto de la reflexión. De hecho, los lectores ordinariamente deberán razonar por sí mismos cuál es la negación de una proposición y no confiar a ciegas en la simbología. Aun cuando una notación y simbología convenientes con frecuencia pueden ser un útil auxiliar para el razonamiento, nunca pueden ser un sustituto adecuado del pensamiento y la comprensión.

Demostraciones directas

Sean P y Q proposiciones. Al afirmar que la hipótesis P de la implicación $P \Rightarrow Q$ implica la conclusión Q (o que $P \Rightarrow Q$ es un teorema) se afirma que siempre que la hipótesis P es verdadera, entonces Q es verdadera.

La construcción de una **demostración directa** de $P \Rightarrow Q$ requiere la construcción de una cadena de proposiciones $R_1, R_2, \cdots, R_n$ tal que

$$P \Rightarrow R_1, \quad R_1 \Rightarrow R_2, \quad \cdots, \quad R_n \Rightarrow Q.$$

(La *ley del silogismo* establece que si $R_1 \Rightarrow R_2$ y $R_2 \Rightarrow R_3$ son verdaderas, entonces $R_1 \Rightarrow R_3$ es verdadera.) Esta construcción no suele ser una tarea sencilla; puede requerir intuición y considerable esfuerzo. Con frecuencia requiere también experiencia y suerte.

Al construir una demostración directa, con frecuencia se trabaja hacia delante a partir de P y hacia atrás a partir de Q. Nos interesan las consecuencias lógicas de P; es decir, las proposiciones $Q_1, \cdots, Q_k$ tales que $P \Rightarrow Q_i$. Y también se podrían examinar las proposiciones $P_1, \cdots, P_r$ tales que $P_j \Rightarrow Q$. Si se puede trabajar hacia delante a partir de P y hacia atrás a partir de Q de tal modo que la cadena "se conecte" en alguno de los pasos intermedios, entonces se tiene una demostración. Con frecuencia en el proceso de intentar establecer $P \Rightarrow Q$ uno se encuentra con que es necesario fortalecer la hipótesis (es decir, agregar supuestos a P) o debilitar la conclusión (es decir, reemplazar a Q por una consecuencia que no sea equivalente a Q).

La mayoría de los estudiantes están familiarizados con las demostraciones "directas" del tipo descrito arriba, pero daremos aquí un ejemplo elemental. Se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1 *El cuadrado de un entero impar también es un entero impar.*

Si se hace que n simbolice un entero, entonces la hipótesis es:

$$P : n \text{ es un entero impar.}$$

La conclusión del teorema es:

$$Q : n^2 \text{ es un entero impar.}$$

Se necesita la definición de entero impar, por lo que se introduce la proposición

$$R_1 : n = 2k - 1 \text{ para algún entero } k.$$

Se tiene entonces $P \Rightarrow R_1$. Quiere deducirse la proposición $n^2 = 2m - 1$ para algún entero m, ya que ésta implicaría Q. Se puede obtener esta proposición usando el álgebra:

$$\begin{aligned} R_2 &: n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1, \\ R_3 &: n^2 = (4k^2 - 4k + 2) - 1, \\ R_4 &: n^2 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1. \end{aligned}$$

Si se hace $m = 2k^2 - 2k + 1$, entonces m es un entero (¿por qué?) y se ha deducido la proposición

$$R_5 : n^2 = 2m - 1.$$

Por tanto, se tiene $P \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_2 \Rightarrow R_3 \Rightarrow R_4 \Rightarrow R_5 \Rightarrow Q$ y el teorema queda demostrado.

Desde luego, ésta es una manera complicada de presentar una demostración. Normalmente, la lógica formal se omite y el razonamiento se da en un estilo más literario, con enunciados en lenguaje común. La demostración anterior puede reescribirse en un estilo más satisfactorio de la siguiente manera.

***Demostración del teorema* 1** Si n es un entero impar, entonces $n = 2k - 1$ para algún entero k. Entonces el cuadrado de n está dado por $n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$. Si se hace $m = 2k^2 - 2k + 1$, entonces m es un entero (¿por qué?) y $n^2 = 2m - 1$. Por lo tanto, n^2 es un entero impar. Q.E.D.

En este punto tal vez se quiera hacer un razonamiento preliminar para demostrar que $2k^2 - 2k + 1$ es un entero siempre que k es un entero. En este caso, este hecho podría plantearse y demostrarse como un **lemma**, que generalmente es un resultado preliminar necesario para la demostración de un teorema, pero que por sí mismo es de poco interés.

Dicho sea de paso, las letras "Q.E.D." se refieren a *quod erat demonstrandum*, expresión en latín que significa "lo que se quería demostrar".

Demostraciones indirectas

Hay básicamente dos tipos de demostraciones indirectas: (i) las demostraciones por el contrapositivo y (ii) las demostraciones por reducción al absurdo. Los dos tipos de demostraciones se inician con el supuesto de que la conclusión Q es falsa, en otras palabras, que la proposición "no Q" es verdadera.

(i) Demostraciones por el contrapositivo En lugar de demostrar $P \Rightarrow Q$, puede probarse su equivalente lógico: no $Q \Rightarrow$ no P.

Considérese el teorema:

Teorema 2 *Si* n *es un entero y* n^2 *es par, entonces* n *es par.*

La negación de "Q : n es par" es la proposición "no Q : n es impar". La hipótesis "P : n^2 es par" tiene una negación similar, por lo que el contrapositivo es la implicación: si n es impar, entonces n^2 es impar. Pero éste es exactamente el teorema 1, el cual se demostró anteriormente. Por lo tanto, con esto el teorema 2 queda demostrado.

La demostración por el contrapositivo suele ser conveniente cuando el cuantificador universal está presente, ya que la forma contrapositiva incluirá entonces el cuantificador existencial. El siguiente teorema es un ejemplo de esta situación.

Teorema 3 *Sea* $\mathrm{a} \geq 0$ *un número real. Si para toda* $\varepsilon > 0$ *se tiene* $0 \leq \mathrm{a} < \varepsilon$, *entonces* $\mathrm{a} = 0$.

Demostración. Si $a = 0$ es falsa, entonces, como $a \geq 0$, debe tenerse $a > 0$. En este caso, si se escoge $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$, se tiene entonces $\varepsilon_0 > 0$ y $\varepsilon_0 < a$, de donde la hipótesis $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$ es falsa. Q.E.D.

Se presenta a continuación un ejemplo más de una demostración por el contrapositivo.

Teorema 4 *Si* m, n *son números naturales tales que* $m + n \geq 20$, *entonces o* $m \geq 10$ *o* $n \geq 10$.

Demostración. Si la conclusión es falsa, entonces debe tenerse tanto $m < 10$ como $n < 10$. (Recuérdese la ley de De Morgan.) Entonces al sumar las dos desigualdades se obtiene $m + n < 10 + 10 = 20$, por lo que la hipótesis es falsa. Q.E.D.

(ii) **Demostración por reducción al absurdo** Este método de demostración hace uso del hecho de que si C es una contradicción (es decir, una proposición que siempre es falsa, tal como "$1 = 0$"), entonces las dos proposiciones

$$(P \text{ y } (\text{no } Q)) \Rightarrow C, \qquad P \Rightarrow Q$$

son equivalentes lógicos. Por tanto, $P \Rightarrow Q$ se establece demostrando que la proposición (P y (no Q)) implica una contradicción.

Teorema 5 *Sea* $a > 0$ *un número real. Si* $a > 0$, *entonces* $1/a > 0$.

Demostración. Se supone que la proposición $a > 0$ es verdadera y que la proposición $1/a > 0$ es falsa. Así, $1/a \leq 0$. Pero como $a > 0$ es verdadera, de las propiedades de orden de $\mathbb{R}$ se sigue que $a(1/a) \leq 0$. Puesto que $1 = a(1/a)$, se infiere que $1 \leq 0$. Sin embargo, esta conclusión contradice el resultado conocido de que $1 > 0$. Q.E.D.

Hay varias demostraciones clásicas por reducción al absurdo (conocidas también como *reductio ad absurdum*) en la literatura matemática. Una de ellas es la demostración de que no existe ningún número racional r que satisfaga $r^2 = 2$. (Éste es el teorema 2.1.4 en el texto.) Otra es la demostración del carácter infinito de los números primos, la cual se encuentra en los *Elementos* de Euclides. Recuérdese que un número natural p es primo si sus únicos divisores enteros son 1 y p. Se supondrán los resultados básicos de que todo número primo es mayor que 1 y que todo número natural mayor que 1 o es primo o es divisible por un número primo.

Teorema 6 (*Elementos* de Euclides, Libro IX, Proposición 20.) *Hay una infinitud de números primos.*

Demostración. Si se supone por el contrario que los números primos son finitos, entonces puede suponerse que $S = \{p_1, \cdots, p_n\}$ es el conjunto de *todos* los números primos. Se hace $m = p_1 \cdots p_n$, el producto de todos los primos, y se hace $q = m + 1$. Puesto que $q > p_i$ para toda i, se observa que q no está en S y, en consecuencia, que q no es un número primo. Entonces existe un primo p que es divisor de q. Puesto que p es primo, entonces $p = p_j$ para alguna j, por lo que p es un divisor de m. Pero si p divide tanto a m como a $q = m + 1$, entonces p es divisor de la diferencia $q - m = 1$. Sin embargo, esto es imposible, por lo que se ha llegado a una contradicción. Q.E.D.

Apéndice

B

CONJUNTOS FINITOS Y CONTABLES

Se establecerán los resultados que se enunciaron sin demostración en la sección 1.3. El lector deberá remitirse a dicha sección para las definiciones.

Al primer resultado se le llama en ocasiones el "principio del palomar". Puede interpretarse diciendo que si m palomas se ponen en n casillas de un palomar y $m > n$, entonces al menos dos palomas deben compartir una de las casillas. Se trata de un resultado de uso frecuente en análisis combinatorio que da lugar a varias consecuencias útiles.

B.1 Teorema *Sean* $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ *con* $\mathrm{m} > \mathrm{n}$. *Entonces no existe una inyección de* $\mathbb{N}_{\mathrm{m}}$ *en* $\mathbb{N}_{\mathrm{n}}$.

Demostración. La demostración se hará por inducción matemática respecto a n.

Si $n = 1$ y si g es cualquier mapeo de $\mathbb{N}_m$ $(m > 1)$ en $\mathbb{N}_1$, entonces es evidente que $g(1) = \cdots = g(m) = 1$, por lo que g no es inyectiva.

Suponer que $k > 1$ es tal que si $m > k$, no hay ninguna inyección de $\mathbb{N}_m$ en $\mathbb{N}_k$. Se demostrará que si $m > k + 1$, entonces no hay ninguna función $h : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_{k+1}$ que sea una inyección.

Caso 1: Si el codominio $h(\mathbb{N}_m) \subseteq \mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k+1}$, entonces la hipótesis de inducción implica que h no es una inyección de $\mathbb{N}_m$ en $\mathbb{N}_k$ y, por lo tanto, tampoco en $\mathbb{N}_{k+1}$.

Caso 2: Suponer que $h(\mathbb{N}_m)$ no está contenido en $\mathbb{N}_k$. Si más de un elemento de $\mathbb{N}_m$ se mapea en $k + 1$, entonces h no es una inyección. Por lo tanto, puede suponerse que una sola $p \in \mathbb{N}_m$ es mapeada en $k + 1$ por h. Se define ahora $h_1 : \mathbb{N}_{m-1} \to \mathbb{N}_k$ por

$$h_1(q) := \begin{cases} h(q) & \text{si } q = 1, \cdots, p-1, \\ h(q+1) & \text{si } q = p, \cdots, m-1. \end{cases}$$

Puesto que la hipótesis de inducción implica que h_1 no es una inyección en $\mathbb{N}_k$, es inmediato ver que h no es una inyección en $\mathbb{N}_{k+1}$. Q.E.D.

Se demuestra a continuación que un conjunto finito determina un número único en $\mathbb{N}$.

1.3.2 Teorema de unicidad *Si* S *es un conjunto finito, entonces el número de elementos en* S *es un número único en* $\mathbb{N}$.

Demostración. Si el conjunto S tiene m elementos, existe una biyección f_1 de $\mathbb{N}_m$ en S. Si S también tiene n elementos, existe una biyección f_2 de $\mathbb{N}_m$ en S. Si $m > n$, entonces (por el ejercicio 19 de la sección 1.1) $f_2^{-1} \circ f_2$ es una biyección de $\mathbb{N}_m$ en $\mathbb{N}_n$, lo que contradice el teorema B.1. Si $n > m$, entonces $f_1^{-1} \circ f_1$ es una biyección de $\mathbb{N}_n$ en $\mathbb{N}_m$, lo que contradice el teorema B.1. Por lo tanto, debe tenerse $m = n$.

Q.E.D.

B.2 Teorema *Si* n $\in \mathbb{N}$, *no existe una inyección de* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}_n$.

Demostración. Suponer que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_n$ es una inyección y sea $m := n + 1$. Entonces la restricción de f a $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}$ también es una inyección en $\mathbb{N}_n$. Pero esto contradice el teorema B.1. Q.E.D.

1.3.3 Teorema *El conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales es un conjunto infinito.*

Demostración. Si $\mathbb{N}$ es un conjunto finito, existe alguna $n \in \mathbb{N}$ y una biyección f de $\mathbb{N}_n$ en $\mathbb{N}$. En este caso, la función inversa f^{-1} es una biyección (y en consecuencia es una inyección) de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}_n$. Pero esto contradice el teorema B.2. Q.E.D.

A continuación se establece el teorema 1.3.8 definiendo una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Se obtendrá la fórmula explícita para el procedimiento de conteo de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que se muestra en la figura 1.3.1; el lector deberá remitirse a dicha figura durante el análisis siguiente. El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se considera como una colección de diagonales; la primera diagonal tiene 1 punto, la segunda tiene 2 puntos, $\cdots$, y la k-ésima diagonal tiene k puntos. Con base en el ejemplo 1.2.4a, el número total de puntos en las diagonales 1 a la k está dado entonces por

$$\psi(k) := 1 + 2 + \cdots + k = \tfrac{1}{2}k(k+1).$$

El hecho de que ψ es estrictamente creciente se sigue por inducción matemática y

$$\psi(k+1) = \psi(k) + (k+1) \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

El punto (m, n) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ está en la k-ésima diagonal cuando $k = m + n - 1$, y es el m-ésimo punto en esa diagonal cuando se avanza hacia abajo de izquierda a derecha. [Por ejemplo, el punto (3, 2) está en la cuarta diagonal (ya que $3 + 2 - 1 = 4$) y es el tercer punto en esa diagonal.] Por lo tanto, en el procedimiento de conteo que se ilustra en la figura 1.3.1, el conteo del punto (m, n) se hace contando primero los puntos en las primeras $k - 1 = m + n - 2$ diagonales y sumando después m. De acuerdo con este análisis, la función de conteo $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está dada por

$$h(m,n) := \psi(m+n-2) + m \qquad \text{para} \quad (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \tag{2}$$

[Por ejemplo, el punto (3, 2) se cuenta como el número $h(3, 2) = \psi(5 - 2) + 3 = \psi(3) + 3 = 6 + 3 = 9$, como en la figura 1.3.1. Asimismo, el punto (17, 25) se cuenta como el número $h(17, 25) = \psi(40) + 17 = 837$.] Aun cuando este razonamiento geométrico ha sido sugerente y ha llevado a la fórmula de conteo (2), es necesario demostrar que h es en realidad una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

1.3.8 Teorema *El conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es enumerable.*

Demostración. Se demostrará que la función h definida en (2) es una biyección.

a) Se demostrará primero que h es inyectiva. Si $(m, n) \neq (m', n')$, entonces (i) $m + n \neq m' + n'$ o (ii) $m + n = m' + n'$ y $m \neq m'$.

En el caso (i), puede suponerse que $m + n < m' + n'$. Entonces, al usar la fórmula (1), el hecho de que ψ es creciente y $m' > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} h(m,n) &= \psi(m+n-2)+m \leq \psi(m+n-2)+(m+n-1) \\ &= \psi(m+n-1) \leq \psi(m'+n'-2) \\ &< \psi(m'+n'-2)+m' = h(m',n'). \end{aligned}$$

En el caso (ii), si $m + n = m' + n'$ y $m \neq m'$, entonces

$$h(m,n)-m = \psi(m+n-2) = \psi(m'+n'-2) = h(m',n')-m',$$

de donde $h(m, n) \neq h(m', n')$.

b) Ahora se demuestra que h es suprayectiva.

Evidentemente, $h(1, 1) = 1$. Si $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 2$, se podrá encontrar un par $(m_p, n_p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $h(m_p, n_p) = p$. Puesto que $p < \psi(p)$, entonces el conjunto $E_p := \{k \in \mathbb{N} : p \leq \psi(k)\}$ es no vacío. Utilizando la propiedad del buen orden 1.2.1, se hace que $k_p > 1$ sea el último elemento en E_p. (Esto significa que p está en la k_p-ésima diagonal.) Puesto que $p \geq 2$, de la ecuación (1) se sigue que

$$\psi(k_p - 1) < p \leq \psi(k_p) = \psi(k_p - 1) + k_p.$$

Sea $m_p := p - \psi(k_p - 1)$ de tal modo que $1 \leq m_p \leq k_p$, y sea $n_p := k_p - m_p + 1$ de tal modo que $1 \leq n_p \leq k_p$ y $m_p + n_p - 1 = k_n$. Por lo tanto,

$$h(m_p, n_p) = \psi(m_p + n_p - 2) + m_p = \psi(k_p - 1) + m_p = p.$$

En consecuencia, h es una biyección y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable. Q.E.D.

El siguiente resultado es crucial para demostrar los teoremas 1.3.9 y 1.3.10.

B.3 Teorema *Si* $A \subseteq \mathbb{N}$ *y* A *es infinito, existe una función* $\varphi : \mathbb{N} \to A$ *tal que* $\varphi(n + 1) > \varphi(n) \geq n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Además,* φ *es una biyección de* $\mathbb{N}$ *en* A.

Demostración. Puesto que A es infinito, es no vacío. Se usará la propiedad del buen orden 1.2.1 de $\mathbb{N}$ para presentar una definición recursiva de φ.

Puesto que $A \neq \emptyset$, existe al menos un elemento de A, el cual se define como $\varphi(1)$; por lo tanto, $\varphi(1) \geq 1$.

Puesto que A es infinito, el conjunto $A_1 := A \backslash \{\varphi(1)\}$ es no vacío y se define $\varphi(2)$ como el elemento mínimo de A_1. Por lo tanto, $\varphi(2) > \varphi(1) \geq 1$, por lo que $\varphi(2) \geq 2$.

Suponer que φ se ha definido de tal modo que satisface $\varphi(n + 1) > \varphi(n) \geq n$ para $n = 1, \cdots, k - 1$, de donde $\varphi(k) > \varphi(k - 1) \geq k - 1$, por lo que $\varphi(k) \geq k$. Puesto que el conjunto A es infinito, el conjunto

$$A_k := A \setminus \{\varphi(1), \cdots, \varphi(k)\}$$

es no vacío y se define $\varphi(k+1)$ como el elemento mínimo de A_k. Por lo tanto, $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ y como $\varphi(k) \geq k$, se tiene también $\varphi(k+1) \geq k+1$. Por lo tanto, φ está definida en la totalidad de $\mathbb{N}$.

Se afirma que φ es una inyección. Si $m > n$, entonces $m = n + r$ para alguna $r \in \mathbb{N}$. Si $r = 1$, entonces $\varphi(m) = \varphi(n+1) > \varphi(n)$. Suponer que $\varphi(n+k) > \varphi(n)$; se demostrará que $\varphi(n+(k+1)) > \varphi(n)$. De hecho, esto se sigue del hecho de que $\varphi(n+(k+1)) = \varphi((n+k)+1) > \varphi(n+k) > \varphi(n)$. Puesto que $\varphi(m) > \varphi(n)$ siempre que $m > n$, se sigue que φ es una inyección.

Se afirma que φ es una suprayección de $\mathbb{N}$ en A. De no ser así, el conjunto $\tilde{A} := A \backslash \varphi(\mathbb{N})$ es no vacío, y se hace que p sea el elemento mínimo en $\tilde{A}$. Se afirma que p pertenece al conjunto $\{\varphi(1), \cdots, \varphi(p)\}$. De hecho, si esto no se cumple, entonces

$$p \in A \backslash \{\varphi(1), \cdots, \varphi(p)\} = A_p,$$

por lo que $\varphi(p+1)$, al ser el último elemento en A_p, debe satisfacer $\varphi(p+1) \leq p$. Pero esto contradice el hecho de que $\varphi(p+1) > \varphi(p) \geq p$. Por lo tanto, $\tilde{A}$ es vacío y φ es una suprayección en A. Q.E.D.

B.4 Teorema *Si* A $\subseteq \mathbb{N}$, *entonces* A *es contable.*

Demostración. Si A es finito, entonces es contable, por lo que basta considerar el caso en que A es infinito. En este caso, el teorema B.3 implica que existe una biyección φ de $\mathbb{N}$ en A, por lo que A es enumerable y, en consecuencia, contable. Q.E.D.

1.3.9 Teorema *Suponer que* S *y* T *son conjuntos y que* T $\subseteq$ S.

a) *Si* S *es un conjunto contable, entonces* T *es un conjunto contable.*
b) *Si* T *es un conjunto incontable, entonces* S *es un conjunto incontable.*

Demostración. a) Si S es un conjunto finito, del teorema 1.3.5a se sigue que T es finito y, por lo tanto, contable. Si S es enumerable, entonces existe una biyección ψ de S en $\mathbb{N}$. Puesto que $\psi(S) \subseteq \mathbb{N}$, el teorema B.4 implica que $\psi(S)$ es contable. Puesto que la restricción de ψ a T es una biyección en $\psi(T)$ y $\psi(T) \subseteq \mathbb{N}$ es contable, se sigue que T también es contable.

b) Esta afirmación es el contrapositivo de la afirmación hecha en el inciso a). Q.E.D.

Apéndice C

LOS CRITERIOS DE RIEMANN Y LEBESGUE

Se presentan aquí las demostraciones de los criterios de Riemann y Lebesgue para que una función sea Riemann integrable. Se aborda primero el criterio de Riemann, el cual es interesante en sí mismo y lleva al agudo criterio de Lebesgue.

C.1 Criterio de integrabilidad de Riemann *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

b) *Para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* $\mathcal{P}_\varepsilon$ *tal que si* $\dot{\mathcal{P}}_1$, $\dot{\mathcal{P}}_2$ *son particiones etiquetadas cualesquiera que tienen los mismos subintervalos que* $\mathcal{P}_\varepsilon$, *entonces*

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}_1) - S(f;\dot{\mathcal{P}}_2)| < \varepsilon. \tag{1}$$

c) *Para toda* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* $\mathcal{P}_\varepsilon = \{I_i\}_{i=1}^n = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ *tal que si* $m_i := \inf\{f(x) : x \in I_i\}$ *y* $M_i := \sup\{f(x) : x \in I_i\}$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < 2\varepsilon. \tag{2}$$

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) Dada $\varepsilon > 0$, sea $\eta_\varepsilon > 0$ como en el criterio de Cauchy 7.2.1 y sea $\mathcal{P}_\varepsilon$ cualquier partición con $\|\mathcal{P}_\varepsilon\| < \eta_\varepsilon$. Entonces si $\dot{\mathcal{P}}_1$, $\dot{\mathcal{P}}_2$ son particiones etiquetadas cualesquiera con los mismos subintervalos que $\mathcal{P}_\varepsilon$, entonces $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \eta_\varepsilon$ y $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \eta_\varepsilon$, por lo que (1) se cumple.

b) $\Rightarrow$ c) Dada $\varepsilon > 0$, sea $\mathcal{P}_\varepsilon = \{I_i\}_{i=1}^n$ una partición como en el inciso b) y sean m_i y M_i como en la afirmación del inciso c). Puesto que m_i es un ínfimo y M_i es un supremo, existen los puntos u_i y v_i en I_i con

$$f(u_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{y} \quad M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(v_i),$$

por lo que se tiene

$$M_i - m_i < f(v_i) - f(u_i) + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n.$$

Si estas desigualdades se multiplican por $(x_i - x_{i-1})$ y se suman, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}(f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon.$$

Se hace $\dot{\mathcal{Q}}_1 := \{(I_i, u_i)\}_{i=1}^{n}$ y $\dot{\mathcal{Q}}_2 := \{(I_i, v_i)\}_{i=1}^{n}$, de tal modo que estas particiones etiquetadas tienen los mismos subintervalos que $\mathcal{P}_\varepsilon$. Asimismo, la suma del lado derecho de la desigualdad es igual a $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1)$. En consecuencia, de (1) se sigue que se cumple la desigualdad (2).

c) $\Rightarrow$ a) Se definen las funciones escalonadas α_ε y ω_ε en $[a, b]$ por

$$\alpha_\varepsilon(x) := m_i \qquad \text{y} \qquad \omega_\varepsilon(x) := M_i \qquad \text{para} \quad x \in (x_{i-1}, x_i),$$

y $\alpha_\varepsilon(x_i) := f(x_i) := \omega_\varepsilon(x_i)$ para $i = 0, 1, \cdots, n$; entonces $\alpha_\varepsilon(x) \le f(x) \le \omega_\varepsilon(x)$ para $x \in [a, b]$. Puesto que α_ε y ω_ε son funciones escalonadas, son Riemann integrables y

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad \int_a^b \omega_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Se sigue por lo tanto que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Si se aplica (2), se tiene que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, el teorema de compresión implica que $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Q.E.D.

Se ha visto ya que toda función continua en $[a, b]$ es Riemann integrable. En el ejemplo 7.1.6 se vio también que la función de Thomae es Riemann integrable. Puesto que la función de Thomae tiene un conjunto contable de puntos de discontinuidad, es evidente que la continuidad no es una condición necesaria para la integrabilidad de Riemann. De hecho, tiene sentido preguntar "qué tan discontinua" puede ser una función y, no obstante, seguir siendo Riemann integrable. El criterio de Riemann arroja algo de luz en cuanto a esta pregunta al demostrar que las sumas de la forma (2) deben ser arbitrariamente pequeñas. Puesto que los términos $(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ en esta suma son todos ≥ 0, se sigue que cada uno de estos términos debe ser pequeño. Un término como éstos será pequeño si: (i) la diferencia $M_i - m_i$ es pequeña (que será el caso si la función es continua en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$), o si (ii) un intervalo donde la diferencia $M_i - m_i$ no es pequeña tiene longitud pequeña.

El criterio de Lebesgue, el cual se examina a continuación, hace más precisas estas ideas. Pero antes es conveniente contar con la noción de oscilación de una función.

C.2 Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $S \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, la **oscilación de f en S** se define como

$$W(f;S) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}. \tag{3}$$

Es inmediato ver que también puede escribirse

$$\begin{aligned} W(f;S) &= \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\} \\ &= \sup\{f(x) : x \in S\} - \inf\{f(x) : x \in S\}. \end{aligned}$$

También es trivial que si $S \subseteq T \subseteq A$, entonces

$$0 \le W(f;S) \le W(f;T) \le 2 \cdot \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Si $r > 0$, recordar que la vecindad-r de $c \in A$ es el conjunto

$$V_r(c) := \{x \in A : |x - c| < r\}.$$

C.3 Definición Si $c \in A$, la **oscilación de f en c** se define por

$$w(f;c) := \inf\{W(f;V_r(c)) : r > 0\} = \lim_{r \to 0+} W(f;V_r(c)). \tag{4}$$

Puesto que $r \mapsto W(f; V_r(c))$ es una función creciente para $r > 0$, este límite por la derecha existe y es igual al ínfimo indicado.

C.4 Lema *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *está acotada y* $c \in A$, *entonces* f *es continua en* c *si y sólo si la oscilación* $w(f; c) = 0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si f es continua en c, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in V_r(c)$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Por lo tanto, si $x, y \in V_r(c)$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, de donde $0 \le w(f; c) \le W(f; V_r(c)) \le \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, esto implica que $w(f; c) = 0$.

($\Leftarrow$) Si $w(f; c) = 0$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $s > 0$ con $W(f; V_s(c)) < \varepsilon$. Por tanto, si $|x - c| < s$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, y f es continua en c. Q.E.D.

Se presentan a continuación los detalles de la demostración del criterio de integrabilidad de Lebesgue. Se recuerda primero la enunciación del teorema.

Criterio de integrabilidad de Lebesgue *Una función acotada* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es Riemann integrable si y sólo si es continua casi en todas partes en* $[a, b]$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ que está dada y, para toda $k \in \mathbb{N}$, sea $H_k := \{x \in [a, b] : w(f; x) > 1/2^k\}$. Se demostrará que H_k está contenido en la unión de un número finito de intervalos que tienen longitud total $< \varepsilon/2^k$.

Por el criterio de Riemann, existe una partición $\mathcal{P}_k = \{[x_{i-1}^k, x_i^k]\}_{i=1}^{n(k)}$ tal que si m_i^k (o bien M_i^k) es el ínfimo (o bien el supremo) de f en el intervalo $[x_{i-1}^k, x_i^k]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n(k)}(M_i^k - m_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) < \varepsilon/4^k.$$

Si $x \in H_k \cap (x_{i-1}^k, x_i^k)$, existe $r > 0$ tal que $V_r(x) \subseteq (x_{i-1}^k, x_i^k)$, de donde

$$1/2^k \le w(f;x) \le W(f;V_r(x)) \le M_i^k - m_i^k.$$

Si una sumatoria sobre aquellas i con $H_k \cap (x_{i-1}^k, x_i^k) \neq \emptyset$ se denota por Σ', entonces

$$(1/2^k)\sum{}'(x_i^k - x_{i-1}^k) \le \sum_{i=1}^{n(k)}(M_i^k - m_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) \le \varepsilon/4^k,$$

de donde se sigue que

$$\sum{}'(x_i^k - x_{i-1}^k) \le \varepsilon/2^k.$$

Puesto que H_k difiere de la unión de los conjuntos $H_k \cap (x_i^k - x_{i-1}^k)$ por a lo sumo un número finito de los puntos de partición, se concluye que H_k está contenido en la unión de un número finito de intervalos de discontinuidad con longitud total $< \varepsilon/2^k$.

Por último, puesto que $D := \{x \in [a, b] : w(f; x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$, se sigue que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de $f \in \mathcal{R}[a, b]$ es un conjunto nulo.

($\Leftarrow$) Sea $|f(x)| \le M$ para $x \in [a, b]$ y suponer que el conjunto D de los puntos de discontinuidad de f es un conjunto nulo. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto contable $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos con $D \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) < \varepsilon/2M$. Siguiendo a R. A. Gordon, se definirá una medida sobre $[a, b]$ que resultará de utilidad.

i) Si $t \notin D$, entonces f es continua en t y existe $\delta(t) > 0$ tal que si $x \in V_{\delta(t)}(t)$ entonces $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$, de donde

$$0 \le M_t - m_t := \sup\{f(x) : x \in V_{\delta(t)}(t)\} - \inf\{f(x) : x \in V_{\delta(t)}(t)\} \le \varepsilon.$$

ii) Si $t \in D$, se elige $\delta(t) > 0$ tal que $V_{\delta(t)} \subseteq J_k$ para alguna k. Para estos valores de t, se tiene $0 \le M_t - m_t \le 2M$.

Por tanto, se ha definido una medida δ sobre $[a, b]$. Si $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ es una partición fina-δ de $[a, b]$, se separan los índices i en los dos conjuntos disjuntos

$$S_c := \{i : t_i \notin D\} \quad \text{y} \quad S_d := \{i : t_i \in D\}.$$

Si $\dot{\mathcal{P}}$ es fina-δ, se tiene $[x_{i-1}, x_i] \subseteq V_{d(t_i)}(t_i)$, de donde se sigue que $M_i - m_i \le M_{t_i} - m_{t_i}$. Por consiguiente, si $i \in S_c$, entonces $M_i - m_i \le \varepsilon$, en tanto que si $i \in S_d$ se tiene $M_i - m_i \le 2M$. Sin embargo, la colección de intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con $i \in S_d$ está contenida en la unión de los intervalos $\{J_k\}$ cuya longitud total es $< \varepsilon/2M$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i\in S_c}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in S_d}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i\in S_c}\varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in S_d}2M(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \varepsilon(b-a) + 2M\cdot(\varepsilon/2M) \leq \varepsilon(b-a+1).
\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se concluye que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Q.E.D.

Apéndice

D INTEGRACIÓN APROXIMADA

Se darán aquí las demostraciones de los teoremas 7.4.3, 7.4.6 y 7.4.8. No se repetirá la enunciación de estos resultados, y se usará la notación introducida en la sección 7.4 y se hará referencia a las ecuaciones numeradas en ella. Se verá que se hace uso de algunos resultados importantes de los capítulos 5 y 6 en estas demostraciones.

Demostración del teorema 7.4.3. Si $k = 1, 2, \cdots, n$, sea $a_k := a + (k-1)h$ y sea que $\varphi_k : [0, h] \to \mathbb{R}$ esté definida por

$$\varphi_k(t) := \tfrac{1}{2}t[f(a_k) + f(a_k + t)] - \int_{a_k}^{a_k+t} f(x)\,dx$$

para $t \in [0, h]$. Adviértase que $\varphi_k(0) = 0$ y que (por el teorema 7.3.6)

$$\begin{aligned}\varphi_k'(t) &= \tfrac{1}{2}[f(a_k) + f(a_k+t)] + \tfrac{1}{2}tf'(a_k+t) - f(a_k+t)\\ &= \tfrac{1}{2}[f(a_k) - f(a_k+t)] + \tfrac{1}{2}tf'(a_k+t).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\varphi_k'(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}\varphi_k''(t) &= -\tfrac{1}{2}f'(a_k+t) + \tfrac{1}{2}f'(a_k+t) + \tfrac{1}{2}tf''(a_k+t)\\ &= \tfrac{1}{2}tf''(a_k+t).\end{aligned}$$

Ahora sea que A, B estén definidos por

$$A := \inf\{f''(x) : x \in [a,b]\}, \qquad B := \sup\{f''(x) : x \in [a,b]\}$$

de modo que se tiene $\frac{1}{2}At \le \varphi_k''(t) \le \frac{1}{2}Bt$ para $t \in [0, h]$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Al integrar y aplicar el teorema 7.3.1, se obtiene (ya que $\varphi_k'(0) = 0$) que $\frac{1}{4}At^2 \le \varphi_k'(t) \le \frac{1}{4}Bt^2$ para $t \in [0, h]$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Al integrar de nuevo y tomar $t = h$, se obtiene (ya que $\varphi_k(0) = 0$) que

$$\tfrac{1}{12}Ah^3 \le \varphi_k(h) \le \tfrac{1}{12}Bh^3$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$. Si se suman estas desigualdades y se observa que

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(h) = T_k(f) - \int_a^b f(x)\,dx,$$

se concluye que $\frac{1}{12}Ah^3n \le T_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{12}Bh^3n$. Puesto que $h = (b-a)/n$, se tiene

$$\tfrac{1}{12}A(b-a)h^2 \le T_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \le \tfrac{1}{12}B(b-a)h^2.$$

Puesto que f'' es continua en $[a, b]$, de las definiciones de A y B y del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 se sigue que existe un punto c en $[a, b]$ tal que la ecuación (4) de la sección 7.4 se cumple. Q.E.D.

Demostración del teorema 7.4.6. Si $k = 1, 2, \cdots, n$, sea $c_k := a + (k - \frac{1}{2})h$ y sea que $\psi_k : [0, \frac{1}{2}h] \to \mathbb{R}$ esté definida por

$$\psi_k(t) := \int_{c_k-t}^{c_k+t} f(x)\,dx - f(c_k)2t$$

para $t \in [0, \frac{1}{2}h]$. Adviértase que $\psi_k(0) = 0$ y que como

$$\psi_k(t) := \int_{c_k}^{c_k+t} f(x)\,dx - \int_{c_k}^{c_k-t} f(x)\,dx - f(c_k)2t,$$

se tiene

$$\begin{aligned}\psi_k'(t) &= f(c_k+t) - f(c_k-t)(-1) - 2f(c_k)\\ &= [f(c_k+t) + f(c_k-t)] - 2f(c_k).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\psi_k'(0) = 0$ y

$$\begin{aligned}\psi_k''(t) &= f'(c_k+t) + f'(c_k-t)(-1)\\ &= f'(c_k+t) - f'(c_k-t).\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio 6.2.4, existe un punto $c_{k,t}$ con $|c_k - c_{k,t}| < t$ tal que $\psi_k''(t) = 2tf''(c_{k,t})$. Si se hacen A y B como en la demostración del teorema 7.4.3, se tiene $2tA \le \psi_k''(t) \le 2tB$ para $t \in [0, h/2]$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Se sigue como antes que

$$\tfrac{1}{3}At^3 \le \psi_k(t) \le \tfrac{1}{3}Bt^3$$

para toda $t \in [0, \frac{1}{2}h]$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Si se hace $t = \frac{1}{2}h$, se obtiene

$$\tfrac{1}{24}Ah^3 \le \psi_k(\tfrac{1}{2}h) \le \tfrac{1}{24}Bh^3.$$

Al sumar estas desigualdades y observar que

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \int_a^b f(x)\,dx - M_n(f),$$

se concluye que

$$\tfrac{1}{24}Ah^3 n \le \int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) \le \tfrac{1}{24}Bh^3 n.$$

Si se usa el hecho de que $h = (b-a)/n$ y se aplica el teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 a f'' en $[a, b]$, se concluye que existe un punto $\gamma \in [a, b]$ tal que (7) de la sección 7.4 se cumple. Q.E.D.

Demostración del teorema 7.4.8. Si $k = 0, 1, 2, \cdots, \tfrac{1}{2}n - 1$, sea $c_k := a + (2k+1)h$ y sea que $\varphi_k : [0, h] \to \mathbb{R}$ esté definida por

$$\varphi_k(t) := \tfrac{1}{3}t[f(c_k - t) + 4f(c_k) + f(c_k + t)] - \int_{c_k - t}^{c_k + t} f(x)\,dx.$$

Evidentemente, $\varphi_k(0) = 0$ y

$$\varphi_k'(t) = \tfrac{1}{3}t[-f'(c_k - t) + f'(c_k + t)] - \tfrac{2}{3}[f(c_k - t) - 2f(c_k) + f(c_k + t)],$$

por lo que $\varphi_k'(0) = 0$ y

$$\varphi_k''(t) = \tfrac{1}{3}t[f''(c_k - t) + f''(c_k + t)] - \tfrac{1}{3}[-f'(c_k - t) + f'(c_k + t)],$$

por lo que $\varphi_k''(0) = 0$ y

$$\varphi_k'''(t) = \tfrac{1}{3}t[f'''(c_k + t) - f'''(c_k - t)].$$

Por consiguiente, del teorema del valor medio 6.2.4 se sigue que existe $\gamma_{k,t}$ con $|c_k - \gamma_{k,t}| \le t$ tal que $\varphi_k'''(t) = \tfrac{2}{3}t^2 f^{(4)}(\gamma_{k,t})$. Si se hace que A y B estén definidos por

$$A := \inf\{f^{(4)}(x) : x \in [a,b]\} \quad \text{y} \quad B := \sup\{f^{(4)}(x) : x \in [a,b]\},$$

entonces se tiene

$$\tfrac{2}{3}At^2 \le \varphi_k'''(t) \le \tfrac{2}{3}Bt^2$$

para $t \in [0, h]$, $k = 0, 1, \cdots, \tfrac{1}{2}n - 1$. Así, después de tres integraciones, esta desigualdad pasa a ser

$$\frac{1}{90}At^5 \le \varphi_k(t) \le \frac{1}{90}Bt^5$$

para toda $t \in [0, h]$, $k = 0, 1, \cdots, \tfrac{1}{2}n - 1$. Si se hace $t = h$, se obtiene

$$\frac{1}{90}Ah^5 \le \varphi_k(h) \le \frac{1}{90}Bh^5$$

para $k = 0, 1, \cdots, \tfrac{1}{2}n - 1$. Si se suman estas $\tfrac{1}{2}n$ desigualdades y se observa que

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \varphi_k(h) = S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx,$$

se concluye que

$$\frac{1}{90}Ah^5\frac{n}{2} \leq S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{90}Bh^5\frac{n}{2}.$$

Puesto que $h = (b - a)/n$, del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7 (aplicado a $f^{(4)}$) se sigue que existe un punto $c \in [a, b]$ tal que la relación (10) de la sección 7.4 se cumple. Q.E.D.

Apéndice E

DOS EJEMPLOS

En este apéndice se presenta un ejemplo de una función continua que no tiene derivada en ningún punto y de una curva continua en $\mathbb{R}^2$ cuyo codominio contiene el cuadrado unitario completo de $\mathbb{R}^2$. En ambas demostraciones se usa el criterio M de Weierstrass 9.4.6.

Una función continua que no es derivable en ninguna parte

El ejemplo que se presenta es una modificación del que construyó B. L. van der Waerden en 1930. Sea que $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esté definida por $f_0(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \operatorname{ínf}\{|x - k| : k \in \mathbb{Z}\}$, por lo que f_0 es una función continua con forma de "diente de sierra" que consta de rectas con pendiente ± 1 en los intervalos $[k/2, (k+1)/2]$, $k \in \mathbb{Z}$. Para toda $m \in \mathbb{N}$, sea $f_m(x) := (1/4^m)\, f_0(4^m x)$, por lo que f_m también es una función continua con forma de diente de sierra cuya gráfica consta de rectas con pendiente ± 1 y con $0 \le f_m(x) \le 1/(2 \cdot 4^m)$. (Véase la figura E.1.)

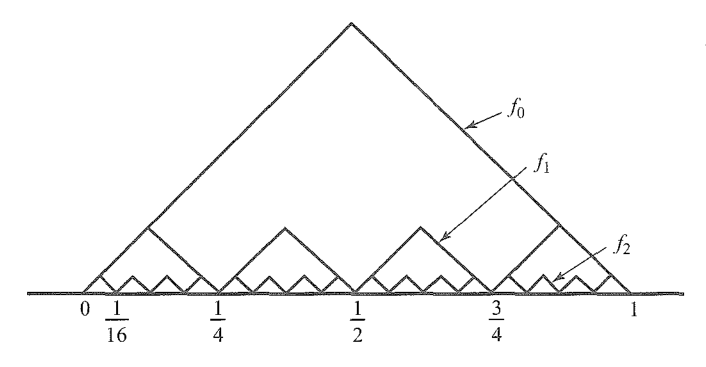


Figura E.1 Gráficas de f_0, f_1 y f_2.

Se define ahora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) := \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$. El criterio M de Weierstrass implica que la serie es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$; en consecuencia, g es continua en $\mathbb{R}$. Se demostrará a continuación que g *no* es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n := \pm 1/4^{n+1}$, donde el signo se elige de tal modo que tanto $4^n x$ como $4^n(x + h_n)$ estén en el mismo intervalo $[k/2, (k+1)/2]$. Puesto que f_0 tiene pendiente ± 1 en este intervalo, entonces

$$\varepsilon_n := \frac{f_n(x+h_n)-f_n(x)}{h_n} = \frac{f_0(4^n x + 4^n h_n) - f_0(4^n x)}{4^n h_n} = \pm 1.$$

De hecho, si $m < n$, entonces la gráfica de f_m también tiene pendiente ± 1 en el intervalo entre x y $x + h_n$, y por tanto

$$\varepsilon_m := \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x)}{h_n} = \pm 1 \qquad \text{para} \quad m < n.$$

Por otra parte, si $m > n$, entonces $4^m(x + h_n) - 4^m x = \pm 4^{m-n-1}$ es un entero, y como f_0 tiene periodo igual a 1, se sigue que

$$f_m(x+h_n) - f_m(x) = 0.$$

Por consiguiente, se tiene

$$\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_m(x+h_n)-f_m(x)}{h_n} = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m,$$

de donde el cociente diferencial $(g(x + h_n) - g(x))/h_n$ es un entero impar si n es par y es un entero par si n es impar. Por lo tanto, el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

no existe, por lo que g no es derivable en el punto arbitrario $x \in \mathbb{R}$.

Una curva que llena el espacio

Se presenta ahora un ejemplo de una curva que llena el espacio que fue construido por I. J. Schoenberg en 1936. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función par continua con periodo 2 dada por

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 \le t \le 1/3, \\ 3t - 1 & \text{para} \quad 1/3 < t < 2/3, \\ 1 & \text{para} \quad 2/3 \le t \le 1. \end{cases}$$

(Véase la figura E.2.) Para $t \in [0, 1]$, se definen las funciones

$$f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k} t)}{2^{k+1}} \qquad \text{y} \qquad g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k+1} t)}{2^{k+1}}.$$

Puesto que $0 \le \varphi(x) \le 1$ y es continua, el criterio M de Weierstrass implica que f y g son continuas en $[0, 1]$; además, $0 \le f(t) \le 1$ y $0 \le g(t) \le 1$. Se demostrará a continuación que un punto arbitrario (x_0, y_0) en $[0, 1] \times [0, 1]$ es la imagen bajo (f, g) de algún punto $t_0 \in [0, 1]$. De hecho, sea que x_0 y y_0 tengan los desarrollos binarios (= base 2):

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots \qquad \text{y} \qquad y_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \cdots,$$

donde toda a_k es igual a 0 o a 1. Se demostrará que $x_0 = f(t_0)$ y $y_0 = g(t_0)$, donde t_0 tiene el desarrollo ternario (= base 3)

$$t_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a_k}{3^{k+1}} = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \frac{2a_2}{3^3} + \frac{2a_3}{3^4} + \cdots.$$

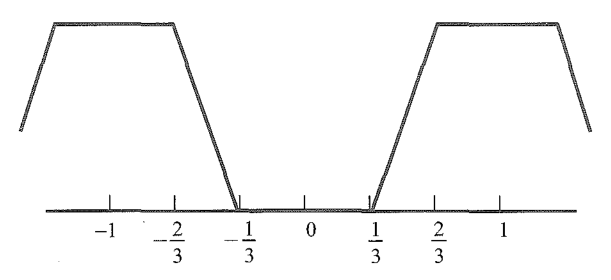


Figura E.2 Gráfica de φ.

Primero, se observa que la fórmula anterior produce un número en [0, 1]. Se observa asimismo que si $a_0 = 0$, entonces $0 \le t_0 \le 1/3$, de tal modo que $\varphi(t_0) = 0$, y si $a_0 = 1$, entonces $2/3 \le t_0 \le 1$, de tal modo que $\varphi(t_0) = 1$; por lo tanto, en ambos casos $\varphi(a_0) = a_0$. Del mismo modo, se ve que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$3^n t_0 = 2m_n + \frac{2a_n}{3} + \frac{2a_{n+1}}{3^2} + \cdots,$$

de donde, por el hecho de que φ tiene periodo 2, se sigue $\varphi(3^n t_0) = a_n$. Por último, se concluye que

$$f(t_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k} t_0)}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{k+1}} = x_0,$$

y

$$g(t_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2k+1} t_0)}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}} = y_0.$$

Por lo tanto, $x_0 = f(t_0)$ y $y_0 = g(t_0)$, como se afirmó.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, 2a edición, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, 2a ed., al que se hace referencia como [ERA], John Wiley & Sons, Nueva York, 1976.

_____, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Edition, John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.

_____, *Return to the Riemann Integral*, Amer. Math. Monthly, **103** (1996), pp. 625-632.

_____, *A Modern Theory of Integration*, al que se hace referencia como [MTI], Grad. Studies in Math., Amer. Math. Society, Providence, RI, 2000.

Bartle, R. G. y D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 2a ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1992.

Barwise, J. y J. Etchemendy, *The Language of First Order Logic*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1990.

Birkhoff, G. y S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 4a ed., Macmillan Publishing Co., Nueva York, 1977.

Boas, R. P., Jr., *A Primer of Real Functions*, 4a ed., Carus Monograph No. 13, Math. Assn. Amer., Washington, D.C., 1996.

DePree, J. D. y C. W. Swartz, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1988.

Gelbaum, B. R. y J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.

Gordon, R. A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Grad. Studies in Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

_____, *The Use of Tagged Partitions in Elementary Real Analysis*, Amer. Math. Monthly, **105** (1998), pp. 105-117 y 886.

Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Developments*, Univ. of Wisconsin Press, Madison, WI, 1970. Reimpresión en Amer. Math. Soc., Chelsea Series, 1998.

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1972.

McLeod, R. M., *The Generalized Riemann Integral*, Carus Monograph, No. 20, Math. Assn. Amer., Washington, D.C., 1980.

Wilder, R. L., *The Foundations of Mathematics*, 2a ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1965.

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

Capítulo 3
Página 65: Cortesía de la Bibliotecta Pública de Nueva York. *Página 92*: Corbis-Bettmann.

Capítulo 4
Página 122: Cortesía de David Eugene Smith Collection, Columbia University.

Capítulo 5
Página 149: Cortesía de la Bibliotecta Pública de Nueva York.

Capítulo 6
Página 193: Cortesía de National Portrait Gallery, Londres.

Capítulo 7
Página 239: Baldwin Ward/Corbis-Bettmann.

Capítulo 10
Página 344: Cortesía de Patrick Muldowney, Universidad de Ulster.

SUGERENCIAS PARA EJERCICIOS SELECCIONADOS

Lector: no consulte las presentes sugerencias a menos que se encuentre atorado. Sin embargo, después de dedicar considerable esfuerzo a un problema, en ocasiones una pequeña sugerencia es lo único que se necesita. En muchos de los ejercicios se piden demostraciones y por lo general no hay un enfoque único que sea el correcto, así es que aun cuando el lector haya seguido un razonamiento totalmente diferente, éste puede ser correcto. Muy pocas de las siguientes sugerencias ofrecen gran detalle y algunas de ellas podrán parecer absolutamente crípticas al principio. Se ofrecen mayores detalles para el material de los primeros capítulos.

Sección 1.1

1. Demostrar que si $A \subseteq B$, entonces $A = A \cap B$. Demostrar después que si $A = A \cap B$, entonces $A \subseteq B$.

2. Demostrar que si $x \in A \setminus (B \cap C)$, entonces $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Demostrar después que si $y \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, entonces $y \in A \setminus (B \cap C)$. Puesto que los conjuntos $A \setminus (B \cap C)$ y $A \setminus (B \cap C)$ contienen los mismos elementos, son iguales.

5. a) $A_1 \cap A_2 = \{6, 12, 18, 24, \cdots\} = \{6k : k \in \mathbb{N}\} = A_5$.
b) $\bigcup A_n = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $\bigcap A_n = \emptyset$.

7. No. Por ejemplo, tanto (0, 1) como (0, –1) pertenecen a C.

9. a) $f(E) = [2, 3]$, entonces $h(E) = g(f(E)) = g([2, 3]) = [4, 9]$.
b) $g^{-1}(G) = [-2, 2]$, entonces $h^{-1}(G) = [-4, 0]$.

13. Si $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$, entonces $x \in f^{-1}(G)$ y $x \in f^{-1}(H)$, por lo que $f(x) \in G$ y $f(x) \in H$. Entonces $f(x) \in G \cap H$, y en consecuencia $x \in f^{-1}(G \cap H)$. Con esto se demuestra que $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \cap H)$.

15. Una posibilidad es $f(x) := (x - a) / (b - a)$.

19. Si $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, por lo que $x_1 = x_2$, lo cual implica que $g \circ f$ es inyectiva. Si $w \in C$, existe $y \in B$ tal que $g(y) = w$ y existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Entonces $g(f(x)) = w$, de donde $g \circ f$ es suprayectiva. Por tanto, $g \circ f$ es una biyección.

20. a) Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, lo cual implica que $x_1 = x_2$, ya que $g \circ f$ es inyectiva. Por tanto, f es inyectiva.

Sección 1.2

1. Adviértase que $1 / (1 \cdot 2) = 1 / (1 + 1)$. Además, $k / (k + 1) + 1 / [(k + 1)(k + 2)] = (k + 1) / (k + 2)$.
2. $[\frac{1}{2}k(k + 1)]^2 + (k + 1)^3 = [\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)]^2$.
4. $\frac{1}{3}(4k^3 - k) + (2k + 1)^2 = \frac{1}{3}[4(k + 1)^3 - (k + 1)]$.
6. $(k + 1)^3 + 5(k + 1) = (k^3 + 5k) + 3k(k + 1) + 6$ y $k(k + 1)$ siempre es par.
8. $5^{k+1} - 4(k + 1) - 1 = 5 \cdot 5^k - 4k - 5 = (5^k - 4k - 1) + 4(5^k - 1)$.
13. Si $k < 2^k$, entonces $k + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$.
16. La desigualdad se cumple para $n = 1$ y $n \geq 5$, pero es falsa para $n = 2, 3, 4$.
18. $\sqrt{k} + 1 / \sqrt{k + 1} = (\sqrt{k}\sqrt{k + 1} + 1) / \sqrt{k + 1} > (k + 1) / \sqrt{k + 1} = \sqrt{k + 1}$.

Sección 1.3

1. Usar el ejercicio 1.1.19 (= ejercicio 19 de la sección 1.1).
2. Inciso b) Sea f una biyección de $\mathbb{N}_m$ en A y sea $C = \{f(k)\}$ para alguna $k \in \mathbb{N}_m$. Definir g en $\mathbb{N}_{m-1}$ por $g(i) := f(i)$ para $i = 1, \cdots, k - 1$ y $g(i) := f(i + 1)$ para $i = k, \cdots, m - 1$. Entonces g es una biyección de $\mathbb{N}_{m-1}$ en $A \setminus C$.
3. a) Hay $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ inyecciones diferentes de S en T.
   b) Hay 3 suprayecciones que mapean a en 1, y hay otras 3 suprayecciones que mapean a en 2.
7. Si T_1 es enumerable, tomar $T_2 = \mathbb{N}$. Si f es una biyección de T_1 en T_2 y si g es una biyección de T_2 en $\mathbb{N}$, entonces (por el ejercicio 1.1.19) $g \circ f$ es una biyección de T_1 en $\mathbb{N}$, por lo que T_1 es enumerable.
9. Si $S \cap T = \emptyset$ y $f : \mathbb{N} \to S$, $g : \mathbb{N} \to T$ son biyecciones en S y T, respectivamente, sea $h(n) := f((n + 1)/2)$ si n es impar y $h(n) := g(n/2)$ si n es par.
10. a) $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ tiene $2^2 = 4$ elementos.
    c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ tiene $2^4 = 16$ elementos.
11. Sea que $S_{n+1} := \{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\} = S_n \cup \{x_{n+1}\}$ tenga $n + 1$ elementos. Entonces un subconjunto de S_{n+1} o (i) contiene a x_{n+1} o (ii) no contiene a x_{n+1}. Hay en total $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos de S_{n+1}.
12. Para toda $m \in \mathbb{N}$, la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}_m$ es finita. Adviértase que $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$.

Sección 2.1

1. a) Justificar los pasos en: $b = 0 + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + 0 = -a$.
   c) Aplicar el inciso a) a la ecuación $a + (-1)a = a(1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$.
2. a) $-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b)$.
   c) Advertir que $(-a)(-(1/a)) = a(1/a) = 1$.
3. a) 3/2 b) 0, 2
   c) 2, −2 d) 1, −2

6. Advertir que si $q \in \mathbb{Z}$ y si $3q^2$ es par, entonces q^2 es par, por lo que q es par.

7. Si $p \in \mathbb{N}$, entonces hay tres posibilidades: para alguna $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (i) $p = 3m$, (ii) $p = 3m + 1$, o (iii) $p = 3m + 2$.

10. a) Si $c = d$, entonces 2.1.7b implica que $a + c < b + d$. Si $c < d$, entonces $a + c < b + c < b + d$.

13. Si $a \neq 0$, entonces 2.1.8a implica que $a^2 > 0$; puesto que $b^2 \geq 0$, se sigue que $a^2 + b^2 > 0$.

15. a) Si $0 < a < b$, entonces 2.1.7c implica que $0 < a^2 < ab < b^2$. Entonces por el ejemplo 2.1.13a se infiere que $a = \sqrt{a^2} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} = b$.

16. a) $\{x : x > 4 \text{ o } x < -1\}$. b) $\{x : 1 < x < 2 \text{ o } -2 < x < -1\}$.
c) $\{x : -1 < x < 0 \text{ o } x > 1\}$. d) $\{x : x < 0 \text{ o } x > 1\}$.

19. La desigualdad es equivalente a $0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

20. a) Usar 2.1.7c.

21. a) Sea $S := \{n \in \mathbb{N} : 0 < n < 1\}$. Si S es no vacío, la propiedad del buen orden de $\mathbb{N}$ implica que existe un elemento mínimo m en S. Sin embargo, $0 < m < 1$ implica que $0 < m^2 < m$, y como m^2 también está en S, esto es una contradicción del hecho de que m es el elemento mínimo de S.

22. a) Sea $x := c - 1 > 0$ y aplicar la desigualdad de Bernoulli 2.1.13c.

24. a) Si $m > n$, entonces $k := m - n \in \mathbb{N}$ y $c^k \geq c > 1$, lo cual implica que $c^m > c^n$. Recíprocamente, la hipótesis de que $c^m > c^n$ y $m \leq n$ llevan a una contradicción.

25. Sea $b := c^{1/mn}$ y demostrar que $b > 1$. El ejercicio 24a implica que $c^{1/n} = b^m > b^n = c^{1/m}$ si y sólo si $m > n$.

26. Se hace $m \in \mathbb{N}$ y se usa la inducción matemática para demostrar que $a^{m+n} = a^m a^n$ y $(a^m)^n = a^{mn}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ dada, se demuestra que las igualdades son válidas para toda $m \in \mathbb{N}$.

Sección 2.2

1. a) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a = \sqrt{a^2}$; si $a < 0$, entonces $|a| = -a = \sqrt{a^2}$.
b) Basta demostrar que $|1/b| = 1/|b|$ para $b \neq 0$ (¿por qué?). Considerar los casos $b > 0$ y $b < 0$.

3. Si $x \leq y \leq z$, entonces $|x - y| + |y - z| = (y - x) + (z - y) = z - x = |z - x|$. Para establecer el recíproco, demostrar que es imposible tener $y < x$ y $y > z$. Por ejemplo, si $y < x \leq z$, de lo que se demostró y de la relación dada se sigue que $|x - y| = 0$, de donde $y = x$ que es una contradicción.

6. a) $-2 \leq x \leq 9/2$ b) $-2 \leq x \leq 2$.

7. $x = 4$ o $x = -3$.

8. a) $x < 0$ b) $-3/2 < x < 1/2$.

10. $\{x : -3 < x < -5/2 \text{ o } 3/2 < x < 2\}$.

11. $\{x : 1 < x < 4\}$.

12. a) $\{(x, y) : y = \pm x\}$. c) Las hipérbolas $y = 2/x$ y $y = -2/x$.

13. a) Si $y \geq 0$, entonces $-y \leq x \leq y$ y se obtiene la región en el semiplano superior que está en o entre las rectas $y = x$ y $y = -x$.

16. a) Suponer que $a \leq b$.

17. Si $a \leq b \leq c$, entonces med$\{a, b, c\} = b =$ mín$\{b, c, c\} =$ mín$\{$máx$\{a, b\}$, máx $\{b, c\}$, máx$\{c, a\}\}$. Los otros casos son similares.

Sección 2.3

1. Puesto que $0 \leq x$ para toda $x \in S_1$, entonces $u = 0$ es una cota inferior de S_1. Si $v > 0$, entonces v no es una cota inferior de S_1 porque $v/2 \in S_1$ y $v/2 < v$. Por lo tanto, ínf $S_1 = 0$.

3. Puesto que $1/n \leq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces 1 es una cota superior de S_3.

4. sup $S_4 = 2$ e ínf $S_4 = 1/2$.

6. Sea $u \in S$ una cota superior de S. Si v es otra cota superior de S, entonces $u \leq v$. En consecuencia, $u = \sup S$.

9. Sea $u := \sup A$, $v := \sup B$ y $w := \sup\{u, v\}$. Entonces w es una cota superior de $A \cup B$, porque si $x \in A$, entonces $x \leq u \leq w$, y si $x \in B$, entonces $x \leq v \leq w$. Si z es cualquier cota superior de $A \cup B$, entonces z es una cota superior de A y de B, por lo que $u \leq z$ y $v \leq z$. En consecuencia, $w \leq z$. Por lo tanto, $w = \sup(A \cup B)$.

11. Considerar dos casos: $u \geq s^*$ y $u < s^*$.

Sección 2.4

1. Puesto que $1 - 1/n < 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, 1 es una cota superior. Para demostrar que 1 es el supremo, debe probarse que para toda $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 - 1/n > 1 - \varepsilon$, que es equivalente a $1/n < \varepsilon$. Aplicar la propiedad de Arquímedes 2.4.3 o 2.4.5.

2. ínf $S = -1$ y sup $S = 1$.

4. a) Sea $u := \sup S$ y $a > 0$. Entonces $x \leq u$ para toda $x \in S$, de donde $ax \leq au$ para toda $x \in S$, de donde se sigue que au es una cota superior de aS. Si v es otra cota superior de aS, entonces $ax \leq v$ para toda $x \in S$, de donde $x \leq v/a$ para toda $x \in S$, con lo que se demuestra que v/a es una cota superior de S, y en consecuencia $u \leq v/a$, de donde se concluye que $au \leq v$. Por lo tanto, $au = \sup\{aS\}$.

5. Sea $u := \sup f(X)$. Entonces $f(x) \leq u$ para toda $x \in X$, por lo que $a + f(x) \leq a + u$ para toda $x \in X$, de donde $\sup\{a + f(x) : x \in X\} \leq a + u$. Si $w < a + u$, entonces $w - a < u$, por lo que existe $x_w \in X$ con $w - a < f(x_w)$, de donde $w < a + f(x_w)$, y en consecuencia w no es una cota superior de $\{a + f(x) : x \in X\}$.

7. Si $u := \sup f(X)$ y $v := \sup g(X)$, entonces $f(x) \leq u$ y $g(x) \leq v$ para toda $x \in X$, de donde $f(x) + g(x) \leq u + v$ para toda $x \in X$.

9. a) $f(x) = 1$ para $x \in X$.
   b) $g(y) = 0$ para $y \in Y$.

11. Sea $S := \{h(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Se tiene $h(x, y) \leq F(x)$ para toda $x \in X$, $y \in Y$, por lo que $\sup S \leq \sup\{F(x) : x \in X\}$. Si $w < \sup\{F(x) : x \in X\}$, entonces existe $x_0 \in X$ con $w < F(x_0) = \sup\{h(x_0, y) : y \in Y\}$, de donde existe $y_0 \in Y$ con $w < h(x_0, y_0)$. Por tanto, w no es una cota superior de S, y en consecuencia $w < \sup S$. Puesto que esto se cumple para cualquier w tal que $w < \sup\{F(x) : x \in X\}$, se concluye así que $\sup\{F(x) : x \in X\} \leq \sup S$.

13. Advertir que $n < 2^n$ (de donde $1/2^n < 1/n$) para toda $n \in \mathbb{N}$.

14. Sea $S_3 := \{s \in \mathbb{R} : 0 \leq s, s^2 < 3\}$. Demostrar que S_3 es un conjunto no vacío y acotado por 3 y hacer $y := \sup S_3$. Si $y^2 < 3$ y $1/n < (3 - y^2)/(2y + 1)$, demostrar que $y + 1/n \in S_3$. Si $y^2 > 3$ y $1/m < (y^2 - 3)/2y$, demostrar que $y - 1/m \in S_3$. Por lo tanto, $y^2 = 3$.

17. Si $x < 0 < y$, entonces se puede tomar $r = 0$. Si $x < y < 0$, se aplica 2.4.8 para obtener un número racional entre $-y$ y $-x$.

Sección 2.5

2. S tiene una cota superior b y una cota inferior a si y sólo si S está contenido en el intervalo $[a, b]$.

4. Debido a que z no es ni una cota inferior ni una cota superior de S.

5. Si $z \in \mathbb{R}$, entonces z no es una cota inferior de S, por lo que existe $x_z \in S$ tal que $x_z \leq z$. Del mismo modo, existe $y_z \in S$ tal que $z \leq y_z$.

8. Si $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < x$, por lo que $x \notin J_n$. Si $y \leq 0$, entonces $y \notin J_1$.

10. Sea $\eta := \text{ínf}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$; se afirma que $a_n \leq \eta$ para toda n. Sea $n \in \mathbb{N}$; se demostrará que a_n es una cota inferior del conjunto $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$. Se consideran dos casos. j) Si $n \leq k$, entonces como $I_n \supseteq I_k$, se tiene $a_n \leq a_k \leq b_k$. jj) Si $k < n$, entonces como $I_k \supseteq I_n$, se tiene $a_n \leq b_n \leq b_k$. Por lo tanto, $a_n \leq b_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo que a_n es una cota inferior de $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ y en consecuencia $a_n \leq \eta$. En particular, con esto se demuestra que $\eta \in [a_n, b_n]$ para toda n, por lo que $\eta \in \cap I_n$.

12. $\frac{3}{8} = (.011000\cdots)_2 = (.010111\cdots)_2$. $\frac{7}{16} = (.0111000\cdots)_2 = (.0110111\cdots)_2$.

13. a) $\frac{1}{3} \approx (.0101)_2$. b) $\frac{1}{3} = (.010101\cdots)_2$, el bloque 01 se repite.

16. $1/7 = .142\,857\cdots$, el bloque se repite. $2/19 = .105\,263\,157\,894\,736\,842\cdots$, el bloque se repite.

17. $1.25\,137\cdots 137\cdots = 31253/24975$, $35.14653\cdots 653\cdots = 3511139/99900$.

Sección 3.1

1. a) 0, 2, 0, 2, 0 c) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30

3. a) 1, 4, 13, 40, 121 c) 1, 2, 3, 5, 4.

5. a) Se tiene $0 < n/(n^2 + 1) < n/n^2 = 1/n$. Dada $\varepsilon > 0$, sea $K(\varepsilon) \geq 1/\varepsilon$.
c) Se tiene $|(3n + 1)/(2n + 5) - 3/2| = 13/(4n + 10) < 13/4n$. Dada $\varepsilon > 0$, sea $K(\varepsilon) \geq 13/4\varepsilon$.

6. a) $1/\sqrt{n+7} < 1/\sqrt{n}$ b) $|2n/(n+2) - 2| = 4/(n+2) < 4/n$
c) $\sqrt{n}/(n+1) < 1/\sqrt{n}$ d) $|(-1)^n n/(n^2+1)| \leq 1/n$.

9. $0 < \sqrt{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x_n < \varepsilon^2$.

11. $|1/n - 1/(n+1)| = 1/n(n+1) < 1/n^2 \leq 1/n$.

13. Sea $b := 1/(1 + a)$ donde $a > 0$. Puesto que $(1 + a)^n > \frac{1}{2}n(n-1)a^2$, se tiene que $0 < nb^n \leq n/[\frac{1}{2}n(n-1)a^2] \leq 2/[(n-1)a^2]$. Por tanto, $\text{lím}(nb^n) = 0$.

15. Si $n > 3$, entonces $0 < n^2/n! < n/(n-2)(n-1) < 1/(n-3)$.

Sección 3.2

1. a) $\lim(x_n) = 1$ c) $x_n \geq n/2$, por lo que la sucesión diverge.
3. $Y = (X + Y) - X$.
6. a) 4 b) 0 c) 1 d) 0.
8. En (3) el exponente k está fijo, pero en $(1 + 1/n)^n$ el exponente varía.
9. $\lim(y_n) = 0$ y $\lim(\sqrt{n}y_n) = \frac{1}{2}$.
11. b.
13. a) 1 b) 1.
15. a) $L = a$ b) $L = b/2$ c) $L = 1/b$ d) $L = 8/9$.
18. a) Converge a 0 c) Converge a 0.
20. a) (1) b) (n).
21. Sí. (¿Por qué?)
22. Por el ejercicio 2.2.16, $u_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n + |x_n - y_n|)$.
23. Usar los ejercicios 2.2.16b, 2.2.17 y el ejercicio precedente.

Sección 3.3

1. (x_n) es una sucesión acotada decreciente. El límite es 4.
2. El límite es 1. 3. El límite es 2. 4. El límite es 2.
5. (y_n) es creciente. El límite es $y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4p})$.
7. (x_n) es creciente.
10. (s_n) es decreciente y (t_n) es creciente. Asimismo, $t_n \leq x_n \leq s_n$ para $n \in \mathbb{N}$.
11. Advertir que $y_n = 1/(n + 1) + 1/(n + 2) + \cdots + 1/2n < 1/(n + 1) + 1/(n + 1) + \cdots + 1/(n + 1) = n/(n + 1) < 1$.
13. a) e b) e^2 c) e d) $1/e$.
14. Advertir que si $n \geq 2$, entonces $0 \leq s_n - \sqrt{2} \leq s_n^2 - 2$.
15. Advertir que $0 \leq s_n - \sqrt{5} \leq (s_n^2 - 5)/\sqrt{5} \leq (s_n^2 - 5)/2$.
16. $e_2 = 2.25$, $e_4 = 2.441\ 406$, $e_8 = 2.565\ 785$, $e_{16} = 2.637\ 928$.
17. $e_{50} = 2.691\ 588$, $e_{100} = 2.704\ 814$, $e_{1000} = 2.716\ 924$.

Sección 3.4

1. Por ejemplo, $x_{2n-1} := 2n - 1$ y $x_{2n} := 1/2n$.
3. $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
7. a) e b) $e^{1/2}$ c) e^2 d) e^2.
8. a) 1 b) $e^{3/2}$.
12. Se elige $n_1 \geq 1$ de modo que $|x_{n_1}| > 1$, después se elige $n_2 > n_1$ de modo que $|x_{n_2}| > 2$, y, en general, se elige $n_k > n_{k-1}$ de modo que $|x_{n_k}| > k$.

13. $(x_{2n-1}) = (-1, -1/3, -1/5, \cdots)$.

14. Se elige $n_1 \geq 1$ de modo que $x_{n_1} \geq s - 1$, después se elige $n_2 > n_1$ de modo que $x_{n_2} > s - 1/2$, y, en general, se elige $n_k > n_{k-1}$ de modo que $x_{n_k} > s - 1/k$.

Sección 3.5

1. Por ejemplo, $((-1)^n)$.

3. a) Obsérvese que $|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
   c) Tomar $m = 2n$, de donde $x_m - x_n = x_{2n} - x_n = \ln 2n - \ln n = \ln 2$ para toda n.

5. $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Pero, si $m = 4n$, entonces $\sqrt{4n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}$ para toda n.

8. Sea $u := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si $\varepsilon > 0$, sea H tal que $u - \varepsilon < x_H \leq u$. Si $m \geq n \geq H$, entonces $u - \varepsilon < x_n \leq x_m \leq u$, por lo que $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

10. $\lim\,(x_n) = (1/3)x_1 + (2/3)x_2$.

12. El límite es $\sqrt{2} - 1$.

13. El límite es $1 + \sqrt{2}$.

14. Con cuatro iteraciones se obtiene $r = 0.201\,64$ con cinco cifras decimales.

Sección 3.6

1. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado por arriba, se elige $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{n_k} \geq k$ para $k \in \mathbb{N}$.

3. Advertir que $|x_n - 0| < \varepsilon$ si y sólo si $1/x_n > 1/\varepsilon$.

4. a) $[\sqrt{n} > a] \Leftrightarrow [n > a^2]$ c) $\sqrt{n-1} \geq \sqrt{n/2}$ cuando $n \geq 2$.

8. a) $n < (n^2 + 2)^{1/2}$.
   c) Puesto que $n < (n^2 + 1)^{1/2}$, entonces $n^{1/2} < (n^2 + 1)^{1/2}/n^{1/2}$.

9. a) Puesto que $x_n/y_n \to \infty$, existe K_1 tal que si $n \geq K_1$, entonces $x_n \geq y_n$. Ahora se aplica el teorema 3.6.4a.

Sección 3.7

1. Las sumas parciales $\sum b_n$ son una subsucesión de las sumas parciales de $\sum a_n$.

3. a) Puesto que $1/(n+1)(n+2) = 1/(n+1) - 1/(n+2)$, la serie es telescópica.

6. a) La sucesión $(\cos n)$ no converge a 0.
   b) Puesto que $|(\cos n)/n^2| \leq 1/n^2$, la convergencia de $\sum (\cos n)/n^2$ se sigue del ejemplo 3.7.6c y del teorema 3.7.7.

7. La sucesión "par" (s_{2n}) es decreciente, la sucesión "impar" (s_{2n+1}) es creciente y $-1 \leq s_n \leq 0$. Asimismo, $0 \leq s_{2n} - s_{2n+1} = 1/\sqrt{2n+1}$.

9. $\sum 1/n^2$ es convergente, pero $\sum 1/n$ no lo es.

11. Demostrar que $b_k \geq a_1/k$ para $k \in \mathbb{N}$, de donde $b_1 + \cdots + b_n \geq a_1(1 + \cdots + 1/n)$.

12. Evidentemente, $2a(4) \leq a(3) + a(4)$ y $2^2a(8) \leq a(5) + \cdots + a(8)$, etc. Asimismo, $a(2) + a(3) \leq 2a(2)$ y $a(4) + \cdots + a(7) \leq 2^2a(2^2)$, etc. La desigualdad enunciada se sigue por adición. Se aplica entonces el criterio de comparación 3.7.7.

14. a) Los términos son decrecientes y $2^n/2^n \ln(2^n) = 1/(n \ln 2)$. Puesto que $\sum 1/n$ diverge, también lo hace $\sum 1/(n \ln n)$.

15. a) Los términos son decrecientes y $2^n/2^n (\ln 2^n)^c = (1/n^c) \cdot (1/\ln 2)^c$. Ahora se usa el hecho de que $\sum (1/n^c)$ converge cuando $c > 1$.

Sección 4.1

1. a-c) Si $|x - 1| \leq 1$, entonces $|x + 1| \leq 3$ de modo que $|x^2 - 1| \leq 3|x - 1|$. Por lo tanto, $|x - 1| < 1/6$ asegura que $|x^2 - 1| < 1/2$, etc.
d) Si $|x - 1| < 1$, entonces $|x^3 - 1| \leq 7|x - 1|$.

2. a) Puesto que $|\sqrt{x} - 2| = |x - 4| / (\sqrt{x} + 2) \leq \frac{1}{2}|x - 4|$, entonces $|x - 4| < 1$ implica que se tiene $|\sqrt{x} - 2| < \frac{1}{2}$.
b) Si $|x - 4| < 2 \times 10^{-2} = .02$, entonces $|\sqrt{x} - 2| < .01$.

5. Si $0 < x < a$, entonces $0 < x + c < a + c < 2a$, de modo que $|x^2 - c^2| = |x + c||x - c| \leq 2a|x - c|$. Dada $\varepsilon > 0$, tomar $\delta := \varepsilon/2a$.

8. Si $c \neq 0$, demostrar que $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq (1/\sqrt{c})|x - c|$, por lo que puede tomarse $\delta := \varepsilon\sqrt{c}$. Si $c = 0$, puede tomarse $\delta := \varepsilon^2$.

9. a) Si $|x - 2| < 1/2$ demostrar que $|1/(1 - x) + 1| = |(x - 2)/(x - 1)| \leq 2|x - 2|$. Por tanto, puede tomarse $\delta := \text{ínf}\{1/2, \varepsilon/2\}$.
c) Si $x \neq 0$, entonces $|x^2/|x| - 0| = |x|$. Se toma $\delta := \varepsilon$.

10. a) Si $|x - 2| < 1$, entonces $|x^2 + 4x - 12| = |x + 6||x - 2| < 9|x - 2|$. Puede tomarse $\delta := \text{ínf}\{1, \varepsilon/9\}$.
b) Si $|x + 1| < 1/4$, entonces $|(x + 5)/(3x + 2) - 4| = 7|x + 1|/|2x + 3| < 14|x + 1|$, y puede tomarse $\delta := \text{ínf}\{1/4, \varepsilon/14\}$.

11. a) Sea $x_n := 1/n$. c) Sea $x_n := 1/n$ y $y_n := -1/n$.

13. b) Si $f(x) := \text{sgn}(x)$, entonces $\lim_{x \to 0}(f(x))^2 = 1$, pero $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

14. a) Puesto que $|f(x) - 0| \leq |x|$, se tiene $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
b) Si $c \neq 0$ es irracional, sea (x_n) una sucesión de números irracionales que converge a c; entonces $f(c) = c \neq 0 = \lim (f(x_n))$. ¿Qué ocurre si c es irracional?

16. La restricción de sgn a $[0, 1]$ tiene límite en 0.

Sección 4.2

1. a) 10 b) -3 c) 1/12 d) 1/2.

2. a) 1 b) 4 c) 2 d) 1/2.

3. Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 + 3x}$.

4. Considerar $x_n := 1/2\pi n$ y $\cos(1/x_n) = 1$. Usar el teorema de compresión. 4.2.7.

8. Si $|x| \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $|x^k| = |x|^k \leq 1$, de donde $-x^2 \leq x^{k+2} \leq x^2$.

11. a) No hay límite b) 0
c) No hay límite d) 0.

Sección 4.3

2. Sea $f(x) := \text{sen}(1/x)$ para $x < 0$ y $f(x) := 0$ para $x > 0$.

3. Dada $\alpha > 0$, si $0 < x < 1/\alpha^2$, entonces $\sqrt{x} < 1/\alpha$, y por consiguiente $f(x) > \alpha$.

5. a) Si $\alpha > 1$ y $1 < x < \alpha/(\alpha - 1)$, entonces $\alpha < x/(x-1)$, de donde se tiene que $\lim_{x \to 1+} x/(x-1) = \infty$.
c) Puesto que $(x+2)/\sqrt{x} > 2/\sqrt{x}$, el límite es ∞.
e) Si $x > 0$, entonces $1/\sqrt{x} < \sqrt{x+1}/x$, por lo que el límite por la derecha es ∞.
g) 1 h) -1.

8. Adviértase que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > K$ si y sólo si $|f(1/z) - L| < \varepsilon$ para $0 < z < 1/K$.

9. Existe $\alpha > 0$ tal que $|xf(x) - L| \le 1$ siempre que $x > \alpha$. En consecuencia, $|f(x)| < (|L| + 1)/x$ para $x > \alpha$.

12. No. Si $h(x) := f(x) - g(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ y se tiene que $f(x)/g(x) = 1 + h(x)/g(x) \to 1$.

13. Suponer que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para $x > K$, y suponer que $g(y) > K$ para $y > H$. Entonces $|f \circ g(y) - L| < \varepsilon$ para $y > H$.

Sección 5.1

4. a) Continua si $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
b) Continua si $x \neq \pm 1, \pm 2, \cdots$
c) Continua si $\text{sen}\, x \neq 0, 1$
d) Continua si $x \neq 0, \pm 1, \pm 1/2, \cdots$.

7. Sea $\varepsilon := f(c)/2$ y sea $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, lo que implica que $f(x) > f(c) - \varepsilon = f(c)/2 > 0$.

8. Puesto que f es continua en x, se tiene $f(x) = \lim(f(x_n)) = 0$. Por tanto, $x \in S$.

10. Adviértase que $\big||x| - |c|\big| \le |x - c|$.

13. Puesto que $|g(x) - 6| \le \sup\{|2x - 6|, |x - 3|\} = 2|x - 3|$, g es continua en $x = 3$. Si $c \neq 3$, sea (x_n) una sucesión de números racionales que converge a c y sea (y_n) una sucesión de números irracionales que converge a c. Entonces $\lim(g(x_n)) \neq \lim(g(y_n))$.

Sección 5.2

1. a) Continua en $\mathbb{R}$
c) Continua para $x \neq 0$.

2. Usar 5.2.1a y la inducción matemática; o usar 5.2.8 con $g(x) := x^n$.

4. Continua en todo número no entero.

7. Sea $f(x) := 1$ si x es racional y $f(x) := -1$ si x es irracional.

12. Demostrar primero que $f(0) = 0$ y $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$; después advertir que $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$. Por consiguiente, f es continua en el punto x_0 si y sólo si es continua en 0. Por tanto, si f es continua en x_0, entonces es continua en 0 y en consecuencia en todas partes.

13. Demostrar primero que $f(0) = 0$ y (por inducción matemática) que $f(x) = cx$ para $x \in \mathbb{N}$, y en consecuencia también para $x \in \mathbb{Z}$. Demostrar después que $f(x) = cx$ para $x \in \mathbb{Q}$. Por último, si $x \notin \mathbb{Q}$, sea $x = \lim(r_n)$ para alguna sucesión en $\mathbb{Q}$.

15. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces ambas expresiones dan como resultado $h(x) = f(x)$; y si $f(x) \leq g(x)$, entonces $h(x) = g(x)$ en ambos casos.

Sección 5.3

1. Aplicar el teorema de acotabilidad 5.3.2 a $1/f$ o bien el teorema del máximo-mínimo 5.3.4 para concluir que $\inf f(I) > 0$.

3. Elegir una sucesión (x_n) tal que $|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|f(x_n)| \leq (\frac{1}{2})^n |f(x_1)|$. Aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass para obtener una subsucesión convergente.

4. Suponer que p es de grado n impar y que el coeficiente a_n de x^n es positivo. Por 4.3.16, $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$.

5. En los intervalos [1.035, 1.040] y [−7.026, −7.025].

7. En el intervalo [0.7390, 0.7391].

8. En el intervalo [1.4687, 1.4765].

9. a) 1 b) 6.

10. $1/2^n < 10^{-5}$ implica que $n > (5 \ln 10)/\ln 2 \approx 16.61$. Tomar $n = 17$.

11. Si $f(w) < 0$, entonces del teorema 4.2.9 se sigue que existe una vecindad-δ $V_\delta(w)$ tal que $f(x) < 0$ para toda $x \in V_\delta(w)$.

14. Aplicar el teorema 4.2.9 a $\beta - f(x)$.

15. Si $0 < a < b \leq \infty$, entonces $f((a, b)) = (a^2, b^2)$; si $-\infty \leq a < b < 0$, entonces $f((a, b)) = (b^2, a^2)$. Si $a < 0 < b$, entonces $f((a, b))$ no es un intervalo abierto, pero es igual a $[0, c)$, donde $c := \sup\{a^2, b^2\}$. Las imágenes de intervalos cerrados se tratan de manera similar.

16. Por ejemplo, si $a < 0 < b$ y $c := \inf\{1/(a^2 + 1), 1/(b^2 + 1)\}$, entonces $g((a, b)) = (c, 1]$. Si $0 < a < b$, entonces $g((a, b)) = (1/(b^2 + 1), 1/(a^2 + 1))$. Asimismo, $g([-1, 1]) = [1/2, 1]$. Si $a < b$, entonces $h((a, b)) = (a^3, b^3)$ y $h((a, b]) = (a^3, b^3]$.

17. Sí. Usar el teorema de densidad 2.4.8.

19. Considerar $g(x) := 1/x$ para $x \in J := (0, 1)$.

Sección 5.4

1. Puesto que $1/x - 1/u = (u - x)/xu$, se sigue que $|1/x - 1/u| \leq (1/a^2)|x - u|$ para $x, u \in [a, \infty)$.

3. a) Sea $x_n := n + 1/n$, $u_n := n$.
   b) Sea $x_n := 1/2n\pi$, $u_n := 1/(2n\pi + \pi/2)$.

6. Si M es una cota tanto de f como de g en A, demostrar que $|f(x)g(x) - f(u)g(u)| \leq M|f(x) - f(u)| + M|g(x) - g(u)|$ para toda $x, u \in A$.

8. Dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_f > 0$ tal que $|y - v| < \delta_f$ implica que $|f(y) - f(v)| < \varepsilon$. Elegir ahora $\delta_g > 0$ de modo que $|x - u| < \delta_g$ implica que $|g(x) - g(u)| < \delta_f$.

11. Si $|g(x) - g(0)| \leq K|x - 0|$ para toda $x \in [0, 1]$, entonces $\sqrt{x} \leq Kx$ para $x \in [0, 1]$. Pero si $x_n := 1/n^2$, entonces K debe satisfacer que $n \leq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que es imposible.

14. Puesto que f está acotada en $[0, p]$, se sigue que está acotada en $\mathbb{R}$. Puesto que f es continua en $J := [-1, p+1]$, es uniformemente continua en J. Demostrar ahora que esto implica que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Sección 5.5

1. a) Los intervalos-δ son $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{8}, \frac{9}{8}]$.
   b) El tercer intervalo-δ no contiene a $[\frac{1}{2}, 1]$.

2. a) Sí b) Sí.

3. No. El primer intervalo-δ_2 es $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ y no contiene a $[0, \frac{1}{4}]$.

4. b) Si $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ entonces $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = [-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t] \subset (\frac{1}{4}, 1)$.

6. Podrían tenerse dos subintervalos que tienen a c como etiqueta con uno de ellos no contenido en el intervalo-δ alrededor de c.

7. Si $\dot{\mathcal{P}} := \{([a, x_1], t_1), \cdots ([x_{k-1}, c], t_k), ([c, x_{k+1}], t_{k+1}), \cdots, ([x_n, b], t_n)\}$ es fina-δ^*, entonces $\dot{\mathcal{P}}' := \{([a, x_1], t_1), \cdots, ([x_{k-1}, c], t_k)\}$ es una partición fina-δ' de $[a, c]$ y $\dot{\mathcal{P}}'' := \{([c, x_{k+1}], t_{k+1}), \cdots, ([x_n, b], t_n)\}$ es una partición fina-δ'' de $[c, b]$.

9. La hipótesis de que f está acotada localmente implica entonces una medida δ. Si $\{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición fina-δ de $[a, b]$ y M_i está acotado para $|f|$ en $[x_{i-1}, x_i]$, sea $M := \sup\{M_i : i = 1, \cdots, n\}$.

Sección 5.6

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $f(a) \leq f(x)$.

4. Si $0 \leq f(x_1) \leq f(x_2)$ y $0 \leq g(x_1) \leq g(x_2)$, entonces $f(x_1)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2)$.

6. Si f es continua en c, entonces $\text{lím}(f(x_n)) = f(c)$, ya que $c = \text{lím}(x_n)$. Recíprocamente, puesto que $0 \leq j_f(c) \leq f(x_{2n}) - f(x_{2n+1})$, se sigue que $j_f(c) = 0$, de modo que f es continua en c.

7. Aplicar los ejercicios 2.4.4, 2.4.5 y el principio de los ínfimos iterados (análogo al resultado del ejercicio 2.4.11).

8. Sea $x_1 \in I$ tal que $y = f(x_1)$ y $x_2 \in I$ tal que $y = g(x_2)$. Si $x_2 \leq x_1$, entonces $y = g(y_2) < f(x_2) \leq f(x_1) = y$, que es una contradicción.

11. Adviértase que f^{-1} es continua en todo punto de su dominio $[0, 1] \cup (2, 3]$.

14. Sea $y := x^{1/n}$ y $z := x^{1/q}$ de tal modo que $y^n = x = z^q$, de donde (por el ejercicio 2.1.26) $y^{np} = x^p = z^{qp}$. Puesto que $np = mq$, demostrar que $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$ o $x^{m/n} = x^{p/q}$. Considerar ahora el caso en que $m, p \in \mathbb{Z}$.

15. Usar el ejercicio precedente y el ejercicio 2.1.26.

Sección 6.1

1. a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (x+h)^3 - x^3]/h = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$,

   c) $h'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. Adviértase que $|f(x)/x| \leq |x|$ para $x \in \mathbb{R}$.

5. a) $f'(x) = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$ b) $g'(x) = (x - 1)/\sqrt{5 - 2x + x^2}$
c) $h'(x) = mkx^{k-1}(\cos x^k)(\operatorname{sen} x^k)^{m-1}$ d) $k'(x) = 2x \sec^2(x^2)$.

6. La función f' es continua para $n \geq 2$ y es derivable para $n \geq 3$.

8. a) $f'(x) = 2$ para $x > 0$, $f'(x) = 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) = -2$ para $x < -1$,
c) $h'(x) = 2|x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

10. Si $x \neq 0$, entonces $g'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)$. Además, $g'(0) = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}(1/h^2) = 0$. Considerar $x_n := 1/\sqrt{2n\pi}$.

11. a) $f'(x) = 2/(2x + 3)$ b) $g'(x) = 6(L(x^2))^2/x$
c) $h'(x) = 1/x$ d) $k'(x) = 1/(xL(x))$.

14. $1/h'(0) = 1/2$, $1/h'(1) = 1/5$, y $1/h'(-1) = 1/5$.

16. $D[\arctan y] = 1/D[\tan x] = 1/\sec^2 x = 1/(1 + y^2)$.

Sección 6.2

1. a) Creciente en $[3/2, \infty)$, decreciente en $(-\infty, 3/2]$
c) Creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$.

2. a) Mínimo relativo en $x = 1$; máximo relativo en $x = -1$
c) Máximo relativo en $x = 2/3$.

3. a) Mínimos relativos en $x = \pm 1$; máximos relativos en $x = 0, \pm 4$
c) Mínimos relativos en $x = -2, 3$; máximo relativo en $x = 2$.

6. Si $x < y$ entonces existe c en (x, y) tal que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = |\cos c||y - x|$.

9. $f(x) = x^4(2 + \operatorname{sen}(1/x)) > 0$ para $x \neq 0$, por lo que f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. Demostrar que $f'(1/2n\pi) < 0$ para $n \geq 2$ y $f'(2/(4n + 1)\pi) > 0$ para $n \geq 1$.

10. $g'(0) = \lim_{x \to 0}(1 + 2x \operatorname{sen}(1/x)) = 1 + 0 = 1$, y si $x \neq 0$, entonces $g'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}(1/x) - 2\cos(1/x)$. Demostrar ahora que $g'(1/2n\pi) < 0$ y que se tiene $g'(2/(4n + 1)\pi) > 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

14. Aplicar el teorema de Darboux 6.2.12.

17. Aplicar el teorema del valor medio a la función $g - f$ en $[0, x]$.

20. a), b) Aplicar el teorema del valor medio.
c) Aplicar el teorema de Darboux a los resultados de los incisos a) y b).

Sección 6.3

1. $A = B(\lim_{x \to c} f(x) / g(x)) = 0$.

4. Adviértase que $f'(0) = 0$, pero que $f'(x)$ no existe si $x \neq 0$.

6. a) 1 b) 1 c) 0 d) 1/3.

7. a) 1 b) ∞ c) 0 d) 0.

8. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0.

9. a) 1 b) 1 c) e^3 d) 0.

10. a) 1 b) 1 c) 1 d) 0.

Sección 6.4

1. $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n a^{2n-1}$ sen ax y $f^{(2n)}(x) = (-1)^n a^{2n} \cos ax$ para $n \in \mathbb{N}$.

4. Aplicar el teorema de Taylor a $f(x) := \sqrt{1+x}$ en $x_0 := 0$ y advertir que $R_1(x) < 0$ y $R_2(x) > 0$ para $x > 0$.

5. $1.095 < \sqrt{1.2} < 1.1$ y $1.375 < \sqrt{2} < 1.5$.

6. $R_2(0.2) < 0.0005$ y $R_2(1) < 0.0625$.

11. Con $n = 4$, $\ln 1.5 = 0.40$; con $n = 7$, $\ln 1.5 = 0.405$.

17. Aplicar el teorema de Taylor a f en $x_0 = c$ para demostrar que $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$.

19. Puesto que $f(2) < 0$ y $f(2.2) > 0$, hay un cero de f en [2.0, 2.2]. El valor de x_4 es aproximadamente 2.094 551 5.

20. $r_1 \approx 1.452\,626\,88$ y $r_2 \approx -1.164\,035\,14$.

21. $r \approx 1.324\,717\,96$.

22. $r_1 \approx 1.158\,594\,34$ y $r_2 \approx 3.146\,193\,22$.

23. $r_1 \approx 0.5$ y $r_2 \approx 0.809\,016\,99$.

24. $r \approx 0.739\,085\,13$.

Sección 7.1

1. a) $\|\mathcal{P}_1\| = 2$ b) $\|\mathcal{P}_2\| = 2$ c) $\|\mathcal{P}_3\| = 1.4$ d) $\|\mathcal{P}_4\| = 2$.

2. a) $0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 = 0 + 1 + 8 = 9$
   b) 37 c) 13 d) 33.

5. a) Si $u \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces $x_{i-1} \leq u$ de modo que $c_1 \leq t_i \leq x_i \leq x_{i-1} + \|\dot{\mathcal{P}}\|$ de donde $c_1 - \|\dot{\mathcal{P}}\| \leq x_{i-1} \leq u$. También $u \leq x_i$ de tal modo que $x_i - \|\dot{\mathcal{P}}\| \leq x_{i-1} \leq t_i \leq c_2$, de donde $u \leq x_i \leq c_2 + \|\dot{\mathcal{P}}\|$.

10. g no está acotada. Tomar etiquetas racionales.

12. Sea $\mathcal{P}_n$ la partición de [0, 1] en n partes iguales. Si $\dot{\mathcal{P}}_n$ es esta partición con etiquetas racionales, entonces $S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) = 1$, mientras que si $\dot{\mathcal{Q}}_n$ es esta partición con etiquetas irracionales, entonces $S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n) = 0$.

13. Seguir un razonamiento como el del ejemplo 7.1.3d.

15. Si $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon := \varepsilon/4\alpha$, entonces la unión de los subintervalos en $\dot{\mathcal{P}}$ con etiquetas en $[c, d]$ contiene el intervalo $[c + \delta_\varepsilon, d - \delta_\varepsilon]$ y está contenida en $[c - \delta_\varepsilon, d + \delta_\varepsilon]$. Por lo tanto, $\alpha(d - c - 2\delta_\varepsilon) \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) \leq \alpha(d - c + 2\delta_\varepsilon)$, de donde $|S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) - \alpha(d - c)| \leq 2\alpha\delta_\varepsilon < \varepsilon$.

16. b) De hecho, $(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2) \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_i^3 - x_{i-1}^3$.
    c) Los términos en $S(Q; \dot{\mathcal{Q}})$ son telescópicos.

18. Sea $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $[a, b]$ y sea $\dot{\mathcal{Q}} = \{([x_{i-1} + c, x_i + c], t_i + c)\}_{i=1}^n$, de tal modo que $\dot{\mathcal{Q}}$ es una partición etiquetada de $[a + c, b + c]$ y $\|\dot{\mathcal{Q}}\| = \|\dot{\mathcal{P}}\|$. Además, $S(g; \dot{\mathcal{Q}}) = S(f; \dot{\mathcal{P}})$, por lo que $|S(g; \dot{\mathcal{Q}}) - \int_a^b f| = |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \varepsilon$ cuando $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta_\varepsilon$.

Sección 7.2

2. Si todas las etiquetas son racionales, entonces $S(h; \dot{\mathcal{P}}) \geq 1$, mientras que si todas son irracionales, entonces $S(h; \dot{\mathcal{P}}) = 0$.

3. Sea $\dot{\mathcal{P}}_n$ la partición de $[0, 1]$ en n subintervalos iguales con $t_1 = 1/n$ y $\dot{\mathcal{Q}}_n$ con los mismos subintervalos etiquetados por puntos irracionales.

5. Si $c_1, \cdots, c_n$ son los valores diferentes que asume φ, entonces $\varphi^{-1}(c_j)$ es la unión de una colección finita $\{J_{j1}, \cdots, J_{jr_j}\}$ de subintervalos disjuntos de $[a, b]$. Puede escribirse $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_j} c_j \varphi_{J_{jk}}$.

6. No necesariamente.

8. Si $f(c) > 0$ para alguna $c \in (a, b)$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \frac{1}{2}f(c)$ para $|x - c| \leq \delta$. Entonces $\int_a^b f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \geq (2\delta)\,\frac{1}{2}f(c) > 0$. Si c es un punto terminal, se aplica un razonamiento similar.

10. Usar el teorema de Bolzano 5.3.7.

12. De hecho, $|g(x)| \leq 1$ y es continua en todo intervalo $[c, 1]$ donde $0 < c < 1$. Se aplica el ejercicio precedente.

13. Sea $f(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ y $f(0) := 0$.

16. Sean $m := \text{ínf}\, f(x)$ y $M := \sup f$. Por el teorema 7.1.4c, se tiene $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$. Por el teorema de Bolzano 5.3.7, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = (\int_a^b f)/(b - a)$.

19. a) Sea $\dot{\mathcal{P}}_n$ una sucesión de particiones etiquetadas de $[0, a]$ con $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$ y sea $\dot{\mathcal{P}}_n^*$ la partición "simétrica" correspondiente de $[-a, a]$. Demostrar que $S(f; \dot{\mathcal{P}}_n^*) = 2S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) \to 2 \int_0^a f$.

21. Adviértase que $x \mapsto f(x^2)$ es una función continua par.

22. Sea $x_i := i(\pi/2)$ para $i = 0, 1, \cdots, n$. Entonces se tiene que $(\pi/2n) \sum_{j=1}^{n-1} f(\cos x_i) = (\pi/2n) \sum_{k=1}^{n} f(\text{sen}\, x_k)$.

Sección 7.3

1. Suponer que $E := \{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b\}$ contiene los puntos de $[a, b]$ donde la derivada $F'(x)$ o no existe o no es igual a $f(x)$. Entonces $f \in \mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ y $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f = F(c_i) - F(c_{i-1})$. El ejercicio 7.2.14 y el corolario 7.2.10 implican que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y que $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} (F(c_i) - F(c_{i-1})) = F(b) - F(a)$.

2. $E = \emptyset$.

3. Sea $E := \{-1, 1\}$. Si $x \notin E$, $G'(x) = g(x)$.

4. De hecho, $B'(x) = |x|$ para toda x.

6. $F_c = F_a - \int_a^c f$.

7. Sea h la función de Thomae. No hay ninguna función $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $H'(x) = h(x)$ para x en algún intervalo abierto no degenerativo; en caso contrario, sería una contradicción del teorema de Darboux 6.2.12 en este intervalo.

9. a) $G(x) = F(x) - F(c)$, b) $H(x) = F(b) - F(x)$, c) $S(x) = F(\text{sen}\, x) - F(x)$.

10. Usar el teorema 7.3.6 y la regla de la cadena 6.1.6.

11. a) $F'(x) = 2x(1 + x^6)^{-1}$ b) $F'(x) = (1 + x^2)^{1/2} - 2x(1 + x^4)^{1/2}$.

13. $g'(x) = f(x + c) - f(x - c)$.

16. a) Tomar $\varphi(t) = 1 + t^2$ para obtener $\frac{1}{3}(2^{3/2} - 1)$.
b) Tomar $\varphi(t) = 1 + t^3$ para obtener $\frac{4}{3}$.
c) Tomar $\varphi(t) = 1 + \sqrt{t}$ para obtener $\frac{4}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2})$.
d) Tomar $\varphi(t) = t^{1/2}$ para obtener 2(sen 2 − sen 1).

18. a) Tomar $x = \varphi(t) = t^{1/2}$, de modo que $t = \psi(x) = x^2$ para obtener $4(1 - \ln(5/3))$.
b) Tomar $x = \varphi(t) = (t + 1)^{1/2}$, de tal modo que $t = \psi(x) = x^2 - 1$ para poder obtener $\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \ln 3$.
c) Tomar $x = \varphi(t) = t^{1/2}$ para obtener $2(3/2 + \ln 3/2)$.
d) Tomar $x = \varphi(t) = t^{1/2}$ para obtener $\arctan 1 - \arctan(1/2)$.

19. En los incisos a)-c) $\varphi'(0)$ no existe. En el inciso a), integrar en $[c, 4]$ y sea $c \to 0+$. En el inciso c), el integrando es par, por lo que la integral es igual a $2\int_0^1 (1 + t)^{1/2}\, dt$.

20. b) $\bigcup_n Z_n$ está contenida en $\bigcup_{n,k} J_k^n$ por lo que la suma de las longitudes de estos intervalos es $\le \sum_n \varepsilon/2^n = \varepsilon$.

21. a) Se aplica el teorema del producto 7.3.16.
b) Se tiene $\mp 2t \int_a^b fg \le t^2 \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2$.
c) Sea $t \to \infty$ en b)
d) Si $\int_a^b f^2 \neq 0$, sea $t = (\int_a^b g^2 / \int_a^b f^2)$ en b).

22. Adviértase que sgn $\circ$ h es la función de Dirichlet, que no es Riemann integrable.

Sección 7.4

1. Usar (4) con $n = 4$, $a = 1$, $b = 2$, $h = 1/4$. Aquí $1/4 \le f''(c) \le 2$, de donde $T_4 \approx 0.697\ 02$.

3. $T_4 \approx 0.782\ 79$.

4. El índice n debe satisfacer $2/12n^2 < 10^{-6}$; en consecuencia, $n > 1000/\sqrt{6} \approx 408.25$.

5. $S_4 \approx 0.785\ 39$.

6. El índice n debe satisfacer $96/180n^4 < 10^{-6}$; en consecuencia, $n \ge 28$.

12. La integral es igual al área de una cuarta parte del círculo unitario. Las derivadas de h no están acotadas en $[0, 1]$. Puesto que $h''(x) \le 0$, la desigualdad es $T_n(h) < \pi/4 < M_n(h)$. Véase el ejercicio 8.

13. Interpretar K como un área. Ahora demostrar que $h''(x) = -(1 - x^2)^{3/2}$ y que $h^{(4)}(x) = -3(1 + 4x^2)(1 - x^2)^{-7/2}$. Con ocho cifras decimales, $\pi = 3.141\ 592\ 65$.

14. Aproximadamente 3.653 484 49.

15. Aproximadamente 4.821 159 32.

16. Aproximadamente 0.835 648 85.

17. Aproximadamente 1.851 937 05.

18. 1.

19. Aproximadamente 1.198 140 23.

20. Aproximadamente 0.904 524 24.

Sección 8.1

1. Adviértase que $0 \le f_n(x) \le x/n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

3. Si $x > 0$, entonces $|f_n(x) - 1| < 1/(nx)$.

5. Si $x > 0$, entonces $|f_n(x)| \le 1/(nx) \to 0$.

7. Si $x > 0$, entonces $0 < e^{-x} < 1$.

9. Si $x > 0$, entonces $0 \leq x^2 e^{-nx} = x^2(e^{-x})^n \to 0$, ya que $0 < e^{-x} < 1$.

10. Si $x \in \mathbb{Z}$, el límite es igual a 1. Si $x \notin \mathbb{Z}$, el límite es igual a 0.

11. Si $x \in [0, a]$, entonces $|f_n(x)| \leq a/n$. Sin embargo, $f_n(n) = 1/2$.

14. Si $x \in [0, b]$, entonces $|f_n(x)| \leq b^n$. Sin embargo, $f_n(2^{-1/n}) = 1/3$.

15. Si $x \in [a, \infty)$, entonces $|f_n(x)| \leq 1/(na)$. Sin embargo, $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$ sen $1 > 0$.

18. El máximo de f_n en $[0, \infty)$ está en $x = 1/n$, por lo que $\|f_n\|_{[0, \infty)} = 1/(ne)$.

20. Si n es suficientemente grande, $\|f_n\|_{[a, \infty)} = n^2a^2/e^{na}$. Sin embargo, $\|f_n\|_{[0, \infty)} = 4/e^2$.

23. Sea M una cota de $(f_n(x))$ y $(g_n(x))$ en A, de donde también $|f(x)| \leq M$. Por la desigualdad del triángulo se obtiene $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq M(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|)$ para $x \in A$.

Sección 8.2

1. La función límite es $f(x) := 0$ para $0 \leq x < 1$, $f(1) := 1/2$ y $f(x) := 1$ para $1 < x \leq 2$.

4. Si $\varepsilon > 0$ está dada, sea K tal que si $n \geq K$, entonces $\|f_n - f\|_I < \varepsilon/2$. Entonces $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon/2 + |f(x_n) - f(x_0)|$. Puesto que f es continua (por el teorema 8.2.2) y $x_n \to x_0$, entonces $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ para $n \geq K'$, por lo que $|f_n(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $n \geq \text{máx}\{K, K'\}$.

6. Aquí $f(0) = 1$ y $f(x) = 0$ para $x \in (0, 1]$. La convergencia no es uniforme en $[0, 1]$.

7. Dada $\varepsilon := 1$, existe $K > 0$ tal que si $n \geq K$ y $x \in A$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < 1$, por lo que $|f_n(x)| \leq |f_K(x)| + 1$ para toda $x \in A$. Sea $M := \text{máx}\{\|f_1\|_A, \cdots, \|f_{K-1}\|_A, \|f_K\|_A + 1\}$.

8. $f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}/2$.

10. Aquí (g_n) converge uniformemente a la función cero. La sucesión (g_n') no converge uniformemente.

11. Usar el teorema fundamental 7.3.1 y el teorema 8.2.4.

13. Si $a > 0$, entonces $\|f_n\|_{[a, \pi]} \leq 1/(na)$ y se aplica el teorema 8.2.4.

15. Aquí $\|g_n\|_{[0, 1]} \leq 1$ para toda n. Después se aplica el teorema 8.2.5.

20. Sea $f_n(x) := x^n$ en $[0, 1)$.

Sección 8.3

1. Sea $A := x > 0$ y sea que $m \to \infty$ en (5). Para la estimación superior de e, tomar $x = 1$ y $n = 3$ a fin de obtener $|e - 2\frac{2}{3}| < 1/12$, de donde $e < 2\frac{3}{4}$.

2. Adviértase que si $n \geq 9$, entonces $2/(n + 1)! < 6 \times 10^{-7} < 5 \times 10^{-6}$. En consecuencia, $e \approx 2.71828$.

3. Evidentemente, $E_n(x) \leq e^x$ para $x \geq 0$. Para obtener la otra desigualdad, aplicar el teorema de Taylor 6.4.1 a $[0, a]$.

5. Adviértase que $0 \leq t^n/(1 + t) \leq t^n$ para $t \in [0, x]$.

6. ln 1.1 ≈ 0.0953 y ln 1.4 ≈ 0.3365. Tomar $n > 19\,999$.

7. ln 2 ≈ 0.6931.

10. $L'(1) = \text{lím}[L(1 + 1/n) - L(1)]/(1/n) = \text{lím}\, L((1 + 1/n)^n) = L(\text{lím}(1 + 1/n)^n) = L(e) = 1.$

11. c) $(xy)^{\alpha} = E(\alpha L(xy)) = E(\alpha L(x) + \alpha L(y)) = E(\alpha L(x)) \cdot E(\alpha L(y)) = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$.

12. b) $(x^{\alpha})^{\beta} = E(\beta L(x^{\alpha})) = E(\beta \alpha L(x)) = x^{\alpha\beta}$, y se procede del mismo modo para $(x^{\beta})^{\alpha}$.

15. Usar 8.3.14 y 8.3.9vii.

17. De hecho, se tiene $\log_a x = (\ln x)/(\ln a) = [(\ln x)/(\ln b)] \cdot [(\ln b)/(\ln a)]$ si $a \neq 1$, $b \neq 1$. Después se toma $a = 10$, $b = e$.

Sección 8.4

1. Si $n > 2|x|$, entonces $|\cos x - C_n(x)| \leq (16/15)|x|^{2n}/(2n)!$, de donde $\cos(0.2) \approx 0.980\,067$, $\cos 1 \approx 0.549\,302$. Del mismo modo, $\text{sen}(0.2) \approx 0.198\,669$ y $\text{sen}\, 1 \approx 0.841\,471$.

4. Se integra dos veces 8.4.8x en $[0, x]$. Adviértase que el polinomio de la izquierda tiene un cero en el intervalo $[1.56, 1.57]$, por lo que $1.56 \leq \pi/2$.

5. El ejercicio 8.4.4 establece que $C_4(x) \leq \cos x \leq C_3(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Al integrar varias veces, se obtiene $S_4(x) \leq \text{sen}\, x \leq S_5(x)$ para toda $x > 0$. Demostrar que $S_4(3.05) > 0$ y $S_5(3.15) < 0$. (Este procedimiento puede hacerse más riguroso.)

6. Si $|x| \leq A$ y $m > n > 2A$, entonces $|c_m(x) - c_n(x)| < (16/15)A^{2n}/(2n)!$, de donde la convergencia de (c_n) a c es uniforme en todo intervalo $[-A, A]$.

7. $D[(c(x))^2 - (s(x))^2] = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Para la unicidad, seguir el razonamiento de 8.4.4.

8. Sea $g(x) := f(0)c(x) + f'(0)s(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, de tal modo que $g''(x) = g(x)$, $g(0) = f(0)$ y $g'(0) = f'(0)$. Por lo tanto, $h(x) := f(x) - g(x)$ tiene la propiedad de que $h''(x) = h(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Por tanto, $g(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que $f(x) = f(0)c(x) + f'(0)s(x)$.

9. Si $\varphi(x) := c(-x)$, demostrar que $\varphi''(x) = \varphi(x)$ y $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, por lo que $\varphi(x) = c(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, c es par.

Sección 9.1

1. Sea s_n la n-ésima suma parcial de $\sum_1^{\infty} a_n$, sea t_n la n-ésima suma parcial de $\sum_1^{\infty} |a_n|$ y suponer que $a_n \geq 0$ para $n > P$. Si $m > n > P$, demostrar que $t_m - t_n = s_m - s_n$. Aplicar después el criterio de Cauchy.

3. Tomar términos positivos hasta que la suma parcial exceda 1, entonces tomar términos negativos hasta que la suma parcial sea menor que 1, entonces tomar términos positivos hasta que la suma parcial exceda 2, y así sucesivamente.

5. Sí.

6. Si $n \geq 2$, entonces $s_n = -\ln 2 - \ln n + \ln(n + 1)$. Sí.

9. Se tiene $s_{2n} - s_n \geq na_{2n} = \frac{1}{2}(2na_{2n})$ y $s_{2n+1} - s_n \geq \frac{1}{2}(2n + 1)a_{2n+1}$. Por consiguiente, $\text{lím}(na_n) = 0$.

11. De hecho, si $|n^2 a_n| \leq M$ para toda n, entonces $|a_n| \leq M/n^2$.

13. a) Racionalizar para obtener $\sum x_n$, donde $x_n := [\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})]^{-1}$ y adviértase que $x_n \approx y_n := 1/(2n)$. Aplicar después el criterio de comparación de límites 3.7.8.
    b) Racionalizar y comparar con $\sum 1/n^{3/2}$.

14. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, las sumas parciales de $\sum |a_n|$ están acotadas, digamos por M. Evidentemente, el valor absoluto de las sumas parciales de cualquier subserie de a_n también está acotado por M.

Recíprocamente, si toda subserie de $\sum a_n$ es convergente, entonces las subseries que consisten en los términos estrictamente positivos (y estrictamente negativos) son absolutamente convergentes, de donde se sigue que $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Sección 9.2

1. a) Convergente; comparar con $\sum 1/n^2$.
c) Divergente; adviértase que $2^{1/n} \to 1$.

2. a) Divergente; aplicar 9.2.1 con $b_n := 1/n$.
c) Convergente; utilizar 9.2.4 y adviértase que $(n/(n+1))^n \to 1/e < 1$.

3. a) $(\ln n)^p < n$ para n grande, por la regla de L'Hôpital.
c) Convergente; adviértase que $(\ln n)^{\ln n} > n^2$ para n grande.
e) Divergente; aplicar 9.2.6 o el ejercicio 3.7.12.

4. a) Convergente b) Divergente c) Divergente
d) Convergente; adviértase que $(\ln n) \exp(-n^{1/2}) < n \exp(-n^{1/2}) < 1/n^2$ para n grande, por la regla de L'Hôpital.
e) Divergente f) Divergente

6. a) Aplicar el criterio de la integral 9.2.6.

7. a) b) Convergentes c) Divergente d) Convergente.

9. Si $m > n \geq K$, entonces $|s_m - s_n| \leq |x_{n+1}| + \cdots + |x_m| < r^{n+1}/(1-r)$. Ahora se hace $m \to \infty$.

12. a) Una estimación muy aproximada del residuo está dada por $s - s_4 < \int_5^\infty x^{-2}\,dx = 1/5$. Del mismo modo, $s - s_{10} < 1/11$ y $s - s_n < 1/(n+1)$, por lo que bastan 999 términos para obtener $s - s_{999} < 1/1000$.
d) Si $n \geq 4$, entonces $x_{n+1}/x_n \leq 5/8$ por lo que (por el ejercicio 10) $|s - s_4| \leq 5/12$. Si $n \geq 10$, entonces $x_{n+1}/x_n \leq 11/20$, de modo que $|s - s_{10}| \leq (10/2^{10})(11/9) < 0.012$. Si $n = 14$, entonces $|s - s_{14}| < 0.000\,99$.

13. b) Aquí $\sum_{n+1}^\infty < \int_n^\infty x^{-3/2}\,dx = 2/\sqrt{n}$, de modo que $|s - s_{10}| < 0.663$ y $|s - s_n| < 0.001$ cuando $n > 4 \times 10^6$.
c) Si $n \geq 4$, entonces $|s - s_n| \leq (0.694)x_n$, de modo que $|s - s_4| < 0.065$. Si $n \geq 10$, entonces $|s - s_n| \leq (0.628)x_n$, de modo que $|s - s_{10}| < 0.000\,023$.

14. Adviértase que (s_{3n}) no está acotada.

16. Adviértase que, para un entero con n dígitos, hay 9 maneras de escoger el primer dígito y 10 maneras de escoger cada uno de los $n - 1$ dígitos restantes. Hay un valor de m_k del 1 al 9, hay un valor del 10 al 19, uno del 20 al 29, etcétera.

18. Aquí $\text{lím}(n(1 - x_{n-1}/x_n)) = (c - a - b) + 1$, de tal modo que la serie es convergente si $c > a + b$ y es divergente si $c < a + b$.

Sección 9.3

1. a) Absolutamente convergente b) Condicionalmente convergente
c) Divergente d) Condicionalmente convergente.

2. Demostrar por inducción matemática que $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_5 < s_3 < s_1$. En consecuencia, el límite está entre s_n y s_{n+1}, de modo que $|s - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = z_{n+1}$.

5. Utilizar el criterio de Dirichlet con $(y_n) := (+1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, \cdots)$. O bien, agrupar los términos por pares (después del primero) y usar el criterio para series alternadas.

7. Si $f(x) := (\ln x)^p/x^q$, entonces $f'(x) < 0$ para x suficientemente grande. La regla de L'Hôpital establece que los términos de la serie alternada tienden a 0.

8. a) Convergente b) Divergente c) Divergente d) Divergente.

11. El criterio de Dirichlet no se aplica (al menos directamente), ya que las sumas parciales de la serie generada por $(1, -1, -1, 1, 1, 1, \cdots)$ no están acotados.

15. a) Utilizar el criterio de Abel con $x_n := 1/n$.
 b) Utilizar la desigualdad de Cauchy con $x_n := \sqrt{a_n}$, $y_n := 1/n$ para poder obtener $\sum \sqrt{a_n}/n \le (\sum a_n)^{1/2}(\sum 1/n^2)^{1/2}$, con lo cual se establece la convergencia.
 d) Sea $a_n := [n(\ln n)^2]^{-1}$, que converge por el criterio de la integral. Sin embargo, $b_n := [\sqrt{n} \ln n]^{-1}$, que diverge.

Sección 9.4

1. a) Tomar $M_n := 1/n^2$ en el criterio M de Weierstrass.
 c) Puesto que $|\text{sen } y| \le |y|$, la serie converge para toda x. Pero no es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$. Si $a > 0$, la serie es uniformemente convergente para $|x| \le a$.
 d) Si $0 \le x \le 1$, la serie es divergente. Si $1 < x < \infty$, la serie es convergente. Es uniformemente convergente en $[a, \infty)$ para $a > 1$. Sin embargo, no es uniformemente convergente en $(1, \infty)$.

4. Si $\rho = \infty$, entonces la sucesión $(|a_n|^{1/n})$ no está acotada. En consecuencia, si $|x_0| > 0$, entonces hay un número infinito de $k \in \mathbb{N}$ con $|a_k| > 1/|x_0|$, por lo que $|a_k x_0^k| > 1$. Por tanto, la serie no es convergente cuando $x_0 \neq 0$.

5. Suponer que $L := \text{lím}(|a_n|/|a_{n+1}|)$ existe y que $0 < L < \infty$. Del criterio del cociente se sigue que $\sum a_n x^n$ converge para $|x| < L$ y diverge para $|x| > L$. El teorema de Cauchy-Hadamard implica que $L = R$.

6. a) $R = \infty$ b) $R = \infty$ c) $R = 1/e$
 d) 1 e) $R = 4$ f) $R = 1$

8. Usar $\text{lím}(n^{1/n}) = 1$.

10. Por el teorema de unicidad 9.4.13, $a_n = (-1)^n a_n$ para toda n.

12. Si $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio P_n tal que $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$ para $x \neq 0$.

13. Sea $g(x) := 0$ para $x \ge 0$ y sea $g(x) := e^{-1/x^2}$ para $x < 0$. Demostrar que $g^{(n)}(0) = 0$ para toda n.

16. Sustituir $-y$ por x en el ejercicio 15 e integrar de $y = 0$ a $y = x$ para $|x| < 1$, lo cual se justifica por el teorema 9.4.11.

19. $\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/n!(2n+1)$ para $x \in \mathbb{R}$.

20. Aplicar el ejercicio 14 y $\int_0^{\pi/2} (\text{sen } x)^{2n}\, dx = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$.

Sección 10.1

1. a) Puesto que $t_i - \delta(t_i) \le x_{i-1}$ y $x_i \le t_i + \delta(t_i)$, entonces $0 \le x_i - x_{i-1} \le 2\delta(t_i)$.
b) Aplicar el inciso a) a cada subintervalo.

2. b) Considerar la partición etiquetada $\{([0, 1], 1), ([1, 2], 1), ([2, 3], 3), ([3, 4], 3)\}$.

3. a) Si $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ y t_k es una etiqueta de los dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ y $[x_k, x_{k+1}]$, debe tenerse $t_k = x_k$. Se reemplazan estos dos subintervalos por el subintervalo $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ con la etiqueta t_k, preservando la propiedad de finura-δ.
b) No.
c) Si $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$, entonces se reemplaza $[x_{k-1}, x_k]$ por los dos intervalos $[x_{k-1}, t_k]$ y $[t_k, x_k]$ con la etiqueta t_k, preservando la propiedad de finura-δ.

4. Si $x_{k-1} \le 1 \le x_k$ y si t_k es la etiqueta de $[x_{k-1}, x_k]$, entonces no puede tenerse $t_k > 1$, ya que entonces $t_k - \delta(t_k) = \frac{1}{2}(t_k + 1) > 1$. Del mismo modo, no puede tenerse $t_k < 1$, ya que entonces $t_k + \delta(t_k) = \frac{1}{2}(t_k + 1) < 1$. Por lo tanto, $t_k = 1$.

5. a) Sea $\delta(t) := \frac{1}{2}\text{mín}\{|t-1|, |t-2|, |t-3|\}$ si $t \ne 1, 2, 3$ y $\delta(t) := 1$ para $t = 1, 2, 3$.
b) Sea $\delta_2(t) := \text{mín}\{\delta(t), \delta_1(t)\}$, donde δ es como en el inciso a).

7. a) $F_1(x) := (2/3)x^{3/2} + 2x^{1/2}$.
b) $F_2(x) := (2/3)(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2}$.
c) $F_3(x) := (2/3)x^{3/2}(\ln x - 2/3)$ para $x \in (0, 1]$ y $F_3(0) := 0$.
d) $F_4(x) := 2x^{1/2}(\ln x - 2)$ para $x \in (0, 1]$ y $F_4(0) := 0$.
e) $F_5(x) := -\sqrt{1-x^2} + \text{arcsen}\, x$.
f) $F_6(x) := \text{arcsen}(x-1)$.

8. No es necesario que la partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}_z$ sea fina-δ_ε, ya que el valor de $\delta_\varepsilon(z)$ puede ser mucho más pequeño que $\delta_\varepsilon(x_j)$.

9. Si f fuera integrable, entonces $\int_0^1 f \ge \int_0^1 s_n = 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/(n+1)$.

10. Se enumeran los números racionales diferentes de cero como $r_k = m_k/n_k$ y se define $\delta_\varepsilon(m_k/n_k) := \varepsilon/(n_k 2^{k+1})$ y $\delta_\varepsilon(x) := 1$ en caso contrario.

12. La función M no es continua en $[-2, 2]$.

13. L_1 es continua y $L_1'(x) = l_1(x)$ para $x \ne 0$, por lo que se aplica el teorema 10.1.9.

15. Se tiene $C_1'(x) = (3/2)x^{1/2}\cos(1/x) + x^{-1/2}\text{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Puesto que el primer término en C_1' tiene una extensión continua a $[0, 1]$, es integrable.

16. Se tiene $C_2'(x) = \cos(1/x) + (1/x)\text{sen}(1/x)$ para $x > 0$. Por el análogo del ejercicio 7.2.12, el primer término pertenece a $\mathcal{R}[0, 1]$.

17. a) Tomar $\varphi(t) := t^2 + t - 2$ de modo que $E_\varphi = \emptyset$ para obtener 6.
b) Tomar $\varphi(t) := \sqrt{t}$ de modo que $E_\varphi = \{0\}$ para obtener $2(2 + \ln 3)$.
c) Tomar $\varphi(t) := \sqrt{t-1}$ de modo que $E_\varphi = \{1\}$ para obtener $2 \arctan 2$.
d) Tomar $\varphi(t) := \text{arcsen}\, t$ de modo que $E_\varphi = \{1\}$ para obtener $\frac{1}{4}\pi$.

19. a) De hecho, $f(x) := F'(x) = \cos(\pi/x) + (\pi/x)\text{sen}(\pi/x)$ para $x > 0$. Se hace $f(0) := 0$, $F'(0) := 0$. Adviértase que f es continua en $(0, 1]$.
b) $F(a_k) = 0$ y $F(b_k) = (-1)^k/k$. Aplicar el teorema 10.1.9.
c) Si $|f| \in \mathcal{R}^*[0, 1]$, entonces $\sum_{k=1}^{n} 1/k \le \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f| \le \int_0^1 |f|$ para $n \in \mathbb{N}$.

20. De hecho, $\text{sgn}(f(x)) = (-1)^k = m(x)$ en $[a_k, b_k]$ de modo que $m(x) \cdot f(x) = |m(x)f(x)|$ para $x \in [0, 1]$. Puesto que las restricciones de m y $|m|$ a cada intervalo $[c, 1]$ para $0 < c < 1$ son funciones escalonadas, pertenecen a $\mathcal{R}[c, 1]$. Por el ejercicio 7.2.11, m y $|m|$ pertenecen a $\mathcal{R}[0, 1]$ y $\int_0^1 m = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k(2k+1)$ y $\int_0^1 |m| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k(2k+1)$.

21. De hecho, $\varphi(x) = \Phi'(x) = |\cos(\pi/x)| + (\pi/x)\text{sen}(\pi/x) \cdot \text{sgn}(\cos(\pi/x))$ para $x \notin E$ por el ejemplo 6.1.7c. Evidentemente, φ no está acotada cerca de 0. Si $x \in [a_k, b_k]$, entonces $\varphi(x) = |\cos(\pi/x)| + (\pi/x)|\text{sen}(\pi/x)|$, de modo que $\int_{a_k}^{b_k} |\varphi| = \Phi(b_k) - \Phi(a_k) = 1/k$, de donde $|\varphi| \notin \mathcal{R}^*[0, 1]$.

22. Aquí $\psi(x) = \Psi'(x) = 2x|\cos(\pi/x) + \pi\,\text{sen}(\pi/x)| \cdot \text{sgn}(\cos(\pi/x))$ para $x \notin \{0\} \cup E_1$ por el ejemplo 6.1.7b. Puesto que ψ está acotada, se aplica el ejercicio 7.2.11. No puede aplicarse el teorema 7.3.1 para evaluar $\int_0^b \psi$ porque E no es finito, pero el teorema 10.1.9 se aplica y $\psi \in \mathcal{R}[0, 1]$. El corolario 7.3.15 implica que $|\psi| \in \mathcal{R}[0, 1]$.

23. Si $p \geq 0$, entonces $mp \leq f(p) \leq Mp$, donde m y M denotan el ínfimo y el supremo de f en $[a, b]$, de modo que $m \int_a^b p \leq \int_a^b fp \leq M \int_a^b p$. Si $\int_a^b p = 0$, el resultado es trivial; en caso contrario, la conclusión se sigue del teorema del valor intermedio de Bolzano 5.3.7.

24. Por el teorema de multiplicación 10.1.14, $fg \in \mathcal{R}^*[a, b]$. Si g es creciente, entonces $g(a)f \leq fg \leq g(b)f$ por lo que $g(a) \int_a^b f \leq \int_a^b fg \leq g(b) \int_a^b f$. Sea $K(x) := g(a) \int_a^x f + g(b) \int_x^b f$, por lo que K es continua y asume todos los valores entre $K(b)$ y $K(a)$.

Sección 10.2

2. a) Si $G(x) := 3x^{1/3}$ para $x \in [0, 1]$, entonces $\int_c^1 g = G(1) - G(c) \to G(1) = 3$.
   b) Se tiene $\int_c^1 (1/x)\,dx = \ln c$, que no tiene límite en $\mathbb{R}$ cuando $c \to 0$.

3. Aquí $\int_0^c (1-x)^{-1/2}\,dx = 2 - 2(1-c)^{1/2} \to 2$ cuando $c \to 1-$.

5. Debido a la continuidad, $g_1 \in \mathcal{R}^*[c, 1]$ para toda $c \in (0, 1)$. Si $\omega(x) := x^{-1/2}$, entonces $|g_1(x)| \leq \omega(x)$ para toda $x \in [0, 1]$. La "versión izquierda" del ejercicio precedente implica que $g_1 \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ y la desigualdad anterior y el criterio de comparación 10.2.4 implican que $g_1 \in \mathcal{L}[0, 1]$.

6. a) La función está acotada en $[0, 1]$ (usar la regla de L'Hôpital) y es continua en $(0, 1)$.
   c) Si $x \in (0, \frac{1}{2}]$, el integrando está dominado por $|(\ln \frac{1}{2}) \ln x|$. Si $x \in [\frac{1}{2}, 1)$, el integrando está dominado por $|(\ln \frac{1}{2})\ln(1-x)|$.

7. a) Convergente b) Divergente c) Divergente
   d) Convergente e) Convergente f) Divergente.

10. Por el teorema de multiplicación 10.1.4, $fg \in \mathcal{R}^*[a, b]$. Puesto que $|f(x)g(x)| \leq B|f(x)|$, entonces $fg \in \mathcal{L}[a, b]$ y $\|fg\| \leq B\|f\|$.

11. a) Sea $f(x) := (-1)^k 2^k/k$ para $x \in [c_{k-1}, c_k)$ y $f(1) := 0$, donde las c_k son como en el ejemplo 10.2.2a. Entonces $f^+ := \text{máx}\{f, 0\} \notin \mathcal{R}^*[0, 1]$.
    b) Usar la primera fórmula de la demostración del teorema 10.2.7.

13. jj) Si $f(x) = g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces $\text{dist}(f, g) = \int_a^b |f - g| = 0$.
    jjj) $\text{dist}(f, g) = \int_a^b |f - g| = \int_a^b |g - f| = \text{dist}(g, f)$.
    jk) $\text{dist}(f, h) = \int_a^b |f - h| \leq \int_a^b |f - g| + \int_a^b |g - h| = \text{dist}(f, g) + \text{dist}(g, h)$.

16. Si (f_n) converge a f en $\mathcal{L}[a, b]$, dada $\varepsilon > 0$ existe $K(\varepsilon/2)$ tal que si $m, n \geq K(\varepsilon/2)$, entonces $\|f_m - f\| < \varepsilon/2$ y $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$. Por lo tanto, $\|f_m - f_n\| \leq \|f_m - f\| + \|f - f_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por tanto, puede tomarse $H(\varepsilon) := K(\varepsilon/2)$.

18. Si $m > n$, entonces $\|g_m - g_n\| \leq 1/n + 1/m \to 0$. Puede tomarse $g := \text{sgn}$.

19. No.

20. Puede tomarse k como la función 0.

Sección 10.3

1. Sea $b \geq \text{máx}\{a, 1/\delta(\infty)\}$. Si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición fina-δ de $[a, b]$, demostrar que $\dot{\mathcal{P}}$ es una subpartición fina-δ de $[a, \infty)$.

3. Si $f \in \mathcal{L}[a, \infty)$, aplicar el ejercicio precedente a $|f|$. Recíprocamente, si $\int_p^q |f| < \varepsilon$ para $q > p \geq K(\varepsilon)$, entonces $|\int_a^q f - \int_a^p f| \leq \int_p^q |f| < \varepsilon$ por lo que $\lim_\gamma f \int_a^\gamma$ y $\lim_\gamma \int_a^\gamma |f|$ existen; por lo tanto, f, $|f| \in \mathcal{R}^*[a, \infty)$ y por consiguiente $f \in \mathcal{L}[a, \infty)$.

5. Si $f, g \in \mathcal{L}[a, \infty)$, entonces f, $|f|$, g y $|g|$ pertenecen a $\mathcal{R}^*[a, \infty)$, por lo que el ejemplo 10.3.3a implica que $f + g$ y $|f| + |g|$ pertenecen a $\mathcal{R}^*[a, \infty)$ y que $\int_a^\infty (|f| + |g|) = \int_a^\infty |f| + \int_a^\infty |g|$. Puesto que $|f + g| \leq |f| + |g|$, se sigue que $\int_a^\gamma |f + g| \leq \int_a^\gamma |f| + \int_a^\gamma |g| \leq \int_a^\infty |f| + \int_a^\infty |g|$, de donde $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

6. De hecho, $\int_1^\gamma (1/x)\,dx = \ln \gamma$, que no tiene límite cuando $\gamma \to \infty$. O bien, usar el ejercicio 2 y el hecho de que $\int_p^{2p} (1/x)\,dx = \ln 2 > 0$ para toda $p \geq 1$.

8. Si $\gamma > 0$, entonces $\int_0^\gamma \cos x\,dx = \text{sen}\,\gamma$, que no tiene límite cuando $\gamma \to \infty$.

9. a) Se tiene $\int_0^\gamma e^{-sx}\,dx = (1/s)(1 - e^{-s\gamma}) \to 1/s$.
   b) Sea $G(x) := -(1/s)e^{-sx}$ para $x \in [0, \infty)$, por lo que G es continua en $[0, \infty)$ y $G(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Por el teorema fundamental 10.3.5, se tiene $\int_0^\infty g = -G(0) = 1/s$.

12. a) Si $x \geq e$, entonces $(\ln x)/x \geq 1/x$.
    b) Integrar por partes en $[1, \gamma]$ y hacer después $\gamma \to \infty$.

13. a) $|\text{sen}\,x| \geq 1/\sqrt{2} > 1/2$ y $1/x > 1/(n + 1)\pi$ para $x \in (n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4)$.
    b) Si $\gamma > (n + 1)\pi$, entonces $\int_0^\gamma |D| \geq (1/4)(1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n + 1))$.

15. Sea $u = \varphi(x) = x^2$. Aplicar después el ejercicio 14.

16. a) Convergente b) Divergente c) Divergente
    d) Convergente e) Divergente f) Convergente.

17. a) Si $f_1(x) := \text{sen}\,x$, entonces $f_1 \notin \mathcal{R}^*[0, \infty)$. En el ejercicio 14, tomar $f_2(x) := x^{-1/2}\text{sen}\,x$ y $\varphi_2(x) := 1/\sqrt{x}$.
    c) Tomar $f(x) := x^{-1/2}\text{sen}\,x$ y $\varphi(x) := (x + 1)/x$.

18. a) $f(x) := \text{sen}\,x$ está en $\mathcal{R}^*[0, \gamma]$, y $F(x) := \int_0^x \text{sen}\,t\,dt = 1 - \cos x$ está acotada en $[0, \infty)$, y $\varphi(x) := 1/x$ decrece monótonamente a 0.
    c) $F(x) := \int_0^x \cos t\,dt = \text{sen}\,x$ está acotada en $[0, \infty)$ y $\varphi(x) := x^{-1/2}$ decrece monótonamente a 0.

19. Sea $u = \varphi(x) := x^2$.

20. a) Si $\gamma > 0$, entonces $\int_0^\gamma e^{-x}\,dx = 1 - e^{-\gamma} \to 1$ de modo que $e^{-x} \in \mathcal{R}^*[0, \infty)$. Del mismo modo, $e^{-|x|} = e^x \in \mathcal{R}^*(-\infty, 0]$.
    c) $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $|x| \geq 1$, por lo que $e^{-x^2} \in \mathcal{R}^*[0, \infty)$. Es lo mismo en $(-\infty, 0]$.

Sección 10.4

1. a) Converge a 0 en $x = 0$, a 1 en $(0, 1]$. No uniforme. Acotada por 1. Creciente. Límite $= 1$.
   c) Converge a 1 en $[0, 1)$, a $\frac{1}{2}$ en $x = 1$. No uniforme. Acotada por 1. Creciente. Límite $= 1$.

2. a) Converge a $\sqrt{x}$ en $[0, 1]$. Uniforme. Acotada por 1. Creciente. Límite $= 2/3$.
   c) Converge a $\frac{1}{2}$ en $x = 1$, a 0 en $(1, 2]$. No uniforme. Acotada por 1. Decreciente. Límite $= 0$.

3. a) Converge a 1 en $x = 0$, a 0 en $(0, 1]$. No uniforme. Acotada por 1. Decreciente. Límite = 0.
c) Converge a 0. No uniforme. Acotada por $1/e$. No monótona. Límite = 0.
e) Converge a 0. No uniforme. Acotada por $1/\sqrt{2e}$. No monótona. Límite = 0.

4. a) El teorema de convergencia dominada se aplica.
b) $f_k(x) \to 0$ para $x \in [0, 1)$, pero $(f_k(1))$ no está acotada. No hay una función dominante que sea obvia. Integrar por partes y usar el inciso a). El resultado indica que no se aplica el teorema de convergencia dominada.

6. Suponer que $(f_k(c))$ converge para alguna $c \in [a, b]$. Por el teorema fundamental, $f_k(x) - f_k(c) = \int_c^x f_k'$. Por el teorema de convergencia dominada, $\int_c^x f_k' \to \int_c^x g$, de donde $(f_k(x))$ converge para toda $x \in [a, b]$. Adviértase que si $f_k(x) := (-1)^k$, entonces $(f_k(x))$ no converge para ninguna $x \in [a, b]$.

7. De hecho, $g(x) := \sup\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ es igual a $1/k$ en $(k-1, k]$, por lo que $\int_0^n g = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. En consecuencia, $g \notin \mathcal{R}^*[0, \infty)$.

10. a) Si $a > 0$, entonces $|(e^{-tx}\text{sen}\, x)/x| \le e^{-ax}$ para $t \in J_a := (a, \infty)$. Si $t_k \in J_a$ y $t_k \to t_0 \in J_a$, entonces el razonamiento usado en 10.4.6d establece que E es continua en t_0. Asimismo, si $t_k \ge 1$, entonces $|(e^{-t_k x}\, \text{sen}\, x)/x| \le e^{-x}$ y el teorema de convergencia dominada implica que $E(t_k) \to 0$. Por tanto, $E(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.
b) Se sigue como en 10.4.6e que $E'(t_0) = -\int_0^\infty e^{-t_0 x}\, \text{sen}\, x\, dx = -1/(t_0^2 + 1)$.
c) Por 10.1.9, $E(s) - E(t) = \int_t^s E'(t)\, dt = -\int_t^s (t^2 + 1)^{-1}\, dt = \arctan t - \arctan s$ para $s, t > 0$. Pero $E(s) \to 0$ y $\arctan s \to \pi/2$ cuando $s \to \infty$.
d) No se sabe que E sea continua cuando $t \to 0+$.

12. Hacer $x \in I$. Como en 10.4.6e, si $t, t_0 \in [a, b]$, entonces existe t_x entre t y t_0 tal que $f(t, x) - f(t_0, x) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_x, x)$. Por lo tanto, $\alpha(x) \le [f(t, x) - f(t_0, x)]/(t - t_0) \le \omega(x)$ cuando $t \ne t_0$. Seguir el mismo razonamiento que antes y usar el teorema de convergencia dominada 10.4.5.

13. a) Si (s_k) es una sucesión de funciones escalonadas que converge a f casi en todas partes y (t_k) es una sucesión de funciones escalonadas que converge a g casi en todas partes, el teorema 10.4.9a y el ejercicio 2.2.16 implican que $(\text{máx}\{s_k, t_k\})$ es una sucesión de funciones escalonadas que converge a $\text{máx}\{f, g\}$ casi en todas partes. Ocurre lo mismo para $\text{mín}\{f, g\}$.

14. a) Puesto que $f_k \in \mathcal{M}[a, b]$ está acotada, pertenece a $\mathcal{R}^*[a, b]$. El teorema de convergencia dominada implica que $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$. El teorema de medibilidad 10.4.11 implica entonces que $f \in \mathcal{M}[a, b]$.
b) Puesto que $t \mapsto \arctan t$ es continua, el teorema 10.4.9b implica que $f_k := \arctan \circ g_k \in \mathcal{M}[a, b]$. Además, $|f_k(x)| \le \frac{1}{2}\pi$ para $x \in [a, b]$.
c) Si $g_k \to g$ casi en todas partes, de la continuidad de arctan se sigue que $f(k) \to f$ casi en todas partes. Los incisos a) y b) implican que $f \in \mathcal{M}[a, b]$ y el teorema 10.4.9b aplicado a $\varphi = \tan$ implica que $g = \tan \circ f \in \mathcal{M}[a, b]$.

15. a) Puesto que $\mathbf{1}_E$ está acotado, está en $\mathcal{R}^*[a, b]$ si y sólo si está en $\mathcal{M}[a, b]$.
c) $\mathbf{1}_{E'} = 1 - \mathbf{1}_E$.
d) $\mathbf{1}_{E \cup F}(x) = \text{máx}\{\mathbf{1}_E(x), \mathbf{1}_F(x)\}$ y $\mathbf{1}_{E \cap F}(x) = \text{mín}\{\mathbf{1}_E(x), \mathbf{1}_F(x)\}$. Además, $E \setminus F = E \cap F'$.
e) Si (E_k) es una sucesión creciente en $\mathbb{M}[a, b]$, entonces $(\mathbf{1}_{E_k})$ es una sucesión creciente en $\mathcal{M}[a, b]$ con $\mathbf{1}_E(x) = \text{lím}\, \mathbf{1}_{E_k}(x)$ y puede aplicarse el teorema 10.4.9c. Del mismo modo, $(\mathbf{1}_{F_k})$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{M}[a, b]$ y $\mathbf{1}_F(x) = \text{lím}\, \mathbf{1}_{F_k}(x)$.
f) Sea $A_n := \bigcup_{k=1}^n E_k$, de modo que (A_n) es una sucesión creciente en $\mathbb{M}[a, b]$ con $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = E$, por lo que se aplica el inciso e). Del mismo modo, si $B_n := \bigcap_{k=1}^n F_k$, entonces (B_n) es una sucesión decreciente en $\mathbb{M}[a, b]$ con $\bigcap_{n=1}^\infty B_n = F$.

16. a) $m(\emptyset) = \int_a^b 0 = 0$ y $0 \leq \mathbb{1}_E \leq 1$ implica que $0 \leq m(E) = \int_a^b \mathbb{1}_E \leq b - a$.
b) Puesto que $\mathbb{1}_{[c, d]}$ es una función escalonada, entonces $m([c, d]) = d - c$.
c) Puesto que $\mathbb{1}_{E'} = 1 - \mathbb{1}_E$, se tiene $m(E') = \int_a^b (1 - \mathbb{1}_E) = (b - a) - m(E)$.
d) Adviértase que $\mathbb{1}_{E \cup F} + \mathbb{1}_{E \cap F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F$.
f) Si (E_k) es creciente en $\mathbb{M}[a, b]$ a E, entonces $(\mathbb{1}_{E_k})$ es creciente en $\mathcal{M}[a, b]$ a $\mathbb{1}_E$. El teorema de convergencia monótona 10.4.4 se aplica.
g) Si (C_k) es disjunta por pares y si $E_n := \bigcup_{k=1}^n C_k$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $m(E_n) = m(C_1) + \cdots + m(C_n)$. Puesto que $\bigcup_{k=1}^\infty C_k = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ y (E_n) son crecientes, el inciso f) implica que $m(\bigcup_{k=1}^\infty C_k) = \text{lím}_n\, m(E_n) = \text{lím}_n \sum_{k=1}^n m(C_k) = \sum_{n=1}^\infty m(C_k)$.

Sección 11.1

1. Si $|x - u| < \text{ínf}\{x, 1 - x\}$, entonces $u < x + (1 - x) = 1$ y $u > x - x = 0$, por lo que $0 < u < 1$.

3. Puesto que la unión de dos conjuntos abiertos es abierta, entonces $G_1 \cup \cdots \cup G_k \cup G_{k+1} = (G_1 \cup \cdots \cup G_k) \cup G_{k+1}$ es un conjunto abierto.

5. El complemento de $\mathbb{N}$ es la unión $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup \cdots$ de intervalos abiertos.

7. El corolario 2.4.9 implica que toda vecindad de x en $\mathbb{Q}$ contiene un punto que no está en $\mathbb{Q}$.

10. x es un punto frontera de $A \Leftrightarrow$ toda vecindad V de x contiene puntos de A y contiene puntos de $\mathcal{C}(a) \Leftrightarrow x$ es un punto frontera de $\mathcal{C}(a)$.

12. Los conjuntos F y $\mathcal{C}(F)$ tienen los mismos puntos frontera. Por lo tanto, F contiene todos sus puntos frontera $\Leftrightarrow \mathcal{C}(F)$ no contiene ninguno de sus puntos frontera $\Leftrightarrow \mathcal{C}(F)$ es abierto.

13. $x \in A^\circ \Leftrightarrow x$ pertenece a un conjunto abierto $V \subseteq A \Leftrightarrow x$ es un punto interior de A.

15. Puesto que A^- es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, entonces por 11.1.5a es un conjunto cerrado que contiene a A. Puesto que $\mathcal{C}(A^-)$ es abierto, entonces $z \in \mathcal{C}(A^-) \Leftrightarrow z$ tiene una vecindad $V_\varepsilon(z)$ en $\mathcal{C}(A^-) \Leftrightarrow z$ no es ni un punto interior ni un punto frontera de A.

19. Si $G \neq \emptyset$ es abierto y $x \in G$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(x) \subseteq G$, de donde se sigue que $a := x - \varepsilon$ está en A_x.

21. Si $a_x < y < x$, entonces como $a_x := \text{ínf}\, A_x$ existe $a' \in A_x$ tal que $a_x < a' \leq y$. Por lo tanto, $(y, x] \subseteq (a', x] \subseteq G$ y $y \in G$.

23. Si $x \in \mathbb{F}$ y $n \in \mathbb{N}$, el intervalo I_n en F_n que contiene a x tiene longitud $1/3^n$. Sea y_n un punto terminal de I_n con $y_n \neq x$. Entonces $y_n \in \mathbb{F}$ (¿por qué?) y $y_n \to x$.

24. Como en el ejercicio precedente, tomar z_n como el punto medio de I_n. Entonces $z_n \notin \mathbb{F}$ (¿por qué?) y $z_n \to x$.

Sección 11.2

1. Sea $G_n := (1 + 1/n, 3)$ para $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $G_n := (1/2n, 2)$ para $n \in \mathbb{N}$.

5. Si $\mathcal{G}_1$ es una cubierta abierta de K_1 y si $\mathcal{G}_2$ es una cubierta abierta de K_2, entonces $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ es una cubierta abierta de $K_1 \cup K_2$.

7. Sea $K_n := [0, n]$ para $n \in \mathbb{N}$.

10. Puesto que $K \neq \emptyset$ está acotado, se sigue que $\inf K$ existe en $\mathbb{R}$. Si $K_n := \{k \in K : k \leq (\inf K) + 1/n\}$, entonces K_n es cerrado y está acotado; por consiguiente, es compacto. Por el ejercicio precedente, $\bigcap K_n \neq \emptyset$, pero si $x_0 \in \bigcap K_n$, entonces $x_0 \in K$ y es inmediato ver que $x_0 = \inf K$. [De manera alternativa, usar el teorema 11.2.6.]

12. Sea $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y sea $c \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $x_n \in K$ tal que $\sup\{|c - x| : x \in K\} - 1/n < |c - x_n|$. Después se aplica el teorema de Bolzano-Weierstrass.

15. Sea $F_1 := \{n : n \in \mathbb{N}\}$ y $F_2 := \{n + 1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

Sección 11.3

1. a) Si $a < b \leq 0$, entonces $f^{-1}(I) = \emptyset$. Si $a < 0 < b$, entonces $f^{-1}(I) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$. Si $0 \leq a < b$, entonces $f^{-1}(I) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a})\ (\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

3. $f^{-1}(G) = f^{-1}([0, \varepsilon)) = [1, 1 + \varepsilon^2) = (0, 1 + \varepsilon^2) \cap \mathrm{I}$.

4. Sea $G := (1/2, 3/2)$. Sea $F := [-1/2, 1/2]$.

8. Sea f la función discontinua de Dirichlet.

9. Primero se observa que si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que $x \in f^{-1}(\mathbb{R}\backslash A) \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}\backslash A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash f^{-1}(A)$; por lo tanto, $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash A) = \mathbb{R}\backslash f^{-1}(A)$. Se usa después el hecho de que un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}\backslash F$ es abierto, junto con el corolario 11.3.3.

Sección 11.4

1. Si $P_i := (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, 3$, entonces $d_1(P_1, P_2) \leq (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) = d_1(P_1, P_3) + d_1(P_3, P_2)$. Por tanto, d_1 satisface la desigualdad del triángulo.

2. Puesto que $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ para toda $x \in [0, 1]$, se sigue que $d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ y d_∞ satisface la desigualdad del triángulo.

3. Se tiene $s \neq t$ si y sólo si $d(s, t) = 1$. Si $s \neq t$, el valor de $d(s, u) + d(u, t)$ o es 1 o es 2, dependiendo de si u es igual a s o a t, o a ninguno de los dos.

4. Puesto que $d_\infty(P_n, P) = \sup\{|x_n - x|, |y_n - y|\}$, si $d_\infty(P_n, P) \to 0$, entonces se sigue que $|x_n - x| \to 0$ y $|y_n - y| \to 0$, de donde $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Recíprocamente, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $|x_n - x| \to 0$ y $|y_n - y| \to 0$, de donde $d_\infty(P_n, P) \to 0$.

6. Si la sucesión (x_n) en S converge a x con respecto al métrico discreto d, entonces $d(x_n, x) \to 0$, lo que implica que $x_n = x$ para toda n suficientemente grande. El recíproco es trivial.

7. Demostrar que un conjunto que consiste en un solo punto es abierto. Entonces se sigue que todo conjunto es un conjunto abierto, por lo que todo conjunto es también un conjunto cerrado. (¿Por qué?)

10. Sea $G \subseteq S_2$ abierto en (S_2, d_2) y sea $x \in f^{-1}(G)$ de modo que $f(x) \in G$. Entonces existe una vecindad-ε $V_\varepsilon(f(x)) \subseteq G$. Puesto que f es continua en x, existe una vecindad-δ $V_\delta(x)$ tal que $f(V_\delta(x)) \subseteq V_\varepsilon(f(x))$. Puesto que $x \in f^{-1}(G)$ es arbitraria, se concluye que $f^{-1}(G)$ es abierta en (S_1, d_1). La demostración del recíproco es similar.

11. Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ una cubierta de $f(S) \subseteq \mathbb{R}$ por conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. De 11.4.11 se sigue que cada conjunto $f^{-1}(G_\alpha)$ es abierto en (S, d). Por lo tanto, la colección $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ es una cubierta abierta de S. Puesto que (S, d) es compacto, una subcolección finita $\{f^{-1}(G_{\alpha_1}), \cdots, f^{-1}(G_{\alpha_N})\}$ cubre S, de donde se sigue que los conjuntos $\{G_{\alpha_1}, \cdots, G_{\alpha_N}\}$ deben formar una subcubierta finita de $\mathcal{G}$ para $f(S)$. Puesto que $\mathcal{G}$ es una cubierta abierta arbitraria de $f(S)$, se concluye que $f(S)$ es compacto.

ÍNDICE

D

E

F

G

H

I

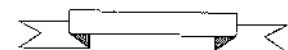
J

K

L

S

T



Otra obra de interés publicada por Editorial Limusa:

INTRODUCCIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Solow

Al contrario de lo que esperan muchos profesores, la habilidad para hacer demostraciones no se adquiere por ósmosis, se desarrolla. Para poder analizar, interpretar y hacer demostraciones el estudiante no tiene más alternativa que aprenderlo por sí mismo.

Introducción al razonamiento matemático es una guía prácticamente obligada para cualquiera que desee iniciar con el pie derecho una carrera en matemática o en alguna de las disciplinas relacionadas, como ingeniería, computación, física, economía, actuaría, etcétera.

Esta guía le ayudará a dominar las técnicas básicas que se usan en todas las demostraciones. Este libro es un apoyo muy útil en los cursos de Análisis Matemático.